F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

1

ANUL XI

1960

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

1

ANUL XI

1960

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN S. STOILOW — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — redactor responsabil adjunct; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; T. GANEA și A. HALANAY.

Revista STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE
apare de două ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul XI, nr. 1 1960

SUMAR

Pag.

D. BARBILIAN, *J*-metricile naturale finsleriene 7

ALEXANDRU FRODA, Reducerea formelor pătratice 49

ELENA MURGULESCU, Asupra teoriei mişcărilor conice în cazul aripilor subţiri de secţiune dată 61

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Forme exterioare cu baza infinită 95

VIOREL DUMITRAŞ, Grupurile de mişcare cu 4 parametri ale spaţiilor omogene A_3 133

T. HANGAN, Derivată Lie şi olonomie în teoria conexiunilor infinitezimale . . 159

I. BUCUR şi AL. LASCU, Clasele caracteristice şi clasele canonice ale unei varietăţi algebrice 175

N. RADU, Lema lui Krull şi structura inelelor 183

PAUL CONSTANTINESCU, Asupra clasificării funcţiilor booleene simetrice . . 193

MARIUS I. STOKA, Asupra grupurilor de mişcare ale spaţiilor riemanniene V_2 cu curbura constantă 207

ARISTIDE DELEANU, Asupra unei definiţii a grupului de coomologie al unui spaţiu topologic 229

HORIA BODNĂRESCU, Asupra unui sistem de axiome de incidenţă 237

VERONICA ANTOHI-TEODORESCU, Soluţia elementară a ecuaţiei cu derivate parţiale liniare de ordinul şase, de tip hiperbolic, cu pînza caracteristică triplă 249

NOTE 263

RECENZII 265

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome XI, n° 1 1960

SOMMAIRE

Page

D. BARBILIAN, Les J-géométries naturelles finsleriennes 7

AL. FRODA, Réduction des formes quadratiques 49

E. MURGULESCU, De la théorie des mouvements coniques dans le cas des ailes minces, de section donnée 61

M. N. ROŞCULEŢ, Formes extérieures à base infinie 95

V. DUMITRAŞ, Groupes de mouvement à 4 paramètres des espaces homogènes A_3 133

T. HANGAN, Dérivées de Lie et holonomie dans la théorie des connexions infinitésimales 159

I. BUCUR et AL. LASCU, Classes caractéristiques et classes canoniques d'une variété algébrique 175

N. RADU, Le lemme de Krull et la structure des anneaux 183

P. CONSTANTINESCU, Sur la classification des fonctions booléennes symétriques 193

M. I. STOKA, Sur les groupes de mouvement des espaces riemanniens V_2 à courbure constante 207

A. DELEANU, Sur une définition du groupe de cohomologie d'un espace topologique 229

H. BODNĂRESCU, Sur un système d'axiomes d'incidence 237

V. ANTOHI-TEODORESCU, Solution élémentaire de l'équation aux dérivées partielles linéaires d'ordre six, du type hyperbolique, à caractéristique triple 249

NOTES 263

COMPTES RENDUS 265

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том XI, № 1 1960

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Д. БАРБИЛИАН, Финслеровы естественные J-геометрии 7

А. ФРОДА, Приведение квадратичных форм 49

Е. МУРГУЛЕСКУ, О теории конических течений в случае тонких крыльев заданного сечения 61

М. РОШКУЛЕЦ, Внешние формы с бесконечным базисом 95

В. ДУМИТРАШ, Четырехпараметрические группы движений однородных пространств A_3 133

Т. ХАНГАН, Производная Ли и голономия в теории инфинитезимальных связностей 159

И. БУКУР и А. ЛАСКУ, Характеристические классы и канонические классы алгебраического многообразия 175

Н. РАДУ, Лемма Круля и строение колец 183

П. КОНСТАНТИНЕСКУ, О классификации симметрических булевых функций 193

М. СТОКА, О группах движений римановых пространств V_2 постоянной кривизны 207

А. ДЕЛЯНУ, Об одном определении группы когомологий топологического пространства 229

Х. БОДНЭРЕСКУ, Об одной системе аксиом инцидентности 237

В. АНТОХИ-ТЕОДОРЕСКУ, Элементарное решение линейного уравнения в частных производных шестого порядка с тройными характеристическими полостями 249

ЗАМЕТКИ 263

РЕЦЕНЗИИ 265

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

J-METRICILE NATURALE FINSLERIENE

DE

D. BARBILIAN

§ 1. CARACTERIZAREA CERCULUI ÎN CADRUL *J*-GEOMETRIILOR NATURALE

În numărul 2, anul X, al acestei publicații, am dat o primă aplicație a principiului nostru de metrizare (numărul 1, anul X, arătat aici prin **M**), la examinarea fundamentelor metricilor Poincaré-Carathéodory din Teoria funcțiilor. Articolul de față pregătește o altă aplicație funcțional-teoretică a lui **M** : caracterizarea prin proprietățile metricii generate în interiorul unui domeniu simplu conex J, a funcțiunii reprezentării lui Riemann. Principala sforțare o constituie reducerea ipotezelor de derivabilitate, cercetare care, probabil, poate fi împinsă mai departe decît rezultatele obținute aici.

1° Construcția axiomei 1 din § 4, 3°, M, cu ipoteza derivabilității continue a curbei K. Definiția fasicolului continuu de geodetice

Definiție. *Numim* J-*metrică* (sau J-*geometrie*) *naturală, relativă la domeniul interior al unei curbe simple, închise* K *din planul euclidian,* J-*metrica obținută specializînd în* § *4,* **M**, *continuului abstract* $\mathfrak{M}$ *al lui Möbius, pînă la continuul natural* $\mathcal{M}$ *al lui Möbius.* În definitiv, metricile propuse de noi la congresul din Praga, în 1934.

E clar că toate axiomele grupelor I + II + III din § 3, 1°, **M**, plus cererea deschiderii din § 4, 5°, **M**, sînt banal verificate de continuul $\mathcal{M}$.

Axioma 1 din § 4, 3°, **M**, nu o introducem direct, ci căutăm să o construim cu o cerere de derivabilitate. Demonstrația cere o sforțare, întrucît e vorba de o noțiune de tangență domenială, unde curba nu-și traversează tangenta *) și de caracterizarea acestei situații fără ajutorul derivatelor de ordin superior.

*) În definitiv : noțiunea de *dreaptă de sprijin.*

Introducem următoarea ipoteză :

1) *Curba* K *e continuu, punctual derivabilă.*

Aceasta înseamnă, că pentru fiecare vecinătate $\mathcal{U}(P)$, unde $P \in K$, există o reprezentare parametrică a coordonatelor carteziene : $x(t)$, $y(t)$, admițînd derivate de primul ordin $x'(t)$, $y'(t)$ continue și nu amîndouă nule.

În aceste condiții putem demonstra axioma 1, sub forma următoarei teoreme, mai slabe, dar care singură intervine în dezvoltarea materiei din unele paragrafe.

Teoremă $\boxed{1)}$. *Curba* K *este „cu tangentă" (în sensul din § 4, 3°,* **M**), *în fiecare punct* s (sau S) *de sprijin, de pe* K.

Demonstrație. Dacă s e punct de sprijin, el poate fi interpretat ca punct comun lui K și unui cerc extrem γ (relativ la o anume pereche de puncte din J).

Fie δ un cerc interior lui γ și tangent acestuia în s. Avem pentru domeniile interioare (evident deschise) :

$$\delta < \gamma \subset J. \tag{1}$$

E clar, că δ nu are în comun cu frontiera lui γ alt punct decît s. Citim pe (1), că toate punctele liniei δ se găsesc în domeniul deschis J, cu excepția lui s care aparține lui K.

Să însemnăm cu δ^* tangenta în s la K și să introducem coordonate carteziene (ortogonale) luînd s ca origină și δ^* ca axă a y^{lor}. Vom presupune γ așezat în semiplanul $y \leqslant 0$.

Luăm pe δ un punct O diferit de s : de exemplu, a doua intersecție a lui δ cu axa x^{lor}. Executăm inversiunea de pol O și putere de inversiune $\overline{Os}^2$. Cercul δ se transformă în dreapta δ^*. Introducem convenția, ca elementele figurii inverse să fie arătate cu aceeași literă ca în figura originară, modificată însă printr-o stea. Astfel s se va chema s^*.

Obținem astfel un cerc γ^* tangent în s^* la δ^* și așezat în celălalt semiplan $y \geqslant 0$ iar în închiderea domeniului interior al lui γ^*, pe care o vom arăta prin aceeași literă, o curbă K^*, de asemenea simplă, închisă și continuu punctual derivabilă (căci ecuațiile, algebrice, ale inversiunii, au derivate parțiale continue), prezentînd un singur punct comun s^* cu δ^*.

Cum K^* se găsește în γ^*, iar γ^* în semiplanul $y \geqslant 0$, într-o anume vecinătate $\mathcal{U}(s^*)$ avem, pentru coordonatele unui punct al lui K^* :

$$x(t), \qquad y(t) \geqslant 0 \tag{2}$$

$$y(t) \neq 0, \qquad (t \neq 0), \tag{3}$$

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \tag{4}$$

unde funcțiile (2) admit, în virtutea cererii 1), derivate de primul ordin $x'(t)$, $y'(t)$, nu simultan nule.

Ținînd seamă de (4) și aplicînd formula creșterilor finite, în vecinătatea $\mathcal{U}(s^*)$, obținem :

$$x(t) = t.x'(\alpha t), \qquad y(t) = t.y'(\beta t), \tag{5}$$
$$0 \leqslant \alpha < 1, \qquad 0 \leqslant \beta < 1.$$

Citim, comparînd (5) cu (2) şi (3), că în orice vecinătate $\mathcal{U}(s^*)$ a originei, există valori βt pozitive respectiv valori βt negative (cu β funcţie de t) pentru care derivata $y'(\beta t)$ este *respectiv* pozitivă şi negativă. Ca atare, avem *respectiv* : $\lim y'(\beta t) \geqslant 0$, $\lim y'(\beta t) \leqslant 0$, pentru $t \longrightarrow 0$. Dar y' e continuă în $\mathcal{U}(s^*)$, prin urmare îşi atinge valoarea-limită. Aşadar, $y'(0) \geqslant 0$ şi, în acelaşi timp, $y'(0) \leqslant 0$. În definitiv $y'(0) = 0$. Ţinînd seamă de definiţia derivabilităţii continue, punctuale, conchidem pentru $x'(0)$:

$$x'(0) \neq 0, \quad y'(0) = 0. \tag{6}$$

Dar $dx : dt = -dx : d(-t)$. Prin urmare, schimbînd eventual parametrul t în $-t$, putem înlocui pe (6) cu

$$x'(0) > 0, \quad y'(0) = 0. \tag{7}$$

Ţinînd seamă de (7) şi continuitatea derivatelor, rezultă existenţa unei vecinătăţi

$$\mathcal{V}(s^*) \subset \mathcal{U}(s^*)$$

în care avem

$$x'(t) > 0. \tag{8}$$

Din (5) şi (8) urmează în $\mathcal{V}(s^*)$:

$$x'(\alpha t) > 0, \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y'(\beta t)}{x'(\alpha t)}. \tag{9}$$

Pe (3), (5), (9), recunoaştem, că $y'(t)$ nu este peste tot nul în $\mathcal{V}(s^*)$. Fie atunci M_1 *resp.* M_2 maximum lui $\left|\frac{y(t)}{x(t)}\right|$ din (9), pentru $t \geqslant 0$ *resp.* $t \leqslant 0$ în închiderea lui $\mathcal{V}(s^*)$.

Punem

$$M = \text{minim } (M_1, M_2),$$

unde, evident,

$$M \neq 0$$

şi luăm un număr ε cu

$$0 < \varepsilon < M, \tag{10}$$

dar altfel arbitrar.

Din (5) şi (8) rezultă, că $x(t) \neq 0$ în $\mathcal{V}(s^*)$, afară poate de origină. Prin urmare cîtul de funcţii continue $y(t) : x(t)$ e continuu în aceste puncte. Citim pe (9), (8), (7), în virtutea continuităţii lui $y'(t)$, că $y(t) : x(t)$ poate fi făcut mai mic, în modul, decît orice număr pozitiv arbitrar dat, dacă luăm pe t destul de mic. Ca atare $y(t) : x(t)$ e continuu şi în origină.

Încît, cum, în virtutea lui (7) şi (9), cîtul $|y(t) : x(t)|$ ia sigur valorile extreme ale intervalului (10), ia şi valoarea intermediară ε atît la dreapta, cît şi la stînga originei $t = 0$, în $\mathcal{V}(s^*)$, a parametrului, căci $y'(\beta t)$ e susceptibilă, cum am văzut, atît de valori pozitive cît şi negative.

Ținînd seamă, că în acord cu (2) și (5), $y'(\beta t)$ este nenegativ la dreapta originei $t = 0$, a parametrului și nepozitiv, la stînga, recunoaștem existența a cel puțin două valori

$$t' > 0, \qquad t'' < 0$$

pentru care, potrivit lui (8) și formulei creșterilor finite, avem această precizare

$$\frac{y(t')}{x(t')} = \varepsilon, \qquad \frac{y(t'')}{x(t'')} = -\varepsilon.$$

E deci dovedită existența a două drepte

$$y - \varepsilon x = 0, \tag{10'}$$

$$y + \varepsilon x = 0 \tag{10''}$$

care taie curba K^* în cîte un punct $\sigma^* \neq s^*$:

$$x(t') > 0,\ y(t') > 0,$$

$$x(t'') > 0,\ y(t'') < 0,$$

din vecinătatea $\mathcal{V}(s^*)$.

Însă $\mathcal{V}(s^*)$ e supusă condiției $\mathcal{V}(s^*) \subset \mathcal{U}(s^*)$ așa încît să avem (8), altfel e arbitrară. E clar deci, că poate fi înlocuită cu oricare vecinătate $\mathcal{W}(s^*) \subset \mathcal{V}(s^*) \subset \mathcal{U}(s^*)$, deoarece (8) are loc atunci *a fortiori*.

Ajungem la acest rezultat:

În orice vecinătate destul de restrînsă $\mathcal{V}(s^*)$, *pentru un* M *care depinde de vecinătate, există un* ε *condiționat numai de* (10), *așa încît dreptele* (10'), (10'') *taie pe* K^* *în cîte un punct* $\sigma^* \neq s^*$.

O primă consecință e următoarea: *curba* K^* *nu poate avea componente rectilinii* $s^*\sigma^*$.

Să presupunem, dimpotrivă, că ar exista o astfel de componentă. E clar, că $s^*\sigma^* \neq \delta^*$, căci, prin construcție, δ^* are în comun cu K^* un singur punct. Însemnăm cu $y \pm \lambda x = 0$ o dreaptă de sprijin a lui K^* din unghiul neobtuz, deschis, pe care semidreapta $s^*\sigma^*$ îl face cu una din axele s^*X, s^*X', ale x^{lor}. Avem

$$\lambda > 0.$$

Alegem o vecinătate $\mathcal{V}(s^*)$, așa încît interferența ei cu unghiul menționat să nu conțină nici un punct al lui K^*, ceea ce e posibil, întrucît K^* e o curbă simplă.

Considerăm un ε care să satisfacă atît la (10) cît și la

$$\varepsilon < \lambda. \tag{11}$$

Potrivit rezultatului de mai sus, pe dreapta (10') există un punct $\sigma^* \neq s^*$ al lui K^*, împotriva alegerii vecinătății $\mathcal{V}(s^*)$, conform căreia dreapta (10'), cu ε din (11), intră în interferența vecinătății cu unghiul precedent, unde nu sînt puncte ale lui K^*.

Rămîne deci indirect stabilit, că nici un segment $s^*\sigma^*$ nu intră în componenţa curbei K^*.

Această observaţie se completează cu următoarea :

Pentru un ε din (10), dreptele (10'), (10'') sînt străbătute de K^*.

Într-adevăr, să luăm în (10) două numere ζ, η cu

$$0 < \zeta < \varepsilon < \eta < M \tag{12}$$

şi să introducem dreptele

$$y - \eta x = 0, \quad (12') \qquad y + \eta x = 0, \quad (12'')$$

$$y - \zeta x = 0, \quad (\overline{12'}) \qquad y + \zeta x = 0. \quad (\overline{12''})$$

Aplicînd rezultatul de mai sus, privitor la existenţa unei intersecţii $\sigma^* \neq s^*$, conchidem, avînd în vedere (12), că în vecinătatea $\mathcal{V}(s^*)$, curba K^* taie laturile unghiului (12'), $(\overline{12'})$ *resp.* (12''), $(\overline{12''})$ în cîte un punct diferit de s^*. Fie σ'^* şi σ''^* acele puncte.

Din formula creşterilor finite, avem (5). Ţinînd seamă de continuitatea lui $x'(t)$ şi de (7), rezultă, că pentru o $\mathcal{V}(s^*)$ destul de restrînsă, interferenţa închiderii acestei vecinătăţi cu K^* e dată de reuniunea arcelor simple $s''^* s^*$, $s^* s'^*$, deschise la extremităţile accentuate, cuprinse în întregime în cadranul al doilea ($x < 0$, $y \geqslant 0$) *respectiv* în cadranul întîi ($x > 0$, $y \geqslant 0$). Aici $s^{(i)*}$ e un punct de pe arcul $s^*\sigma^{(i)*}$, $(i = 1, 2)$.

Pe de altă parte, citim pe (12), că orice semidreaptă din semiplanul $y \geqslant 0$, de coeficient unghiular $+e$ *resp.* $-e$, unde $\zeta \leqslant e \leqslant \eta$, taie pe K^* în vecinătatea $\mathcal{V}(s^*)$, şi anume, conform precizărilor de mai sus : în cadranul întîi *resp.* al doilea. Ca atare, arcul $s^*s'^*$ *resp.* $s^*s''^*$ taie laturile unghiului (12'), $(\overline{12'})$ *resp.* (12''), $(\overline{12''})$ şi străbate spaţiul acestui unghi. Însă semidreapta (10') *resp.* (10'') din $y \geqslant 0$ este interioară unghiului.

Rămîne astfel stabilit, că pentru o vecinătate destul de restrînsă dar altfel arbitrară $\mathcal{V}(s^*)$ există semidrepte (10') şi (10''), de coeficient unghiular în valoare absolută sub o margine M, funcţie de $\mathcal{V}(s^*)$, care străbat în $\mathcal{V}(s^*)$ curba K^*.

Să ne întoarcem la figura iniţială.

Fie χ tangenta în s la cercul γ iar χ_+ *resp.* χ_- cîte o semidreaptă dusă prin s (în semiplanul $y \leqslant 0$, unde se găseşte K) aşa încît să facă unghiuri de coeficient unghiular $-\xi$ *resp.* $+\xi$, în valoare absolută arbitrar de mic, cu axa x'^{or} pozitivă *resp.* negativă, de origină s şi de suport χ.

Executînd inversiunea de mai sus (de pol O şi putere $\overline{Os}^2$) dreptele χ, χ_+, χ_- se transformă în cercurile *) χ^*, χ_+^*, χ_-^* ce trec prin O şi $s^* = s$, de ecuaţii *respectiv*

$$x^2 + y^2 + 2\,\omega y = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2\,\omega\xi x + 2\,\omega y = 0, \qquad x^2 + y^2 + 2\,\omega\xi x + 2\,\omega y = 0,$$

$$\xi > 0, \quad \omega > 0,$$

unde $(0, -2\,\omega)$ sînt coordonatele lui O.

*) Evident $\chi = \delta$.

Un calcul ușor ne dă intersecția, diferită de s^*, a lui χ_+^* *resp.* χ_-^* cu dreapta (10′) *resp.* (10″). Coordonatele ei sînt

$$2\omega\frac{\xi-\varepsilon}{1+\varepsilon^2},\ 2\omega\frac{\xi-\eta}{1+\varepsilon^2}\varepsilon \qquad \textit{resp.} \quad 2\omega\frac{-\xi+\varepsilon}{1+\varepsilon^2},\ 2\omega\frac{-\xi+\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\varepsilon. \tag{13}$$

Vrem așa să arătăm, că există o vecinătate $\mathcal{V}(s^*)$ destul de mică, de exemplu un cerc de centru s^* și rază ρ, care lasă în afară punctele (13).

Pentru aceasta e de ajuns să ne aranjăm cu un ρ destul de mic, așa încît distanța lui s^* la punctele (13), — aceeași, — să fie dublul lui ρ. Condiția se scrie

$$\frac{|\xi-\varepsilon|}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}=r$$

unde, pentru simplificarea scrierii, am pus

$$\rho=\omega r.$$

Avem următoarea ecuație de gradul al doilea în ε, după ridicarea la pătrat a acestei condiții :

$$(1-r^2)\,\varepsilon^2-2\xi\varepsilon+\xi^2-r^2=0.$$

Aici, luînd pe r mai mic decît 1 iar pe ξ mai mic decît r, ecuația admite o rădăcină pozitivă și o rădăcină negativă. Rădăcina pozitivă este

$$\varepsilon=\frac{\xi+r\sqrt{1-r^2+\xi^2}}{1-r^2}.$$

Neglijînd sub radical termenul $-r^2+\xi^2<0$, obținem

$$\varepsilon<\frac{\xi+r}{1-r^2}. \tag{14}$$

Cum r e arbitrar de mic, să-l luăm așa încît $(1-r^2)\,M-r>0$. Atunci pe ξ, arbitrar de mic, îl luăm

$$\xi<(1-r^2)\,M-r \tag{14′}$$

$$\therefore\ \xi<M. \tag{15}$$

Avem pentru ε, din (14), (14′)

$$\varepsilon<M. \tag{16}$$

Deci, pentru o vecinătate (circulară) $\mathcal{V}(s^*)$, destul de mică, ne putem aranja cu o coardă (10′) *resp.* (10″), de origină s^*, din cercul χ_+^* *resp.* χ_-^*, mai lungă decît raza lui $\mathcal{V}(s^*)$, străbătută în interiorul lui $\mathcal{V}(s^*)$ de curba K^*. Pe de altă parte, în virtutea lui (15) și rezultatului general de mai sus, străbate de asemenea tangenta $y-\xi x=0$ *resp.* $y+\xi x=0$ la χ_+^* *resp.* χ_-^* într-un punct din $\mathcal{V}(s^*)$, diferit de s^*.

Am văzut însă, că în $\mathcal{V}(s^*)$, curba K^* trimite un arc simplu despărțit de cele două cadrane. Ca atare cercul χ_+^* *resp.* χ_-^* e străbătut de K^* în interiorul lui $\mathcal{V}(s^*)$.

Refăcînd înapoi inversiunea conchidem, că dreapta de sprijin χ în s la K este unic determinată, căci în fiecare vecinătate destul de mică $\mathcal{V}(s)$ există semidrepte ale semiplanului $y \leqslant 0$, destul de apropiate de semidreptele de origină s și suport χ (și anume de ecuații $y + \xi x = 0$, $y - \xi x = 0$), străbătute de K. E clar deci, că dreapta de sprijin în s la K e unică.

Potrivit observației din § 4, 3°, **M**, curba K rezultă „*cu tangentă*", în sensul definiției din § 3, 1°, **M**, în fiecare punct de sprijin s de pe K.

Cu aceasta axioma 1 e construită.

Dispunem deci de întreg cadrul teoremei II din § 4, 5°, **M**. Prin specializare putem enunța:

Teorema 1. *Întregul arc de cerc* sS, *ortogonal în* s *și* S *la* K, *reprezintă o* J-*geodetică atunci și numai atunci, cînd e în întregime cuprins în* J *iar* s, S *reprezintă mulțimile de sprijin ale oricărei perechi de puncte ale arcului.*

Geodeticile din această teoremă se numesc *totale.*

Definiție. *Numim* geodetică *a unei* J-*metrice* (*naturale*) *un arc de cerc, a cărui prelungire e ortogonală în* s *și* S *la* K, *maximal față de proprietatea ca toate perechile lui să admită pe* s *și* S *ca mulțimi de sprijin.* — Definiția e în acord cu teorema din § 4, 5°, **M**.

Definiție. *Zicem, că* J-*metrica* (*naturală*) *admite în punctul* A $\longrightarrow$ J *un* fascicol continuu de geodetice *cînd*

1*). *Prin* A *trec geodetice tangente oricărei direcții.*

2*). *Pentru direcții destul de apropiate arcele-suport* sS *nu au altă intersecție, decît* A.

Definiție. *În cazul* A = S $\longrightarrow$ K *fascicolul de geodetice se zice continuu, cînd prin fiecare element de contact de ordinul al doilea trece cîte o geodetică, cu puncte în orice vecinătate a lui* S.

Noțiunea de fascicol de geodetice poate fi descrisă în termeni intrinseci J-geometriei naturale, cînd geodeticile devin totale. În cazul geodeticelor parțiale o descriere aproape intrinsecă a fascicolului, constă în a înlocui cererea 2*) cu următoarea: arcele $s's''$ și $S'S''$ ale punctelor de sprijin sînt de același sens pe K.

2°. Caracterizarea cercului printre curbele K. Caracterizarea metricei lui Poincaré, printre J-metricile naturale, cu ajutorul fascicolului continuu de geodetice

Teoremă 1. *Presupunem* (ca peste tot în acest paragraf) *coeficientul unghiular al tangentei la* K *drept parametru global de derivabilitate; sau încă, mai tare, existența derivatelor continue, pînă la ordinul 2, în raport cu un parametru local.*

Dacă, în planul euclidian, J-metrica naturală a interiorului unei curbe simple, închise K, *admite un fascicol continuu de geodetice, atunci* K *e cerc iar* J*-metrica, însăși metrica lui Poincaré.*

Demonstrație. Fie A centrul fascicolului de geodetice.

Cazul $A = S \longrightarrow K$ e trivial. Luînd S ca pol al unei inversiuni, fascicolul continuu de geodetice se transformă în totalitatea dreptelor unui fascicol paralel, căci geodeticile sînt arce de cerc care au în S aceeași tangentă : normala la K.

Prin ipoteză, coordonatele carteziene $x(t)$, $y(t)$ ale punctului curent $s \neq S$ de pe K sînt derivabile o dată, cu continuitate. Luînd origina în S, citim pe formulele

$$x^* = \mu \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y^* = \mu \frac{y}{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

că $x^*(t)$, $y^*(t)$, coordonatele inversului s^* al lui s, sînt de asemenea derivabile o dată, cu continuitate.

Așadar, dispunînd de ordinea termenilor, cîtul diferențial $dy^* : dx^*$ e finit și bine determinat (altfel curba inversă K^*, și deci K, n-ar satisface la (1)) și egal cu cîtul $-\frac{d\xi}{d\eta}$ de pe dreapta fascicolului de paralele ce trece prin s^*. Ca atare, însemnînd cu c valoarea constantă a lui $-\frac{d\xi}{d\eta}$, conchidem la $\frac{dy^*}{dx^*} = c$. Formula creșterilor finite ne dă atunci, pentru două valori vecine ale lui x^* :

$$(y^* - y_0^*) : (x^* - x_0^*) = c.$$

Din aproape, în aproape, conchidem, că inversa K^* este o dreaptă și deci K, un cerc.

Presupunem acum

$$A \longrightarrow J.$$

Luînd A ca pol al unei inversiuni, însemnăm cu s^*, S^*, K^* imaginile lui s, S, K. Aici sS sînt punctele unde geodetica generală a fascicolului, taie ortogonal pe K.

Însemnăm cu x^*, y^* și X^*, Y^* coordonatele carteziene ale lui s^* și S^*. Luînd origina în A, citim pe formule analoage cu (1), că x^*, y^* și X^*, Y^* sînt o dată derivabile *), cu continuitate. Mai mult, tangenta la K^* e determinată în fiecare punct (iar în punctele s^*, S^*, chiar dreapta de sprijin, conform teoremei din 1°).

Geodeticele fascicolului se transformă, prin inversiune, în drepte s^*S^* ortogonale în s^*, S^* la curba K^*.

*) Deocamdată e de ajuns : o dată continuu derivabile în raport cu un *parametru local.*

La o eventuală schimbare $t = f(t)$ de parametru local, cu $f(t)$ derivabil și $f'(t) \neq 0$, putem realiza totdeauna, ca $\dot{x}^*$, $\dot{y}^*$ să nu fie amîndouă nule, căci K, și deci K^*, satisface la 1). Punem

$$X^* = x^* + \eta, \quad Y^* = y^* - \xi. \tag{2}$$

Întrucît vectorul s^*S^* e ortogonal pe tangenta, de exemplu, în s^*, avem

$$\xi = l\frac{\dot{x}^*}{\sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}}, \quad \eta = l\frac{\dot{y}^*}{\sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}}, \tag{3}$$

$$l = s^*S^*. \tag{4}$$

Putem restabili în cadrul acesta, mai general (diferențierea continuă pînă la primul ordin, inclusiv), proprietatea binecunoscută a traiectoriilor ortogonale.

Citim pe (2), că ξ și η sînt odată derivabile cu continuitate. Din (3) obținem

$$l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \tag{5}$$

Ca atare l admite de asemenea derivată continuă de primul ordin.

Pe de altă parte s^*S^* e dublu normală la K^*, așadar tangentele în s^*, S^* sînt paralele:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}^* + \dot{\eta} & \dot{y}^* - \dot{\xi} \\ \dot{x}^* & \dot{y}^* \end{vmatrix} = 0,$$

$$\therefore \qquad x^*\dot{\xi} + \dot{y}^*\eta = 0.$$

Înmulțind amîndoi membrii acestei egalități cu $l : \sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}$ și ținînd seamă de (3), găsim

$$\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} = 0$$

sau, în virtutea lui (5)

$$dl = 0,$$

pentru orice valoare a parametrului local t.

De aici, cu formula creșterilor finite, conchidem, din aproape în aproape

$$l = c^{te}. \tag{6}$$

Fie O^* mijlocul segmentului s^*S^*. Din (2) găsim pentru coordonatele acestui punct

$$\mathcal{X}^* = x^* + \frac{l}{2}\frac{\dot{y}^*}{\sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}}, \quad \mathcal{Y}^* = y^* - \frac{l}{2}\frac{\dot{x}^*}{\sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}} \tag{7}$$

unde, în virtutea lui (6):

$$\frac{l}{2} = c^{te}. \tag{8}$$

Considerăm ipoteza : față de coeficientul unghiular al tangentei, coordonatele pe K sînt odată derivabile, cu continuitate. Un calcul ușor arată că coordonatele pe K^* au aceeași proprietate. Din

$$\mathscr{X}^* = \frac{1}{2}(x^* + X^*), \quad \mathscr{Y}^* = \frac{1}{2}(y^* + Y^*) \tag{9}$$

reiese atunci, că $\mathscr{X}^*$, $\mathscr{Y}^*$, întocmai ca x^*, y^*, X^*, Y^* au derivate continue de primul ordîn, Ca atare, comparînd (7) cu (2), (3), (6) recunoaștem, că punctul O^*, întocmai ca s^*, descrie în planul euclidian o curbă închisă Ω^*, paralelă cu K^*, așadar admițînd tangentă în toate punctele ei nestaționare (în punctele unde cel puțin una din derivatele $\dot{\mathscr{X}}^*$, $\dot{\mathscr{Y}}^*$ e diferită de zero).

În ipoteza existenței pe K a derivatelor continue pînă la ordinul 2 inclusiv, în raport cu un parametru local dar altfel arbitrar t, concluzia nu se schimbă, după cum citim pe (2), (3), și (9).

Să demonstrăm că Ω^* se reduce la un singur punct.

Adoptăm, prin absurd, afirmația contrară, așadar existența a cel puțin unui interval $t' < t''$, unde $\dot{\mathscr{X}}^*$, $\dot{\mathscr{Y}}^*$ nu sînt amîndoi nuli.

Conform observației de mai sus, în fiecare astfel de interval $t' < t''$, curba Ω^* admite tangentă continuă,

Radicalul real $\sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}$ (sau, mai degrabă, forma diferențială invariantă $\sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}\, dt$) fiind peste tot nenul, elementul de contact din s^*, pe K^*, poate fi orientat, alegînd o determinație a radicalului și urmărind-o prin continuitate.

În virtutea paralelismului dintre K^* și Ω^*, avem

$$\dot{\mathscr{X}}^* = \varphi(t)\,\dot{x}^*, \quad \dot{\mathscr{Y}}^* = \varphi(t)\,\dot{y}^*, \qquad \varphi(t) \neq 0, \qquad t' < t < t''. \tag{10}$$

Definim semnul lui $\sqrt{\dot{\mathscr{X}}^{*2} + \dot{\mathscr{Y}}^{*2}}$ într-un punct, al intervalului punînd

$$\sqrt{\dot{\mathscr{X}}^{*2} + \dot{\mathscr{Y}}^{*2}} = |\,\varphi(t)\,| \sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}, \qquad t' < t < t''. \tag{11}$$

Rezultă formulele

$$\dot{\mathscr{X}}^* : \dot{\mathscr{Y}}^* : \sqrt{\dot{\mathscr{X}}^{*2} + \dot{\mathscr{Y}}^{*2}} = \zeta\dot{x}^* : \zeta\dot{y}^* : \sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}, \qquad t' < t < t'', \tag{12}$$

$$\zeta = sign\ \varphi(t). \tag{13}$$

Citim pe una sau alta din relațiile (10), că $\varphi(t)$ este, în intervalul $t' < t < t''$, cîtul a două funcțiuni nenule continue. Ca atare $\varphi(t)$ și $|\varphi(t)|$ sînt continue în acest interval. Deci, conform lui (11), semnul lui $\sqrt{\dot{\mathscr{X}}^{*2} + \dot{\mathscr{Y}}^{*2}}$, cunoscut într-un punct, poate fi urmărit prin continuitate în tot restul intervalului.

Alături de intervalele de felul $t' < t < t''$, avem de considerat intervalele eventuale $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, unde $\dot{x}^* = 0$, $\dot{y}^* = 0$. Acolo punctul O^* e staționar iar tangenta la Ω^*, nedeterminată.

Putem organiza însă un punct staționar O^* ca locul unor elemente orientate, de contact, cu centrul în O^* și paralele cîte unuia din elementele orientate, de contact, de pe K^*, în punctele s^* ale intervalului $t_1 < t < t_2$.

În felul acesta Ω^* e completată pînă la o continuitate de elemente de contact orientate, de primul ordin, cu centrele în punctele lui Ω^*. Într-un interval mixt $T' < T < T''$ cele două definiții ale orientării din $t' < t < t''$ și $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ se racordează, căci pentru intervalele $t_1 \leqslant t \leqslant t$: direct ; pentru intervalele $t' < t < t''$: prin mijlocirea lui (7), elementul de contact în $O^*(t)$ a fost definit ca paralel cu elementul de contact în $s^*(t)$. Avem deci de a face cu o determinare coherentă a orientării, care, dată într-un punct $O^*(T)$, cu $T' < T < T''$, poate fi urmărită prin continuitate în întreg acest interval, cu ajutorul lui (11) și al definiției orientării în intervalele $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Încă o precizare. Într-un interval $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ avem $\varphi(t) = 0$ unde $\varphi(t)$ e funcția analoagă aceleia din (10). În concordanță cu această observație, convenim să luăm rapoartele nedeterminate din primul membru din (10) egale cu corespunzătoarele lor din al doilea membru, unde punem

$$\zeta = 0.$$

Aceasta, pentru netezirea formulelor. Să trecem acum la altă ordine de idei.

Prin ipoteză, punctul A aparține unei geodetice, în accepțiunea dată acestui cuvînt la începutul aliniatului. Deci, conform teoriei din § 4, 5°, **M**, perechile de puncte infinit vecine A, $A + dA$ de pe arcul de cerc, suport al geodeticei, admit două cercuri ale lui Apollonius de nivel extrem, tangente la K în punctele de sprijin unice s, S.

Ținînd seamă de definiția dată fascicolului continuu de geodetice, conchidem că imaginile prin inversiunea de pol A, ale lui s, S, așadar punctele s^*, S^*, sînt perfect determinate prin condiția de a fi contacte unice ale unor tangente extreme la K^*, paralele cu o direcție arbitrară Δ (perpendiculară pe vectorul dA).

Fiecărei direcții Δ corespunde o singură pereche de puncte s^*, S^*.

Mijlocul O^* al segmentului s^*S^* se află între cele două tangente extreme din s^* și S^*. Comparînd, cu ajutorul unei translații, domeniile punctelor s^*, S^* de pe K^*, citim pe (2), (3), că sensurile pozitive pe normalele în s^* și S^* sînt opuse. Cum normalele în s^*, S^* coincid după aceeași dreaptă, conchidem că formulele (7), (8) se scriu, pentru S^*, cu semne schimbate la radicali :

$$x^* = X^* - \frac{l}{2}\frac{\dot{Y}^*}{\sqrt{\dot{X}^{*2} + \dot{Y}^{*2}}}, \quad y^* = Y^* + \frac{l}{2}\frac{\dot{X}^*}{\sqrt{\dot{X}^{*2} + \dot{Y}^{*2}}} \tag{7'}$$

$$l = e^{t\ddot{a}} \tag{8'}$$

Corespunzător lui (10), (11), (12), (13) avem încă

$$\dot{\mathscr{X}}^* = \Phi(t)\,\dot{X}^*,\quad \dot{\mathscr{Y}}^* = \Phi(t)\,\dot{Y}^* \tag{10'}$$

$$\Phi(t) \neq 0,$$

$$t' < t < t'',$$

$$\sqrt{\dot{\mathscr{X}}^{*2}+\dot{\mathscr{Y}}^{*2}} = |\,\Phi(t)\,|\,\sqrt{\dot{X}^{*2}+\dot{Y}^{*2}} \tag{11'}$$

$$\dot{\mathscr{X}}^* : \dot{\mathscr{Y}}^* : \sqrt{\dot{\mathscr{X}}^{*2}+\dot{\mathscr{Y}}^{*2}} = \mathscr{H}\dot{X}^* : \mathscr{H}\dot{Y}^* : \sqrt{\dot{X}^{*2}+\dot{Y}^{*2}} \tag{12'}$$

$$\mathrm{H} = \operatorname{sign}\Phi(t). \tag{13'}$$

În virtutea lui (12) *resp.* (12'), formula (7) *resp.* (7') ne dă, pentru un interval $t' < t < t''$:

$$x^* = \mathscr{X}^* - \frac{l}{2}\frac{\zeta\dot{\mathscr{Y}}^*}{\sqrt{\dot{\mathscr{X}}^{*2}+\dot{\mathscr{Y}}^{*2}}},\quad y^* = \mathscr{Y}^* + \frac{l}{2}\frac{\zeta\dot{\mathscr{X}}^*}{\sqrt{\dot{\mathscr{X}}^{*2}+\dot{\mathscr{Y}}^{*2}}} \tag{14}$$

$$X^* = \mathscr{X}^* + \frac{l}{2}\frac{\mathrm{H}\dot{\mathscr{Y}}^*}{\sqrt{\dot{\mathscr{X}}^{*2}+\dot{\mathscr{Y}}^{*2}}},\quad Y^* = \mathscr{Y}^* - \frac{l}{2}\frac{\mathrm{H}\dot{\mathscr{X}}^*}{\sqrt{\dot{\mathscr{X}}^{*2}+\dot{\mathscr{Y}}^{*2}}} \tag{14'}$$

unde, din compararea lui (9) cu (14), (14'), rezultă

$$\mathrm{H} = \zeta. \tag{15}$$

Cererea 2*) din definiția fascicolelor continue de geodetice n-a intervenit pînă acum. Transpunerea ei prin inversiunea de pol A e următoarea : segmentul s^*S^* e intersectat de pozițiile sale destul de vecine în interiorul lui K^*.

Să introducem pe K^* un sens de parcurs și ordinea indusă de acest sens, pentru arce. În virtutea cererii 2*), arcele descrise de s^* *resp.* S^* sînt funcții monotone de direcția Δ și anume : funcții într-adevăr uniforme, adică ne-ramificate, căci determinațiile s^*, S^* din cauza lui $s^*S^* = l \neq 0$ din (6), nu se confundă (în real) niciodată. Să admitem, prin absurd, că ar exista cel puțin un interval $t' < t''$.

Fie t_0 o valoare din $t' < t''$ și s_0^* poziția lui s^* pentru această valoare. Fie S_0^* poziția lui S^* corespunzătoare lui $s^* = s_0^*$. Potrivit constatării de mai sus, — că s^*, S^* sînt, pe K^*, funcții monotone distincte, de argument : direcția Δ, — cînd Δ execută o rotație continuă, perechea s^*S^* are sorți să se așeze peste perechea $s_0^*S_0^*$ (eventual, cu nucleele permutate) dacă s^* coincide cu s_0^* sau S_0^*. Cea mai apropiată eventualitate, în care această condiție necesară se realizează, este cînd s^* vine întîi în S_0^*, așadar cînd Δ s-a rotit de unghiul π. Condiția necesară e și suficientă, căci lui Δ îi corespunde o singură pereche de puncte s^*, S^*. Așadar, după rotirea lui Δ de unghiul π, avem în același timp

$$s^* = S_0^*,\quad S^* = s_0^*. \tag{16}$$

Dar t_0 aparține intervalului $t' < t''$, deci în (14), (14'), (15) avem

$$H = \zeta \neq 0. \tag{15'}$$

Comparînd (14), (14'), (15') cu (16), conchidem că radicalul $\sqrt{\dot{x}^{*2}+\dot{y}^{*2}}$, urmărit prin continuitate, după regula coherentă dată mai sus, a suferit o schimbare de semn.

Pe de altă parte, cînd Δ se rotește de unghiul π, punctul O^* epuizează toate pozițiile sale pe curba închisă Ω^*, (luîndu-le cel puțin odată). Deci, cum în ipoteza existenței unui interval $t' < t''$, curba Ω^* nu se reduce la un punct, imagina ciclică *) a completării ei pînă la o continuitate de elemente de contact, acoperă de un număr întreg (eventual nul, prin distrugere) de ori, ciclul. Ca atare $\sqrt{\dot{x}^{*2}+\dot{y}^{*2}}$ revine cu același semn.

Ne izbim de o contrazicere.

Existența intervalelor $t' < t''$ e infirmată. Rămîne indirect stabilit, că avem numai intervale $t_1 \leqslant t_2$, cu alte cuvinte, că punctul O^* este peste tot staționar. Deci K^* se confundă cu cercul de centru O^* și de rază $\frac{l}{2}$.

Curba inversă K rezultă cerc iar J-metrica naturală în raport cu K, metrica lui Poincaré clasică (vezi**) § 1, F).

Cu aceasta totul e dovedit.

3°. Demonstrație simplificată, în ipoteze mai restrictive

Să presupunem, pe lîngă ipotezele din enunț, că curba K admite derivate continue pînă la ordinul trei, inclusiv, în raport cu parametrul t.

Citim atunci pe (2), (3), din 2° că există punct caracteristic Σ^* pe fiecare dreaptă s^*S^*. În virtutea cererii 2 *), transpusă prin aceeași inversiune, Σ^* se găsește în interiorul curbei K^*.

Coordonatele lui Σ^* depind de coordonatele lui s^* și derivatele lor pînă la ordinul doi inclusiv. Elementul de arc depinde și de derivatele terțe.

Un calcul cunoscut ne dă pentru elementul de arc $d\sigma$ al curbei descrisă de Σ^*:

$$d\sigma = d(\Sigma^* s^*), \tag{1}$$

unde se găsește ușor

$$\Sigma^* s^* = 1 : (\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi), \tag{2}$$

cu notația

$$\xi = \dot{x}^* : \sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}, \quad \eta = \dot{y}^* : \sqrt{\dot{x}^{*2} + \dot{y}^{*2}}.$$

În (2) numitorul e totdeauna diferit de zero, căci Σ^* rămîne în interiorul curbei K^* și deci $\Sigma^* s^*$ e finit.

---

*) Mulțimea punctelor de contact ale semidreptelor tangente la un ciclu, duse paralel cu tangentele orientate la Ω^*.

**) Notăm, pe scurt, prin F al doilea articol al nostru „Fundamentele Metricilor lui Poincaré-Carathéodory " din această revistă, anul X, nr. 2.

Avem, din (2)

$$d(\Sigma^\star s^\star) : dt = (\ddot{\eta}\xi - \ddot{\xi}\eta) : (\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi)^2.$$

Ținînd seamă de ipoteză, citim pe această formulă că $d(\Sigma^\star s^\star) : dt$, adică $d\sigma : dt$ e funcție continuă. Ca atare, curba $(\Sigma^\star)$ e rectificabilă.

Fie deci $\mathcal{L}^\star$ lungimea curbei închise $(\Sigma^\star)$. Cînd Δ se rotește de unghiul π, perechea $s^\star S^\star$ coincide pentru prima dată cu ea însăși, dar cu punctele permutate (vezi argumentul din soluția precedentă). Punctul $\Sigma^\star$ a epuizat toate pozițiile pe $(\Sigma^\star)$, luîndu-le însă pe fiecare o singură dată.

Într-adevăr, tangenta în fiecare punct $\Sigma^\star$ e determinată : coincide cu dreapta $s^\star S^\star$. Unei direcții Δ îi corespunde o singură pereche de puncte $s^\star S^\star$. Deci, dacă $\Sigma^\star$ ar trece de două ori prin aceeași poziție, ar reveni cu aceeași tangentă și deci ar urma ca o anumită pereche $s^\star S^\star$ să fie regăsită înainte ca Δ să se fi rotit de un unghiu π, ceea ce (vezi prima soluție) este exclus.

Încît, integrînd în (1) de la zero, la π, obținem

$$\mathcal{L}^\star = \Sigma^\star S^\star - \Sigma^\star s^\star. \tag{3}$$

Continuînd rotirea lui Δ de încă un unghi π și integrînd din nou (de data aceasta pornind de la poziția răsturnată $S^\star s^\star$ a lui $s^\star S^\star$, găsim

$$\mathcal{L}^\star = \Sigma^\star s^\star - \Sigma^\star S^\star. \tag{3'}$$

Din (3), (3') rezultă

$$2\mathcal{L}^\star = 0,$$

așadar curba $(\Sigma^\star)$ se reduce la un punct. Ca atare $K^\star$ e traiectoria ortogonală a unui fascicol de drepte. Deci, un cerc.

Restul, ca în aliniatul 2°.

§ 2. GEOMETRIILE FINSLERIENE NATURALE

1°. Metricile finsleriene induse de o J-metrică naturală

Fie K o curbă simplă, închisă, înzestrată peste tot cu tangentă iar J domeniul ei interior.

Definiție. *Numim cercuri extreme ale elementului de contact* A, dA *din* J, *cele două cercuri de rază minimă tangente în* A *elementului* δA *perpendicular pe* dA *și care ating curba* K.

În fond : chiar pozițiile-limită ale celor două cercuri ale lui Apollonius, de nivel extrem, corespunzătoare perechii A, $A + dA$, cînd dA tinde către zero, de-a lungul unei direcții fixe.

Existența acestor „traiectorii ale lui Apollonius de nivel extrem" și legătura lor cu punctele de sprijin, poate fi preluată din § 4, **M**, aliniatele 2° și 3°.

Trecînd la limită, conchidem la existența celor două cercuri extreme ale elementului de contact A, dA, situate de o parte și de alta a segmentului A, $A + \delta A$.

T e o r e m ă. *În mic, distanța* J*-metricei naturale din interiorul* J *al curbei* K, *coincide cu elementul finslerian de arc*

$$ds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) d\sigma = \mathcal{L}(x, y; \dot{x}, \dot{y})\, dt,$$

unde $d\sigma$ *este elementul de arc euclidian iar*

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) = F\left(x, y, \frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right),$$

suma curburilor cercurilor extreme corespunzătoare elementului de contact de centru (x, y) *și direcție* $(\dot{x}\,dt, \dot{y}\,dt)$.

Această metrică o numim J*-metrică finsleriană naturală.*

Demonstrație. Fie A, B două puncte vecine din J iar (a_1, a_2), (b_1, b_2), coordonatele lor carteziene.

Un cerc al lui Apollonius relativ la punctele A, B are o ecuație de forma

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 - \lambda\{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2\} = 0.$$

Aici $\sqrt{\lambda}$ este tocmai valoarea influenței, cînd $P(x, y)$ se găsește pe K.

Găsim pentru raza ρ a acestui cerc

$$\rho = \frac{\lambda}{(1 - \lambda)^2}\{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\}. \tag{1}$$

Influența, în J-metrica naturală, este raportul distanțelor euclidiene $PA : PB$, cu $P \in K$. Specializînd rezultatele din § 4, 1°, **M** și § 4, 2°, **M**, conchidem că maximum $\mathcal{M}$ și minimum m al acestei influențe este realizat în contactele S și s ale cercurilor lui Apollonius de nivel extrem, relative la perechea A, B, cu curba K.

Fie R și r razele acestor cercuri. Valorile

$$\mathcal{M} = SA : SB \quad resp. \quad m = sA : sB$$

se obțin rezolvînd ecuațiile în λ, obținute punînd în (1):

$$\rho = R \qquad \text{resp.} \qquad \rho = r$$

$$\frac{1 + \mathcal{M}}{1 - \mathcal{M}} = \pm\frac{\sqrt{c^2 + 4R^2}}{c} \quad \text{resp. (3)} \quad \frac{1 + m}{1 - m} = \pm\frac{\sqrt{c^2 + 4r^2}}{c} \tag{2}$$

unde

$$c = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Dar, prin chiar natura problemei, $\mathcal{M}$ *resp.* m este un număr pozitiv supraunitar *resp.* subunitar. Deci în fața radicalului din (2) *resp.* (3) trebuie luat semnul $-$ *resp.* $+$. În definitiv, obținem

$$\mathcal{M} = 1 + \frac{2c}{-c + \sqrt{c^2 + 4R^2}} \tag{2'}$$

resp.

$$m = 1 - \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4r^2}}. \tag{3'}$$

Luînd $B = A + dA$ şi însemnînd cu $d\sigma$ elementul de arc euclidian, obţinem din (2') *resp.* (3'), în afara infiniţilor mici de ordin doi :

$$L\mathcal{M} = \frac{2d\sigma}{-d\sigma + \sqrt{d\sigma^2 + 4R^2}} \tag{2''}$$

resp.

$$Lm = \frac{-2d\sigma}{d\sigma + \sqrt{d\sigma^2 + 4\sigma r^2}} \tag{3''}$$

sau încă, în aceeaşi aproximaţie :

$$L\mathcal{M} = \frac{d\sigma}{R} \tag{2'''}$$

resp.

$$Lm = -\frac{d\sigma}{r} \tag{3'''}$$

Aici $d\sigma$ înlocuieşte pe c, calculat pentru A, $A + dA$. Numerele R şi r înseamnă razele cercurilor extreme, relative la elementul de contact $(x, y ; \dot{x}dt, \dot{y}dt)$, în virtutea definiţiei acestor cercuri dată la începutul aliniatului.

Să însemnăm cu ds exhaustia J-distanţei, adică valoarea ei pentru perechea A, $B = A + dA$ de puncte infinit-vecine. Din (2''') şi (3''') conchidem

$$ds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) d\sigma \tag{4}$$

unde, prin chiar natura problemei, avem în

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)\frac{d\sigma}{dt} = F\left(x, y, \frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \mathcal{L}(x, y ; \dot{x}, \dot{y})$$

o funcţie pozitivă de x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ omogenă de primul grad în $\dot{x}$, $\dot{y}$. Încît (4) se dovedeşte de forma elementului de arc finslerian

$$ds = \mathcal{L}(x, y ; \dot{x}, \dot{y})\, dt. \tag{4'}$$

Relaţiile (4), (4') demonstrează teorema.

2°. Ipoteza derivabilităţii duale. Cerc transvers

Fie $\mathcal{U}(P_0)$ o vecinătate arbitrară a unei curbe plane iar

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

o reprezentare parametrică valabilă în $\mathcal{U}(P_0)$

D e f i n i ț i e. *Curba se zice dual derivabilă cînd* :

1) *e continuu (punctual) derivabilă, așadar cînd în* $\mathcal{U}(P_0)$ *derivatele* $f'(t)$, $g'(t)$ *există, sînt continue și nu simultan nule* ;

2) *e tangențial derivabilă, adică limita intersecției tangentelor în* P_0 *și* $P \in \mathcal{U}(P_0)$ *există și coincide cu un contact al tangentei fixe (eventual multiplă).*

E clar, că *pe orice curbă diferită de o dreaptă* (punctual), *derivabilă pînă la ordinul doi inclusiv, derivabilitatea dual ă e construită.*

Iată însă *condiții mai slabe, în care derivabilitatea dual ă poate fi construită* :

1) = *a) Derivabilitatea punctual ă (continuă).*

b) În orice interval $u \leqslant t_0 \leqslant v$ *din vecinătatea* $\mathcal{U}(P_0)$, *al parametrului t, cîtul*

$$\chi = \begin{vmatrix} f'(t_0) & f'(t_1) \\ g'(t_0) & g'(t_2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f'(t_0) & f'(t) \\ g'(t_0) & g'(t) \end{vmatrix},$$

$$t_0 < t_1 < t, \qquad t_0 < t_2 < t,$$

rămîne în valoarea absolută sub o anumită margine.

Cererea 1) fiind comună trebuie arătat, numai, că $a + b$ implică 2). Considerăm ecuațiile parametrice ale tangentelor în t_0 și t (vecinătatea $\mathcal{U}(P_0)$) :

$$x = \lambda_0 f'(t_0) + f(t_0), \qquad x = \lambda f'(t) + f(t),$$
$$y = \lambda_0 g'(t_0) + g(t_0), \qquad y = \lambda g'(t) + g(t),$$

unde λ_0 și λ sînt doi parametri variabili. Presupunem că x, y sînt chiar coordonatele intersecției acestor tangente. Eliminînd pe x, y și aplicînd formula creșterilor finite, obținem

$$\lambda_0 f'(t_0) - \lambda f'(t) + (t_0 - t) f'(t_1) = 0, \quad \lambda_0 g'(t_0) - \lambda g'(t) + (t_0 - t) g'(t_2) = 0.$$
$$t_0 < t_1 < t \qquad , \qquad t_0 < t_2 < t$$

Rezultă, prin eliminarea lui λ :

$$\lambda_0 = (t_0 - t)\chi,$$

unde χ e numărul din cererea *b*. Deci, în virtutea acestei cereri, limita lui λ_0 pentru $t \to t_0$, există și e egală cu zero. Pe de altă parte valorile lui $f'(t_0)$, $g'(t_0)$ sînt, prin ipoteză, finite. Citim, atunci, pe cea dintîi din reprezentările parametrice precedente, că limita intersecției celor două tangente există și coincide cu contactul $f(t_0)$, $g(t_0)$ al tangentei fixe.

Așadar, într-adevăr, $a + b$ implică 1) + 2).

L e m a I (a resolubilității). *O curbă continuu punctual-derivabilă și închisă e resolubilă. Aceasta înseamnă, că dacă două tangente (eventual multiple) sînt : una, limita celeilalte, atunci cel puțin un punct de contact al primei e limita unui punct de contact al celei de a doua.*

Demonstrație. Prin ipoteză, există o infinitate de tangente în puncte P ale curbei, ai căror coeficienți esențiali din ecuațiile carteziene respective, se apropie și au ca limită coeficienții esențiali ai ecuației tan-

gentei în P_0. Să însemnăm cu Π_0 un punct-limită al mulțimii infinite (P) de pe curba închisă K. Scriind ecuația tangentei în $P \to \mathcal{U}(\Pi_0)$ în funcție de parametrul local t, al vecinătății, recunoaștem, în virtutea ipotezei derivabilității continue, punctuale, că coeficienții ei esențiali diferă cu numere infinit mici, de aceia ai tangentei în Π_0. În definitiv, coeficienții esențiali ai tangentei T în P diferă cu numere infinit mici de coeficienții esențiali ai tangentelor fixe T_0 și Ξ_0 respectiv în P_0 și Π_0. Prin urmare coeficienții esențiali ai lui T_0 și Ξ_0 diferă prin numere infinit mici. Conchidem $T_0 = \Xi_0$. Deci contactul P al lui T tinde către un contact Π_0 al lui T_0.

L e m a II. *Fie K o curbă simplă, închisă, continuu punctual derivabilă iar $H \subset J$ o regiune a interiorului ei.*

Admitem, că inversele $K^\star$ ale lui K, în raport cu punctele $A \in H$ luate ca poluri, sînt tangențial — (și deci dual — *derivabile*).

Considerăm un element de contact A, dA din H și mulțimile de sprijin (s), (S) ale cercurilor extreme relative la acest element de contact.

Afirmăm, că din mulțimile (s), (S) putem extrage cîte un punct bine determinat s^ε, S^ε, definit ca limita intersecției unui cerc extrem cu poziția sa infinit-vecină, obținută prin rotirea la stînga ($\varepsilon = -$) sau la dreapta ($\varepsilon = +$) a direcției dA a elementului de contact.

Demonstrație. Într-adevăr, să aplicăm o inversiune de pol A. E clar că imaginea $K^\star$ a lui K e o curbă simplă, închisă și, asemenea lui K, continuu punctual-derivabilă. Ținînd seamă de ipoteza din enunț, $K^\star$ rezultă dual-derivabilă.

Cercurile extreme ale lui A, dA se transformă în două tangente extreme, paralele $d^\star$, $D^\star$, avînd în comun cu $K^\star$ numai contactele $(s^\star)$, $(S^\star)$, imagini ale lui (s), (S), — vezi § 4, 3°, **M**. Cum $K^\star$ e închisă, avem deci două și numai două tangente extreme, paralele cu o direcție dată.

Fie $d^{\star\varepsilon}$, $D^{\star\varepsilon}$ tangentele extreme corespunzătoare direcției perpendiculare pe direcția $(dA)^\varepsilon$, infinit vecină (în sensul ε) lui dA. Întrucît $K^\star$ este închisă, $d^{\star\varepsilon}$ și $D^{\star\varepsilon}$ tind către două poziții fixe, pentru $(dA)^\varepsilon \to dA$. Dar există numai două tangente extreme perpendiculare pe dA. Ca atare $d^{\star\varepsilon}$, $D^{\star\varepsilon}$ tind respectiv către $d^\star$, $D^\star$.

Sîntem în condițiile definiției derivabilității tangențiale (aplicată lui $K^\star$). Așadar intersecția perechii de drepte $d^{\star\varepsilon}$, $d^\star$ *resp.* $D^{\star\varepsilon}$, $D^\star$ tinde către un contact bine determinat $s^{\star\varepsilon}$ *resp.* $S^{\star\varepsilon}$ al lui $d^\star$ *resp.* $D^\star$.

Refăcînd înapoi inversiunea, regăsim concluzia lemei.

D e f i n i ț i e. *Fie K o curbă simplă, închisă, continuu punctual-derivabilă iar $H \subset J$ o regiune în condițiile lemei II de mai sus. Notațiile fiind cele din lema II, numim* cerc transvers *stîng* ($\varepsilon = -$) resp. *drept* ($\varepsilon = +$) *în punctul A, cercul*

$$\tau^\varepsilon = s^\varepsilon A S^\varepsilon, \qquad \varepsilon = - \text{ resp. } \varepsilon = +.$$

D e f i n i ț i e. Modificînd puțin noțiunea bine cunoscută din geometria finsleriană, introducem noțiunea de *direcție transversă de lateralitate* ε.

În tot acest aliniat și în cele următoare, presupunem că *funcția omogenă* $\mathcal{L}$ din expresia (4′), 2° a elementului de arc finslerian :

$$ds = \mathcal{L}(x, y ; \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

desomogeneizată : $F\left(x, y, \frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right) = \frac{1}{\dot{y}}\,\mathcal{L}(x, y\,;\, \dot{x}, \dot{y})$ admite derivate la stînga şi la dreapta în raport cu $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$; sau, ceea ce e tot una, că $\mathcal{L}(x, y\,;\, \dot{x}, \dot{y})$ *admite derivate parţiale la stînga şi la dreapta în raport cu* $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Însemnăm cu $\frac{\partial_\varepsilon}{\partial_\varepsilon \dot{x}}\mathcal{L}$, $\frac{\partial_\varepsilon}{\partial_\varepsilon \dot{y}}\mathcal{L}$ aceste derivate parţiale la stînga ($\varepsilon = -$) *resp.* dreapta ($\varepsilon = +$).

Direcţia transversă $\frac{d_\varepsilon y}{d_\varepsilon x}$ *de lateralitate stîngă* ($\varepsilon = -$) *resp. dreaptă* ($\varepsilon = +$) *a elementului de arc finslerian* $ds = \mathcal{L}(x, y\,;\, \dot{x}, \dot{y})\,dt$ *e definită de relaţia*

$$\frac{\partial_\varepsilon \mathcal{L}}{\partial_\varepsilon \dot{x}} d_\varepsilon x + \frac{\partial_\varepsilon \mathcal{L}}{\partial_\varepsilon \dot{y}} d_\varepsilon y = 0. \tag{1}$$

În sfîrşit, *numim curbură transversă mijlocie a elementului de arc finslerian corespunzător unei J-geometrii naturale, media aritmetică*

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right), \tag{2}$$

unde R şi r *sînt razele cercurilor extreme asociate elementului de contact* $(x, y\,;\, \dot{x}, \dot{y})$ *din* $H \subset J$.

T e o r e m ă. *Dacă curbura transversă mijlocie a unei J-geometrii finsleriene naturale admite derivată stîngă* $\varepsilon = -$ resp. *dreaptă* $\varepsilon = +$, *atunci direcţia transversă* $\frac{d_\varepsilon y}{d_\varepsilon x}$ *coincide cu direcţia ortogonală la cercul transvers* τ^ε, *de aceeaşi lateralitate* ε, *în centrul elementului de arc.*

Demonstraţie. Punem

$$\operatorname{tg}\,\theta = \dot{y} : \dot{x}.$$

Citim pe (4), (4′) din 1° :

$$\mathrm{M} = f(x,\ y,\ \theta).$$

Prin ipoteză, $f(x, y, \theta)$ admite derivată laterală ε în raport cu θ.

Pentru simplificare, vom scrie peste tot, în calculul de mai jos, d în loc de d_ε ($\varepsilon = \mp$). În modul acesta, ţinînd seamă de (5″) din 2° şi de (2), relaţia (1) se scrie dezvoltat :

$$\left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\frac{d\mathrm{M}}{d\theta}\cdot\frac{-\frac{\dot{y}}{\dot{x}^2}}{1+\frac{\dot{y}^2}{x^2}} + \mathrm{M}\,\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)dx$$

$$+\left(\sqrt{\dot{x}^2 + y^2}\,\frac{d\mathrm{M}}{d\theta}\cdot\frac{\frac{1}{\dot{x}}}{1+\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}} + \mathrm{M}\,\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)dy = 0$$

De aici deducem

$$\therefore \frac{dM : d\theta}{M} = \frac{\dot{x}dx + \dot{y}dy}{\dot{y}dx - \dot{x}dy} \tag{3}$$

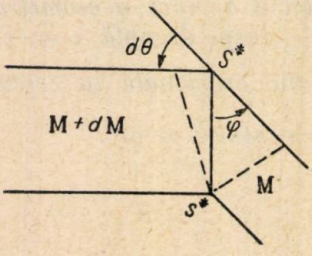
Să executăm o inversiune de pol A şi de putere 1.

Cercurile extreme ale elementului de contact $(x, y ; \dot{x}, \dot{y})$ se transformă în două tangente paralele ale inversei K^* a curbei K, de direcţie perpendiculară pe direcţia $\dot{y} : \dot{x}$. Aceste paralele conţin punctul A în banda lor, la distanţe respectiv egale cu $\frac{1}{2r}$ şi $\frac{1}{2R}$. E clar, că M din (2) reprezintă lărgimea bandei.

Să dăm lui θ variaţia unilaterală $d\theta$ (în realitate, $d_\varepsilon\theta$) din (3). Tangentele paralele de mai sus intersectează poziţiile lor infinit-vecine, corespunzătoare acestei variaţii, în transformatele $S^{*\varepsilon}$, $s^{*\varepsilon}$ ale punctelor de sprijin S^ε, s^ε. Introducem şi aici aceeaşi simplificare şi punem S, s, S^*, s^* pentru S^ε, s^ε, $S^{*\varepsilon}$, $s^{*\varepsilon}$ iar pentru cercul transvers τ^ε determinat de $S^\varepsilon As^\varepsilon$, punem τ.

Avem figura alăturată, unde φ înseamnă unghiul sub care τ (reprezentat, după inversiune, de dreapta S^*s^*) taie curba K sau, ceea ce e totuna, cercurile extreme.

Din triunghiuri dreptunghice uşor de recunoscut pe figură, rezultă :



$$S^*s^* = \frac{M}{\sin\varphi} = \frac{M + dM}{\sin(\pi - \varphi - d\theta)}$$

$$\therefore \frac{M + dM}{M} = \frac{\sin(\varphi + d\theta)}{\sin\varphi} \tag{4}$$

$$\therefore \frac{dM : d\theta}{M} = \operatorname{cotg}\varphi.$$

Să observăm că unghiurile de tăiere φ, $d\theta$ ale liniilor drepte din figura inversată, reprodusă alăturat, sînt direct egale unghiurilor pe care omoloagele lor, cercuri, le pun în evidenţă în jurul polului A, în figura originară. Din (3) şi (4) urmează atunci

$$\frac{\dot{x}dx + \dot{y}dy}{\dot{y}dx - \dot{x}dy} = \operatorname{cotg}\varphi, \tag{5}$$

unde φ e unghiul pe care cercul tranvers τ îl face în A cu cercurile extreme (sensul direct).

Însemnînd chiar cu τ^ε (sau, consecvent simplificării scrierii, cu τ) *resp.* α coeficientul unghiular al tangentei la τ *resp.* la cercurile extreme din A, formula (5) devine

$$\frac{\dot{x}dx + \dot{y}dy}{\dot{y}dx + \dot{x}dy} = \frac{1 + \alpha\tau}{\alpha - \tau}.$$

De aici, prin transformări elementare, găsim

$$\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - \alpha\right)\left(1 + \frac{dy}{dx}\tau\right) = \left(1 + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\alpha\right)\left(\frac{dy}{dx} - \tau\right). \tag{6}$$

Dar, prin construcție

$$1 + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\alpha = 0 \tag{6'}$$

și deci, în real :

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \neq \alpha \tag{6''}$$

așadar, restabilind notația (punînd din nou $d_\varepsilon x$, $d_\varepsilon y$, τ^ε pentru dx, dy, τ), deducem din (6), (6'), ținînd seamă de (6'')

$$1 + \frac{d_\varepsilon y}{d_\varepsilon x}\tau^\varepsilon.$$

Citim pe această relație, că direcția transversă $\frac{d_\varepsilon y}{d_\varepsilon x}$ e ortogonală cercului transvers în centrul A al elementului de arc.

Cu aceasta totul e demonstrat.

Putem da cercului transvers o definiție conformă, în care să nu figureze decît unghiurile de tăiere.

Se recunoaște mai întîi, pe cale elementară, că punctul de contact al cercurilor tangente în punctele fixe s și S și tangente între ele într-un punct mobil $\mathfrak{A}$ admit ca loc geometric al lui $\mathfrak{A}$ cercul sAS unde A este o poziție particulară a lui $\mathfrak{A}$.

Unghiul sub care elementul de contact al celor două cercuri (sau ortogonalul sau : $\mathfrak{A}$, $d\mathfrak{A}$) îl face cu cercul sAS e constant.

Din aceste observații conchidem că sAS este cerc transvers pentru o infinitate de elemente de contact $\mathfrak{A}$, $d\mathfrak{A}$ din J : toate acelea pentru care s, S continuă să fie puncte de sprijin (de același indicator ε).

În virtutea teoremei de mai sus, cercul transvers e ortogonal direcției transverse a elementului de contact. Confruntînd acest rezultat cu observația de mai sus, urmează că direcțiile transverse taie direcțiile elementelor de contact $\mathfrak{A}$, $d\mathfrak{A}$ sub un unghi constant, variabil cu cercul transvers.

Pentru o valoare dată a unghiului, determinarea cercului transvers depinde deci de rezolvarea unei ecuații diferențiale de primul ordin. Cum cercurile transverse, potrivit generării lor prin contactele cercurilor de nivel, depind în totul de 2 constante arbitrare (pozițiile lui s și S), e clar că aceste cercuri coincid local cu soluțiile familiei de ecuații diferențiale menționate.

Ajungem deci la această

Definiție conformă. *Cercurile transverse coincid cu liniile de-a lungul cărora un anume element de contact taie direcția transversă sub un unghi constant.*

În modul acesta putem extinde noțiunea de *linie transversă* unor anumite J-geometrii (nu numaidecît naturale), ceea ce pentru caracterizarea funcțiunii reprezentării, a lui Riemann, din viitorul nostru articol este de prima importanță.

Fie k o curbă simplă închisă, satisfăcînd la aceleași ipoteze de derivabilitate ca curba K din acest paragraf. Fie j interiorul ei iar $f(z)$ o funcție analitică regulată în j iar pe k numai continuă.

Influența $\left|\frac{f(z_1)}{f(z_2)}\right|$ înzestrează regiunea h cu o J-distanță a cărei exhaustie conduce la o metrică finsleriană.

D e f i n i ț i e, *Numim linie transversă un arc din h de-a lungul căruia anumite elemente de contact taie sub un unghi constant, dar altfel arbitrar, direcțiile transverse ale J-metricei finsleriene generate de $f(z)$.*

Punînd $Z = f(z)$, e clar, că în interiorul contra-imaginei J a lui j, metrica devine naturală. Liniile transverse au, în virtutea definiției lor conforme, cercurile transverse din J drept contra-imagini.

3° Definiția geodeticilor în termenii J-geometriilor generale

Definiția din 1° a geodeticilor folosește particularitățile J-geometriilor naturale. Importă să dăm o altă definiție, în termenii J-geometriilor generale și care, în cadrul J-geometriilor naturale, să coincidă cu definiția din 1°.

D e f i n i ț i e. *Numim geodetică a unei J-geometrii, un arc deschis din J, maximal față de următoarele două cereri :*

1) *J-distanța se comportă aditiv de-a lungul arcului* ;

2) *arcul este organizat de J-distanță în imagine isometrică a unui segment de dreaptă euclidiană.*

Facem deocamdată abstracție de maximalitatea arcului, afirmată în cele două definiții și demonstrăm echivalențele în amîndouă sensurile pentru definițiile astfel lărgite.

Să arătăm, întîi, că definiția de mai sus implică definiția din 1°, în cadrul J-geometriilor naturale.

Mărginind considerațiile din demonstrația teoremei I, § 4, 5° **M**, de la J-geodetica întreagă, la un arc în condițiile 1) + 2) ale definiției de mai sus, conchidem, că arcul aparține unui cerc dublu-ortogonal în s, S la K, ale cărui toate perechi de puncte au mulțimi de sprijin reduse respectiv la s, S.

Argumentul complet e următorul : orice pereche de puncte ale arcului, din definiția de mai sus, reprezintă, conform cererii 2), extremitățile unui segment isometric cu un segment de dreaptă euclidiană. Deci există puncte isometric-interioare acelor extremități. După cum se arată în demonstrația teoremei I, § 4, 5°, **M**, atît e de ajuns, ca mulțimile de sprijin ale perechii considerate să se reducă la cîte un punct s, S. Înlocuind cuvîntul *„linie a lui Apollonius"* prin *„cerc"*, obținem din teorema I, § 4, 5°, **M**, tocmai proprietatea de definiție din 1°.

Să arătăm, că definiția din 1° implică definiția de față.

Dacă în demonstrația teoremei II, § 4, 5°, **M**, mărginim considerațiile, de la întreaga linie a lui Apollonius (întregul cerc) s S, la un subarc în condițiile definiției 1°, conchidem, că J-distanța se comportă aditiv de-a lungul arcului și îl organizează ca imagină isometrică a unui segment de dreaptă euclidiană. Obținem așadar proprietățile 1) + 2) din definiția de mai sus.

Din existența acestei echivalențe a definițiilor, liberate de cererea maximalității arcului, rezultă însă echivalența definițiilor complete. Într-adevăr, e clar că un arc maximal față de cererile uneia din definiții, e maximal și față de cererile cuprinse în cealaltă definiție.

§ 3. PROBLEMA GEODETICILOR J-GEOMETRIILOR FINSLERIENE NATURALE

1°. Încadrarea geodeticilor printre geodeticile finsleriene ale unei J-geometrii naturale

D e f i n i ț i e. *Numim geodetică finsleriană (a unei J-geometrii naturale) o curbă din J care face minimă integrala elementului de arc finslerian* :

$$\int \mathcal{L}\, dt$$

sau, mai precis, (cu formula (5″) din 2° și notația (2) din 3°), *integrala*

$$2\int \mathrm{M}\, ds$$

unde ds e elementul de arc euclidian.

E clar că *geodeticile unei J-geometrii naturale intră printre geodeticile finsleriene corespunzătoare.* Într-adevăr, în virtutea aditivității, din definiția § 2, 3° a J-distanței de-a lungul geodeticei, integrala $\int \mathcal{L}dt$ luată pe un arc de geodetică coincide cu J-distanța (AB) a extremităților arcului. În virtutea axiomei triunghiului, urmează atunci, că integrala $\int \mathcal{L}dt$, luată de-a lungul unui arc (AB) de geodetică, e mai mică sau cel mult egală cu integrala luată de-a lungul oricărui alt arc din J, de aceleași extremități.

Se ridică întrebarea : *în ce mod pot fi caracterizate geodeticile unei J-geometrii naturale, printre geodeticile geometriei finsleriene asociate,* folosind limbajul intrinsec al acesteia din urmă.

La această întrebare răspund teoremele de mai jos.

Ipoteza (formulată și în § 2, 2°), comună tuturor aliniatelor, este *derivabilitatea parțială, pînă la ordinul* 1 *inclusiv, atît stîngă cît și dreaptă, a curburii transverse mijlocii* M, *în raport cu* $\dot{x}$, $\dot{y}$. Aceasta ne permite să vorbim de direcția transversă. În enunțurile de mai jos, ipoteza nu va mai fi menționată. Ne mărginim s-o înscriem aici.

T e o r e m ă. *Geodeticile* J*-geometriei naturale în raport cu o curbă închisă* K, *odată derivabilă*[1]) *intră printre curbele geometriei finsleriene naturale, de-a lungul cărora tangenta e ortogonală direcției transverse. Aceste geodetice sînt arce deschise de cerc, de două ori ortogonale curbei* K.

Demonstrație. Fie BC un arc de geodetică iar A unul din punctele sale interioare. Însemnăm cu dA o deplasare infinit mică a lui A pe geodetică.

Conform definiției din § 2, 3° a geodeticei, mulțimile de sprijin ale perechii A, $A + dA$ se reduc la cîte un punct s, S. Deci definiția din § 2, 3° a cercului transvers e independentă, în cazul de față, de ipoteza b, necesară pentru a distinge între cercul transvers stîng și drept. Aici avem un singur cerc transvers

$$\tau = sAS.$$

Dar, potrivit aceleiași definiții din § 2, 3°, arcul de geodetică BC e un sub-arc al arcului de cerc $sBCS$. Prin urmare

$$A \longrightarrow sBCS,$$

încît cercul transvers τ și cercul $sBCS$ coincid.

Fie A, A' două puncte arbitrare ale geodeticei. Există pe geodetică un sub-arc BC conținător al lui A, A', căci geodetica este o mulțime deschisă. Conform rezultatului de mai sus, cercurile transverse $\tau = sAS$, $\tau' = sA'S$ coincid, căci se confundă cu cercul $sBCS$.

Prin urmare cercul transvers τ e stabil de-a lungul unei geodetice iar aceasta din urmă se reduce la un sub-arc al cercului τ.

De aici rezultă că într-un punct al geodeticei, elementul de contact e același cu al cercului transvers. Ținînd seamă de teorema din § 2, 2°, urmează, că geodeticile unei J-geometrii naturale intră printre curbele geometriei finsleriene naturale, asociată, ortogonale în fiecare punct direcției transverse.

Ultima parte a enunțului rezultă din echivalarea definiției intrinsece, din § 2, 3°, a geodeticilor, cu definiția din § 2. 1°.

Cu aceasta totul e demonstrat.

2°. Pregătirea teoremei reciproce

Reciproca teoremei I stă mult mai adînc și trebuie pregătită prin cîteva leme.

L e m a I. *Fie* K *o curbă simplă, închisă, ale cărei imagini inverse* K^* *față de punctele domeniului* $H \subset J$ *luate ca poluri, satisfac la cererea derivabilității duale.*

Dacă Λ *este o curbă odată derivabilă, din* H, *ale cărei direcții transverse, în geometria finsleriană naturală a domeniului* J, *sînt în fiecare punct ortogonale tangentei, atunci mulțimile de sprijin* (s), (S) *corespunzătoare elementelor de contact ale lui* Λ, *se reduc la cîte un punct*

$$(s) = s, \quad (S) = S.$$

[1]) Deci mai puțin decît cererea a din 2°,§2. Continuitatea primelor derivate nu e postulată.

Demonstrație. Fie A, $A + dA$ două puncte infinit-vecine ale lui Λ. Conform teoremei din § 2, 2°, cercul transvers τ^ε în A, la stînga ($\varepsilon = -$) *resp.* dreapta ($\varepsilon = +$) e tangent lui Λ în A.

Dacă (s), (S) sînt mulțimile de sprijin corespunzătoare cercurilor extreme ale perechii A, $A + dA$, rezultă

$$\tau^\varepsilon = s^\varepsilon A S^\varepsilon , \qquad (\varepsilon = \mp).$$

Pentru semnificația lui s^ε , S^ε trimitem la § 2, 2°.

Transformăm figura printr-o inversiune de pol A. Cercurile extreme devin două tangente extreme $d^\star$, $D^\star$, la imagina $K^\star$ a lui K, de direcție comună $\Delta^\star$.

În cele ce urmează, înțelegem prin *bandă* a două paralele, domeniul plan limitat de aceste paralele, *închis* cu paralelele însele.

Deci curba $K^\star$ inclusiv contactele ei cu $d^\star$, $D^\star$, e cuprinsă în banda $[d^\star, D^\star]$.

În virtutea definiției de la începutul § 4, 2°, **M**, transformatele $(s^\star)$, $(S^\star)$ ale punctelor de sprijin (s), (S) reprezintă totalitatea contactelor lui $K^\star$ cu $d^\star$, $D^\star$. E clar, de asemenea, că cercurile transverse τ^ε se transformă în dreptele $s^{\star\varepsilon}\, S^{\star\varepsilon}$ ($\varepsilon = \mp$), ortogonale, în virtutea ipotezei, direcției $\Delta^\star$.

Ca atare, figura $s^{\star(-)}\, s^{\star(+)}\, S^{\star(+)}\, S^{\star(-)}$ este : sau un segment dublu sau un dreptunghiu cu $s^{\star(-)}\, S^{\star(+)}$ și $s^{\star(+)} S^{\star(-)}$, perechi de vîrfuri opuse.

Să arătăm că ultima eventualitate, cu alte cuvinte ipoteza

$$s^{\star(-)} \neq s^{\star(+)}, \qquad (1)$$

evident echivalentă cu

$$S^{\star(-)} \neq S^{\star(+)}, \qquad (1')$$

se exclude.

Admitem, prin absurd, (1) și deci (1′).

În virtutea definiției cercului transvers τ^ε din 3°, rotația infinit mică ($\Delta^\star$, $\Delta^{\star(-)}$) *resp.* ($\Delta^\star$, $\Delta^{\star(+)}$) la stînga *resp.* dreapta, conduce la perechea de tangente extreme $d^{\star(-)}$, $D^{\star(-)}$ *resp.* $d^{\star(+)}$, $D^{\star(+)}$ (inversele cercurilor extreme ale elementului de contact din A, rotit de aceleași unghiuri) de direcție comună $\Delta^{\star(-)}$ *resp.* $\Delta^{\star(+)}$ și care taie pe $d^\star$, $D^\star$ în $s^{\star(-)}$, $S^{\star(-)}$ *resp.* $s^{\star(+)}$, $S^{\star(+)}$.

E clar că $d^\star$, $D^\star$ și $d^{\star(-)}$, $D^{\star(-)}$ formează un paralelogram cu $s^{\star(-)}$ și $S^{\star(-)}$, vîrfuri opuse. Cum $d^{\star(-)}$, $D^{\star(-)}$ sînt tangente extreme, curba $K^\star$ se găsește în banda $[d^{\star(-)}, D^{\star(-)}]$. În definitiv, se găsește în paralelogramul închis, interferență a bandelor $[d^\star, D^\star]$ și $[d^{\star(-)}, D^{\star(-)}]$. Ca atare $s^{\star(+)}$ *resp.* $S^{\star(+)}$ aparține laturei acestui paralelogram, suportată de $d^\star$ *resp.* $D^\star$.

În ipoteza (1) sau (1′), segmentele $s^{\star(-)}\, s^{\star(+)}$ și $S^{\star(-)}\, S^{\star(+)}$ sînt veritabile. Deci sînt de sensuri opuse, căci $s^{\star(-)}$, $S^{\star(-)}$ sînt, cum am văzut, vîrfuri opuse în paralelogramul menționat iar $s^{\star(+)}$, $S^{\star(+)}$ aparțin la două laturi opuse ale acestuia.

Tot în ipoteza (1) sau (1′) am recunoscut însă că figura $s^{\star(-)}\, s^{\star(+)}\, S^{\star(+)} S^{\star(-)}$ e un dreptunghiu cu $s^{\star(-)}$, $S^{\star(+)}$ și $s^{\star(+)}$, $S^{\star(-)}$ vîrfuri opuse.

Aşadar segmentele $s^{\star(-)}\, s^{\star(+)}$ şi $S^{\star(-)}\, S^{\star(+)}$ sînt paralele şi de acelaşi sens, împotriva proprietăţii pusă în evidenţă mai sus, că sensurile se opun.

Ajungem la o contrazicere. Astfel sînt stabilite, indirect, relaţiile :

$$s^{\star(-)} = s^{\star(+)} = s^{\star}, \tag{1*}$$

$$S^{\star(-)} = S^{\star(+)} = S^{\star}, \tag{1$^{\star\prime}$}$$

contrare lui (1), (1′).

Pe de altă parte, pentru rotaţiile infinit mici $(\Delta^\star, \Delta^{\star(-)}), (\Delta^\star, \Delta^{\star(+)})$, curba $K^\star$, aflîndu-se în fiecare din bandele de tangente extreme $[d^\star, D^\star]$, $[d^{\star(-)} D^{\star(-)}]$, $[d^{\star(+)} D^{\star(+)}]$, se găseşte în domeniul exagonal (închis) determinat de acestea. Laturile exagonului suportate de $d^\star$, $D^\star$ sînt tocmai segmentele $s^{\star(-)}\, s^{\star(+)}$. Ele conţin, evident, totalitatea contactelor $(s^\star)$, $(S^\star)$ ale lui $d^\star$, $D^\star$ cu $K^\star$. Cînd rotaţiile tind către zero, laturile $s^{\star(-)}\, s^{\star(+)}$, $S^{\star(-)} S^{\star(+)}$, conform lui (1*) sau (1$^{\star\prime}$), tind respectiv către punctele $s^\star$, $S^\star$. Conchidem

$$(s^\star) = s^\star, \quad (S^\star) = S^\star \tag{2}$$

sau, trecînd la figura inversă

$$(s) = s, \quad (S) = S.$$

Cu aceasta lema I e demonstrată.

Lema II. *Ipotezele şi notaţiile fiind acelea din lema I* (şi din demonstraţia ei), *pentru orice vecinătate* $\mathcal{U}(s)$ resp. $\mathcal{U}(S)$ *există o vecinătate* $\mathcal{U}(A)$, $A \to H$, *pentru care cercurile tangente la* K *în* s resp. S *şi incidente lui* $\mathcal{U}(A)$, *au toate intersecţiile lor cu* K *cuprinse în* $\mathcal{U}(s)$ resp. $\mathcal{U}(S)$.

Demonstraţie. Executăm aceeaşi inversiune de pol A, ca în demonstraţia lemei I şi păstrăm aceleaşi notaţii pentru elementele figurii inverse.

Raportăm curba $K^\star$ la un sistem de axe ortogonale constituite din normala $x = 0$ şi tangenta $y = 0$ în $s^\star$ la $K^\star$.

Ecuaţia unui cerc tangent în $s^\star$ la $K^\star$ e de forma

$$\eta(x^2 + y^2) - y = 0, \tag{3}$$

unde cercurile de rază infinit-mare corespund la valori $|\eta|$ infinit mici.

Ne mărginim să demonstrăm lema pentru punctul s, întrucît s şi S apar în enunţ egal îndreptăţite. Lema va fi demonstrată cînd, în figura inversă, pentru o vecinătate $\mathcal{U}(s^\star)$ arbitrară, vom fi dovedit că există un număr nenul η_0, aşa încît toate intersecţiile lui $K^\star$ cu cercurile (3), în care

$$0 \leqslant |\eta| < |\eta_0| \tag{3′}$$

se găsesc în $\mathcal{U}(s^\star)$.

E clar că o vecinătate arbitrară $\mathcal{U}(s^\star)$ e conţinută într-o vecinătate circulară de centru $s^\star$ şi deci e deajuns să demonstrăm lema pentru astfel de vecinătăţi. Aşadar, în cele ce urmează, vom folosi cu exclusivitate sistemul de vecinătăţi circulare $\mathcal{U}(s^\star)$ de centru $s^\star$.

Ne propunem să arătăm că limita inferioară a ordonatelor punctelor lui K^*, aşezate în afara unei vecinătăţi circulare $\mathcal{U}(s^*)$, dar altfel arbitrară, e diferită de zero :

$$\text{lim. inf.} \mid y \mid > 0.$$

Într-adevăr, să observăm mai întîi că tangenta $y = 0$ în s^* la K^*, fiind transformata prin inversiune a unui cerc extrem, corespunzător elementului de contact A, $A + dA$, nu are, în virtutea lemei I, alte puncte comune cu K^* în afară de s^* (pentru coincidenţa mulţimii punctelor de sprijin cu mulţimea contactelor, trimitem la începutul aliniatului 2°, § 4, **M**).

Aşadar curba K^* se găseşte de aceeaşi parte a tangentei $y = 0$. Pentru a preciza, presupunem, că se găseşte în semiplanul $y \geqslant 0$. Concluzia la care trebuie să ajungem, se scrie deci

$$\text{lim. inf. } y > 0. \tag{4}$$

Să ne ocupăm întîi de punctele lui K^* exterioare lui $\mathcal{U}(s^*)$ pentru care $x \geqslant 0$. E clar, că punctele semicercului, — frontieră a lui $\mathcal{U}(s^*)$, — cuprinse în semiplanul $x \geqslant 0$ sînt funcţii uniforme de ordonată

$$x = \varphi(y).$$

Demonstrăm concluzia (4) prin absurd.

Presupunem deci, că limita inferioară a lui y, pe arcul sau arcele curbei K^* din semiplanul $x \geqslant 0$, exterioare lui $\mathcal{U}(s^*)$, ar fi nulă (facem observaţia că, prin construcţie, arcele sînt obligatoriu închise).

În acest caz ar exista un număr pozitiv $r_0 < r$, unde r e raza lui $\mathcal{U}(s^*)$, aşa încît toate paralelele $y = t$, cu

$$0 < t < r_0 \tag{5}$$

să întîlnească pe K^* în puncte exterioare lui $\mathcal{U}(s^*)$ şi de abscisă $x \geqslant 0$.

Dacă mulţimea acestor intersecţii e finită, există un punct

$$x = f(t), \quad y = t,$$

al mulţimii, cel mai apropiat de $x = \varphi(t)$, $y = t$ (la rigoare chiar $x = \varphi(t)$, $y = t$ însuşi). Printr-o convenţie specială putem obţine ca punctul să fie unic determinat.

Dacă, dimpotrivă, mulţimea $x = f_\lambda(t)$, $y = t$ a intersecţiilor e infinită, cum

$$f_\lambda(t) \geqslant \varphi(t)$$

există o limită inferioară

$$f(t) \geqslant \varphi(t)$$

a mulţumi de valori $f_\lambda(t)$, care poate aparţine sau nu mulţimii de intersecţii considerate.

În cazul cînd $x = f(t)$, $y = t$ aparține mulțimii $x = f_\lambda(t)$, $y = t$, e clar că acest punct e caracterizat prin proprietatea de a fi, în mulțimea respectivă, cel mai apropiat de punctul $x = \varphi(t)$, $y = t$.

În cazul contrar concluzia nu se schimbă. Într-adevăr $x = f(t)$, $y = t$ apare punct de aglomerare al mulțimii de puncte $x = f_\lambda(t)$, $y = t$ de pe complementul curbei închise K^* față de secțiunea ei cu mulțimile deschise $x < 0$ și $\mathcal{U}(s^*)$. Dar $x = f(t)$, $y = t$ aparține obligatoriu curbei închise K^*. Nu poate aparține lui $x < 0$ sau lui $\mathcal{U}(s^*)$ căci ar exista vecinătăți ale sale, interioare acestor mulțimi deschise și conținînd puncte $x = f_\lambda(t)$, $y = t$, împotriva definiției acestora din urmă. Ca atare $x = f(t)$, $y = t$ e un punct al lui K^* de abscisă $x \geqslant 0$, exterior lui $\mathcal{U}(s^*)$, deci cuprins în mulțimea $x = f_\lambda(t)$, $y = t$. Punctul e complet caracterizat, în această mulțime prin proprietatea de a fi cel mai apropiat de $x = \varphi(t)$, $y = t$.

În definitiv am construit, pentru intervalul (5) al lui t, o funcție uniformă $f(t)$, așa încît punctul $x = f(t)$, $y = t$ să aparțină complementului curbei K^* față de $\mathcal{U}(s^*)$.

Considerăm mulțimea infinită de puncte

$$x = f\left(\frac{1}{n}\right), \quad y = \frac{1}{n} \tag{6}$$

cu n întreg și pozitiv, supus condiției

$$n > \frac{1}{r_0}.$$

Avem în (6) o mulțime infinită de puncte de pe complementul lui K^* față de $\mathcal{U}(s^*)$, evident închis. Ca atare, punctele (6) admit cel puțin un punct de aglomerare P, cuprins în acest complement.

Însă P trebuie să se găsească pe axa $y = 0$. Altfel ar exista o vecinătate $\mathcal{U}(P)$, disjunctă de $y = 0$, în care valoarea ordonatelor t ar rămîne superioară unei margini pozitive $\frac{1}{n_0}$:

$$t > \frac{1}{n_0}$$

dar ar conține o infinitate de puncte $x = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $y = \frac{1}{n}$, cu n întreg natural. Ar urma

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n_0}, \quad \therefore \; n < n_0,$$

ceea ce contrazice proprietatea mulțimii de puncte $x = f\left(\frac{1}{n}\right)$, $y = \frac{1}{n}$, de a fi infinită.

Deci P se găseşte pe axa $y = 0$. Ar însemna deci că tangenta $y = 0$ în s^* la K^* are în comun cu K^* un punct

$$P \dashrightarrow \mathcal{U}(s^*),$$

aşadar un punct $P \neq s^*$, împotriva lemei I.

Încît valabilitatea inegalităţii (4) e stabilită, indirect, pentru $x \geqslant 0$.

Înlocuind domeniul $x \geqslant 0$ cu $x \leqslant 0$, demonstraţia se reproduce cuvînt, cu cuvînt. Deci inegalitatea (4) e general valabilă.

Concluzia lemei se obţine acum fără dificultăţi.

Fie $\sqrt{\Sigma}$ o margine superioară a depărtării lui s^* la punctele curbei închise K^*. Avem

$$x^2 + y^2 < \Sigma, \qquad \Sigma > 0, \qquad (7)$$

unde x, y sînt coordonatele unui punct arbitrar de pe K^*. Punem, în (4):

$$\sigma = \text{lim. inf. } y. \qquad (8)$$

Deci pentru punctele lui K^* exterioare vecinătăţii $\mathcal{U}(s^*)$, urmează, potrivit lui (4):

$$\sigma > 0. \qquad (9)$$

În (3′) luăm

$$\eta_0 = \sigma : \Sigma, \qquad \eta_0 > 0, \qquad (7')$$

(în virtutea lui (9) şi (7)).

Introducînd (7) în (3) iar (7′) în (3′) şi limitînd pe η la valori pozitive, găsim pentru intersecţiile cercurilor (3), (3′) cu curba K^*, exterioare vecinătăţii $\mathcal{U}(s^*)$

$$\sigma > y. \qquad (8')$$

Dar (8), (8′) dau o contrazicere. Ca atare, cercurile (3) de parametru η pozitiv, satisfăcînd la (3′), nu pot tăia pe K^* în afara vecinătăţii $\mathcal{U}(s^*)$.

Concluzia se menţine *a fortiori* pentru η negativ, căci cu excepţia punctului s^*, cercurile (3) se găsesc în semiplanul $y < 0$ iar K^*, în semiplanul închis $y \geqslant 0$ (inegalitatea mixtă se explică prin aceea, că existenţa altor contacte cu tangenta $y = 0$ n-a fost exclusă).

Lema e complet demonstrată.

3°. Construirea derivabilităţii duale a imaginilor inverse K^* prin condiţii puse direct curbei K

În vederea unui enunţ mai semnificativ al reciprocei teoremei geodeticilor, din 4°, întreprindem aici o cercetare asupra condiţiilor în care derivabilitatea dual ă a lui K^* e realizată.

Impunem curbei K următoarele cereri (care înlocuiesc şi completează cererile *a* şi *b* din 3°):

1) $= a = \bar{a}$. *Ipoteza derivabilităţii continue punctuale.*

Coordonatele curbei K admit reprezentări parametrice cu derivate de primul ordin continue şi nu în acelaşi timp nule.

$\bar{b}$. *Ipoteza izolării punctelor caracteristice.*

Dacă A e un punct arbitrar din regiunea deschisă $H \subset J$ iar (Γ) mulțimea cercurilor (odată) ortogonale la K, duse prin A, există o vecinătate $\mathcal{U}(A)$ în care orice pereche de cercuri Γ, $\Gamma + d\Gamma$ infinit vecine nu au alt punct comun afară de A. (Nu se cere ca limita celeilalte intersecții a lui Γ, $\Gamma + d\Gamma$ să existe).

La ipotezele $\bar{a}$ și $\bar{b}$, adăugînd încă, în vederea discuțiilor viitoare :

$\bar{c}$. *Ipoteza regularității geodeticilor finsleriene, în* H.

Problema geodeticilor finsleriene ale J-geometriei naturale e regulată [1]) în H. Aceasta înseamnă : prin două puncte $M \to H$, $N \to H$, destul de apropiate, trece o singură geodetică.

$\bar{d}$. *Ipoteza exteriorității cercurilor de străbatere.*

Pentru fiecare punct $s_0 \in K$ există o vecinătate $\mathcal{U}(s_0)$ așa încît cercurile tangente în s_0 la K și care străbat curba K într-un punct $s_0 \in K \cap \mathcal{U}(s_0)$, rămîn exterioare regiunii H.

T e o r e m ă. *În ipotezele* $\bar{a} + \bar{b}$ *de mai sus, inversele* K* *ale lui* K, *față de orice pol* A ∈ H, *sînt dual-derivabile.*

Demonstrație. În virtutea lui $\bar{a}$ curba K^* este punctual derivabilă. Conform definiției din 3° a derivabilității duale, rămîne de arătat, numai, că intersecția a două tangente infinit vecine tinde către o limită, cînd un punct de contact al uneia tinde către un punct de contact al celeilalte.

Considerăm punctul $s_0 \in K$ și însemnăm cu s_0^* imagina sa prin inversiunea care duce de la K, la K^*.

Raportăm curba K^* la tangenta $y = 0$ și normala $x = 0$ din s_0^*.

Fie $x = f(t)$, $y = g(t)$ reprezentarea parametrică ce rezultă pentru K^* din transformarea prin inversiune a reprezentării parametrice a lui K, de care e vorba în cererea $\bar{a}$. Se recunoaște ușor, că $f(t)$, $g(t)$ admit de asemenea derivate continue de primul ordin, nu în același timp nule.

---

[1]) Se știe, că problema regularității geodeticilor finsleriene e asigurată în H, dacă :

1. Funcția $\mathcal{L}(x, y; \dot{x}, \dot{y})$ sau, în cazul nostru, curbura transversă medie $\mathrm{M} = \mathcal{L}\frac{dt}{d\sigma}$ admite derivate parțiale continui de primele două ordine în raport cu $\dot{x}$, $\dot{y}$.

2. Funcția omogenă de grad 2 în $\dot{x}$, $\dot{y}$, reprezentată de pătratul $\mathcal{F} = \mathcal{L}^2$, admite în H o hessiană

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial \dot{x}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{y}\,\partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{y}^2} \end{vmatrix}$$

nenulă. În cazul nostru, $\mathcal{F} = \mathrm{M}^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$. Punînd $\mathfrak{M} = \mathrm{M}^2$, un calcul simplu ne dă pentru această a doua condiție

$$\mathfrak{M}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial \dot{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial \dot{y}^2}\right)\mathfrak{M}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial \dot{x}^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial \dot{y}\,\partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial \dot{y}^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Dacă t_0 e parametrul lui s_0^* urmează

$$f(t_0) = 0, \quad g(t_0) = 0, \tag{1}$$

$$f'(t_0) \neq 0, \quad g'(t_0) = 0. \tag{2}$$

Să însemnăm cu $A \to H$ polul inversiunii care face trecerea de la K, la K^*.

Fie s un punct al lui K infinit vecin de s_0. Considerăm cercurile duse prin A normal la K *respectiv* în s și s_0. În virtutea ipotezei $\overline{b}$, trecînd la figura inversă, conchidem, că normala în s^* la K^* întîlnește normala în punctul infinit vecin s_0^* (adică axa $x = 0$) într-un punct a cărui ordonată rămîne, în valoare absolută, sub o anumită margine.

Să stabilim (pentru a fi folosită și în aliniatul viitor) următoarea

P r o p o z i ț i e a j u t ă t o a r e. *Dacă* ε *e un număr pozitiv destul de mic, cîtul*:

$$|\, g'(t) : f(t) \,|$$

admite, pentru toți t *cu*

$$0 < |\, t - t_0 \,| < \varepsilon$$

o margine inferioară nenulă.

Într-adevăr, ecuația normalei în s^* la K^* este

$$(x - f(t)) f'(t) + (y - g(t))\, g'(t) = 0. \tag{3}$$

Ordonata intersecției acestei normale, cu normala $x = 0$ în s_0^*, verifică ecuația

$$g'(t) = f(t)\, f'(t) + g(t)\, g'(t). \tag{4}$$

Există un ε pozitiv, destul de mic, pentru care funcția $f(t)$ nu se anulează, cînd

$$0 < |\, t - t_0 \,| < \varepsilon; \tag{5}$$

altfel raportul $(f(t) - f(t_0)) : (t - t_0)$, care se scrie, în virtutea lui (1)

$$f(t) : (t - t_0) \tag{5'}$$

ar fi în (5) mereu nul. Deci limita $f'(t_0)$ a acestui raport ar fi de asemenea nulă, împotriva lui (2).

Încît, pentru toți t din (5), deducem din (4):

$$\frac{g'(t)}{f(t)}\, y = f'(t) + \frac{g(t)}{f(t)}\, f'(t). \tag{6}$$

În virtutea lui (1) și a formulei creșterilor finite, avem

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t) - f(t_0) = (t - t_0)\, f'(t_1), \\ g(t) &= g(t) - g(t_0) = (t - t_0)\, g'(t_2), \end{aligned} \tag{7}$$

$$0 \leqslant |\, t - t_i \,| < |\, t - t_0 \,|, \qquad i = 1, 2. \tag{7'}$$

Cu aceasta relația (6) devine

$$\frac{g'(t)}{f(t)}\, y = f'(t) + \frac{g'(t_2)}{f'(t_1)}\, f'(t). \tag{8}$$

Avînd în vedere (7') și cererea $\bar{a}$, recunoaștem că pentru $t \to t_0$, valoarea t_1 *respectiv* t_2 tinde către t_0 iar $f'(t)$ și $f'(t_1)$, către limita finită și diferită de zero $f'(t_0)$, din (2); pe cînd $g'(t_2)$, către limita nulă $g'(t_0)$, din (2).

Prin urmare, membrul al doilea din (8) admite o limită finită și diferită de zero, anume $f'(t_0)$.

Dar, conform lui $\bar{b}$, ordonata y a intersecției normalelor în s^* și s_0^* rămîne mărginită în valoare absolută, cum am observat mai sus. Citim atunci pe (8), că raportul din primul membru

$$g'(t) : f(t)$$

rămîne în valoare absolută (mărginit) deasupra unei margini inferioare nenule, pentru toți t care satisfac la (5) sau la un interval mai mic.

Propoziția ajutătoare e demonstrată.

Să trecem acum la demonstrarea derivabilității duale a lui K^*.

În virtutea continuității tangentei și resolubilității *) lui K^*, două tangente infinit vecine au cel puțin o pereche de puncte de contact infinit-vecine. Într-adevăr, în caz contrar, definiția din § 2,2°, a rezolubilității, ar fi infirmată.

Să presupunem că s_0^* e punctul de contact al tangentei fixe dar altfel arbitrare $y = 0$, infinit-vecin contactului s^* al unei tangente infinit-vecine dar altfel arbitrare.

Avem pentru abscisa intersecției celor două tangente

$$g'(t)\, x = f(t)\, g'(t) - g(t)\, f'(t) \tag{9}$$

În virtutea propoziției ajutătoare putem scrie

$$| g'(t) : f(t) | > m, \quad m > 0,$$

pentru toți t, cu

$$0 < | t - t_0 | < \varepsilon, \tag{9'}$$

unde ε e un număr pozitiv, destul de mic.

E clar (vezi propoziția ajutătoare) că avem $g'(t) \neq 0$, în tot intervalul (9'). Prin urmare putem rezolva ecuația (9) în raport cu x:

$$x = f(t) - g(t)\frac{f'(t)}{g'(t)}. \tag{10}$$

Presupunem că ε din (9') a fost luat mai mic decît ε din (5). Atunci avem încă

$$f(t) \neq 0,$$

*) Consecință a cererii a și a închiderii lui K^* (vezi lema I din § 2,2°).

pentru toate valorile lui t din (9'). Prin urmare (10) se mai scrie

$$x = f(t) - g(t)\left\{\frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{f(t)}{g'(t)}\right\}$$

sau, folosind (7), (7')

$$x = f(t) - g'(t_2)\left\{\frac{f'(t)}{f'(t_1)} \cdot \frac{f(t)}{g'(t)}\right\}. \tag{11}$$

În virtutea propoziției ajutătoare, cîtul $f(t) : g'(t)$ rămîne mărginit în modul, în intervalul (9') sau într-un interval mai mic. De asemenea $f'(t)$ și $f'(t_1)$ tind către $f'(t_0) \neq 0$ cînd $t \to t_0$. Prin urmare, în intervalul (9'), eventual într-un interval mai mic, paranteza ondulată din (11) rămîne mărginită în modul:

$$\left|\frac{f'(t)}{f'(t_1)} \cdot \frac{f(t)}{g'(t)}\right| \leqslant M. \tag{12}$$

Pe de altă parte funcțiile continui $f(t)$ și $g'(t_2)$ tind respectiv către $f(t_0) = 0$ și $g'(t_0) = 0$.

Fie ε' un număr pozitiv arbitrar. Putem restrînge încă, la rigoare, intervalul (9') așa încît, potrivit ultimei observații, să avem

$$|f(t)| \leqslant \frac{\varepsilon'}{1+M}, \quad |g'(t_2)| \leqslant \frac{\varepsilon'}{1+M}. \tag{13}$$

Din (11) deducem, ținînd seamă de (12) și (13)

$$|x| \leqslant |f(t)| + |g'(t_2)|\left|\frac{f'(t)}{f'(t_1)} \cdot \frac{f(t)}{g'(t)}\right| \leqslant |f(t)| + |g'(t_2)|\,M,$$

$$\therefore\ |x| \leqslant \varepsilon'$$

pentru toți t din (9'). Aceasta înseamnă

$$\lim_{t \to t_0} x = 0,$$

Încît e dovedit, că intersecția tangentei curente, infinit-vecină tangentei fixe dar altfel arbitrare, în s_0^*, la K^*, tinde către un punct de contact al acesteia, anume s_0^* însuși. Altfel spus, curba K^* e tangențial — și deci dual-derivabilă.

Cu aceasta totul e demonstrat.

4°. Reciproca teoremei geodeticelor

Teorema I. *Fie* K *o curbă închisă, simplă, satisfăcînd la ipotezele* $\bar{a} + \bar{b} + \bar{d}$ *din* 8° (*sau, mai slab, la ipotezele derivabilității duale a imaginelor inverse* K^* *față de polurile* $A \in H$, *plus cererea* $\bar{d}$).

În acest caz orice arc deschis Λ *cuprins în regiunea* H, *ortogonal direcțiilor sale transverse (din J-geometria finsleriană naturală, corespunzătoare lui* K) *este un arc de geodetică, eventual o înfășurată de geodetice.*

Demonstrație. Fie un punct $A \in \Lambda$. În virtutea lemei I din 2° (ale cărei ipoteze, conform teoremei din 3°, sînt verificate aici), mulțimile de sprijin ale unei perechi de puncte infinit vecine A, $A + dA$ de pe Λ se reduc la s_0, S_0. Avem deci un singur cerc transvers

$$\tau = s_0 A S_0.$$

E clar, că τ este tangent în A la Λ, căci τ, potrivit teoremei din § 2,2°, iar Λ, prin ipoteză, taie ortogonal direcția transversă elementului de contact A, dA.

Ca atare τ se dovedește ortogonal cercurilor extreme ale elementului de contact A, dA și deci, ortogonal în s_0, S_0 la K.

Introducem o inversiune de pol A. Raportăm imagina K^* a lui K la tangenta $y = 0$ și normala $x = 0$ în inversul s_0^* al lui s_0. Deci figura inversă a lui τ este axa $x = 0$.

Fie $x = f(t)$, $y = g(t)$ reprezentarea parametrică a lui K^* în vecinătatea $\mathcal{U}(s_0^*)$. Transformînd relațiile din axioma $\bar{d}$ prin inversiunea precedentă, conchidem (ținînd seamă, că $A \to H$) la existența unei vecinătăți $\mathcal{U}(s_0^*)$ pentru care toate cercurile tangente în s_0^* la K^* și care străbat curba K^* într-un punct s^* din $\mathcal{U}(s_0^*)$, au un diametru finit. Ceva mai mult: putem alege pe $\mathcal{U}(s_0^*)$ destul de restrîns, ca să existe chiar o margine superioară a diametrelor.

Ecuația perpendicularei în s^* pe dreapta ce unește acest punct cu origina s_0^* este

$$f(t)\, x + g'(t)\, y = f^2(t) + g^2(t). \tag{1}$$

Dar $f(t)$ și $g(t)$, pentru $t \neq t_0$, nu sînt în același timp nule[1]). Rezultă, că în $\mathcal{U}(s_0^*)$ avem

$$g(t) \neq 0, \qquad t \neq t_0, \tag{2}$$

altfel ar urma $f(t) \neq 0$, $g(t) = 0$ iar cercul de străbatere ar deveni o dreaptă, împotriva mărginirii diametrului.

Deci ecuația (1) pentru $x = 0$ e solubilă în y. Obținem, pentru diametru, formula

$$\left| \frac{f^2(t)}{g(t)} + g(t) \right|, \qquad t \neq t_0.$$

Însemnînd cu $\tilde{\eta}_0$ un număr nenul, mărginirea în $\mathcal{U}(s_0^*)$ a diametrului se exprimă prin inegalitatea

$$\left| \frac{f^2(t)}{g(t)} + g(t) \right| \leqslant \frac{1}{4\,|\,\tilde{\eta}_0\,|}.$$

[1]) În virtutea simplicității curbei K^* (urmare a simplicității lui K).

De aici şi din teorema modulului, rezultă

$$\left|\frac{f^2(t)}{g(t)}\right| \leqslant \left|\frac{f^2(t)}{g(t)} + g(t)\right| + |g(t)| \leqslant \frac{1}{4|\tilde{\eta}_0|} + |g(t)|. \tag{3}$$

Fie t_0 parametrul lui s_0^*. În virtutea ipotezei $\bar{a}$, funcţia $g(t)$ tinde continuu către $g(t_0)$ pentru $t \to t_0$. Prin urmare, după o eventuală restrîngere a vecinătăţii $\tilde{\mathcal{U}}(s_0^*)$, avem

$$|g(t)| \leqslant \frac{1}{4|\tilde{\eta}_0|}. \tag{3'}$$

Din (3), (3') deducem

$$\left|\frac{f^2(t)}{g(t)}\right| \leqslant \frac{1}{2|\tilde{\eta}_0|}, \qquad t \neq t_0. \tag{4}$$

Formulele (7), (7') din 3° fiind valabile şi aici, reproducem pe cea dintîi

$$f(t) = (t - t_0) f'(t_1), \tag{1'}$$

$$0 \leqslant |t - t_1| < |t - t_0|.$$

Conform ipotezei $\bar{a}$, derivata $f'(t_1)$ tinde continuu către $f'(t_0)$. Deci, după o eventuală restrîngere a vecinătăţii $\tilde{\mathcal{U}}(s_0^*)$, putem obţine ca $f'(t_1)$ să nu se anuleze în interiorul ei. Citim atunci pe formula (1').

$$f(t) \neq 0. \tag{2'}$$

Comparînd (4) cu (2) şi (2') deducem

$$\left|\frac{g(t)}{f^2(t)}\right| \geqslant 2|\tilde{\eta}_0|, \qquad t \neq t_0. \tag{5}$$

Introducem fascicolul de cercuri (inclusiv axul lor radical)

$$\tilde{\eta}(x^2 + y^2) - y = 0, \tag{6}$$

$$0 \leqslant |\tilde{\eta}| < |\tilde{\eta}_0|. \tag{6'}$$

Avem pentru o eventuală intersecţie a lor, diferită de s_0^*, cu K^* şi situată în $\tilde{\mathcal{U}}(s_0^*)$

$$|\tilde{\eta}(f^2(t) + g^2(t)) - g(t)| \geqslant ||\tilde{\eta}|(f^2(t) + g^2(t)) - |g(t)| =$$

$$= f^2(t)\left|\frac{g(t)}{f^2(t)}\right| - |\tilde{\eta}| - |\tilde{\eta}|\left|\frac{g^2(t)}{f^2(t)}\right|$$

sau, folosind formulele (7), (7′) din 3° :

$$|\,\widetilde{\eta}(f^2(t)+g^2(t))-g(t)\,| \geqslant (t-t_0)^2 f'^2(t_1)\left|\left|\frac{g(t)}{f^2(t)}\right|-|\,\widetilde{\eta}\,|-|\,\widetilde{\eta}\,|\left|\frac{g'(t_2)}{f'(t_1)}\right|^2\right| \qquad (7)$$

$$0 \leqslant |t_i - t_0\,| < |\,t-t_0| \qquad (i=1,2) \qquad (7')$$

Aici (ipoteza $\bar{a}$) funcțiile $f'(t_1)$ și $g'(t_2)$ tind continuu, respectiv către $f'(t_0)\neq 0$ și $g'(t_0)=0$, pentru $t\to t_0$. Prin urmare, restrîngînd din nou, la nevoie, vecinătatea $\widetilde{\mathcal{U}}(s_0^*)$ putem asigura inegalitatea

$$0 \leqslant \left|\frac{g'(t_2)}{f'(t_1)}\right| \leqslant 1, \qquad f'(t_1)\neq 0\,. \qquad (8)$$

Din (8), ținînd seama de (6′), rezultă

$$|\,\widetilde{\eta}\,|\left|\frac{g'(t_2)}{f'(t_1)}\right|^2 \leqslant |\,\widetilde{\eta}_0\,| \qquad (8')$$

iar din (5) și din (6′) :

$$\left|\frac{g(t)}{f^2(t)}\right| - |\,\widetilde{\eta}\,| \geqslant 2\,|\widetilde{\eta}_0\,| - |\,\widetilde{\eta}\,| > |\,\widetilde{\eta}_0\,|. \qquad (8'')$$

Neegalitățile (8′), (8″) dau împreună, prin scădere :

$$\left|\frac{g(t)}{f^2(t)}\right| - |\,\widetilde{\eta}\,| - |\,\widetilde{\eta}\,|\left|\frac{g'(t_2)}{f'(t_1)}\right|^2 > 0. \qquad (9)$$

Comparînd (7) cu a doua relație (8) și cu (9), conchidem că curba K^* nu are cu cercurile (6), (6′) în vecinătatea $\widetilde{\mathcal{U}}(s_0^*)$ intersecții diferite de s_0^*.

Pe de altă parte, conform lemei*) II din 2° transformată prin inversiunea de pol A, toate intersecțiile lui K^* cu cercurile (6), de rază destul de mare (deci cuprinse printre cercurile (6), (6′)), rămîn într-o vecinătate arbitrară $\mathcal{U}(s_0^*)$.

Să luăm $\mathcal{U}(s_0^*)\subset\widetilde{\mathcal{U}}(s_0^*)$. În virtutea concluziei de mai sus și lemei amintite, rezultă că singura intersecție din $\mathcal{U}(s_0^*)$ a lui K^* cu un cerc (6) de rază destul de mare este s_0^*.

Refăcînd înapoi inversiunea de pol A, rezultatul se transpune curbei K sub următoarea formă :

Există o vecinătate $\mathcal{U}(A)$ din $H\subset J$, pentru care cercurile ce pătrund în $\mathcal{U}(A)$ și ating pe K în s_0 nu mai au alt punct comun cu K în afară de s_0. Aceeași concluzie pentru S_0, relativ la o altă vecinătate $\mathcal{V}(A)$.

Fie acum B, C două puncte ale cercului transvers τ corespunzător elementului de contact A, dA, conținute în vecinătatea $\mathcal{W}(A)=\mathcal{U}(A)\bigcap\mathcal{V}(A)$, dar altfel arbitrare. Am arătat la începutul acestei demonstrații, că τ e ortogonal în s_0, S_0 la K. Prin urmare cercul lui Apollonius al perechii B, C, care trece prin s_0 *resp.* S_0 e tangent acolo curbei K.

*) Ipotezele acestei leme sînt împlinite aici, în virtutea teoremei din 3°.

Însă acel cerc al lui Apollonius pătrunde în vecinătatea $\mathcal{U}(A)$ *resp.* $\mathcal{V}(A)$. Într-adevăr, el desparte perechia B, C, deci taie orice arc BC din $\mathcal{W}(A)$.

Făcînd aplicația rezultatului de mai sus, conchidem, că cercul lui Apollonius al perechiei B, C, tangent în s_0 *resp.* S_0 la curba K, nu mai are alt punct comun cu aceasta.

În definitiv e dovedit, că cercurile de nivel extrem ale perechiei B, C au mulțimile lor de sprijin reduse la s_0 *resp.* S_0. În virtutea teoremei II, § 4, 5°, **M** urmează că arcul conex din vecinătatea $\mathcal{W}(A)$, de pe cercul $\tau = s_0 A S_0$, conținător al punctului A, e un arc de J-geodetică. Ca atare există chiar un arc maximal, deschis, de J-geodetică, așadar pur și simplu : o geodetică ce trece prin A.

Conform demonstrației, curba Λ și geodetica menționată, au în A același element de contact. Deci Λ e o înfășurată de geodetice, eventual o geodetică. Cu aceasta totul e demonstrat.

Teorema II. *În cadrul* $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$ (*sau încă, mai slab, în cadrul derivabilității duale a inverselor* K^* *ale lui* K *față de polurile* A *din* H, *plus cererile* $\bar{c} + \bar{d}$), *o geodetică finsleriană* Λ *a* J*-geometriei naturale, conținută în* H *și ortogonală direcțiilor ei transverse, e un arc de geodetică.*

Demonstrație. Conform teoremei I, prin punctele infinit-vecine A, $A + dA$ de pe Λ, trece o geodetică Ξ. Am arătat însă, în teorema din 1°, că geodeticile sînt în același timp geodetice finsleriene ale J-metriei naturale.

În definitiv, prin punctele A, $A + dA$ din H trec două geodetice finsleriene Λ și Ξ. Conform cererii $\bar{c}$, curba Λ (conexă) coincide cu un arc al geodeticei Ξ cuprins în H.

Teorema e demonstrată.

Observația I. Cererile derivabilității duale pentru K^* și cererea $\bar{d}$ a exteriorității cercurilor de străbatere ale lui K, pot fi realizate simultan foarte simplu, cînd regiunea H nu e dată *a priori*, ci constituie una din întrebările problemei. E de ajuns să impunem lui K următoarele proprietăți :

$\bar{1}$) derivabilitatea punctuală pînă la ordinul 2 inclusiv;

$\bar{2}$) existența unei vecinătăți $\mathcal{U}(M)$, $M \not\to K$, în planul euclidian închis cu punctul ∞, unde nu pătrunde nici un cerc de curbură al lui K.

Într-adevăr, există atunci o regiune $H \subset \mathcal{U}(M)$, în acea parte*) J a planului euclidian închis, mărginită de K și conținînd pe M, unde, la fel cu cercurile de curbură, cercurile de străbatere nu pătrund. Prin urmare, o regiune H care realizează ipoteza $\bar{d}$.

Pe de altă parte imaginile inverse K^* sînt punctual derivabile pînă la ordinul 2 inclusiv, odată cu K. Atît e de ajuns (vezi 3°) pentru derivabilitatea duală a curbelor K^*.

---

*) Esențial este, ca frontiera K și regiunea H să fie mărginită. Nu e exclusă eventualitatea $\infty \to J$.

În concluzie, teorema I e valabilă pentru regiunea H astfel aleasă, a curbelor K satisfăcînd la $\bar{1}) + \bar{2})$. Cu cererea $\bar{c}$, în plus, teorema II devine deci demonstrabilă. E deajuns, ca prima regiune H să admită un subdomeniu H' în care problema geodeticelor finsleriene e regulată.

Putem lua $M = \infty$ în cazul unei curbe ce satisface la $\bar{1})$ şi ale cărei raze de curbură sînt mărginite superior, de exemplu în cazul K = elipsă.

Observaţia II. O condiţie suficientă de regularitate a problemei geodeticelor finsleriene o dă o anumită teoremă a lui *Paul Funk* *) care afirmă, că în cazul unei curburi constante, nepozitive a lui *Underhill* geodeticile finsleriene admit o reprezentare topologică pe dreptele planului euclidian.

Avem impresia că o J-geometrie finsleriană naturală, de curbură interioară (curbura lui Underhill) constantă negativă coincide cu metrica lui Poincaré. Teoremele I şi II, construite în acest mod, s-ar dovedi atunci fără interes.

Observaţia III. Pentru $H = J$ teoremele I şi II devin banale, deoarece J-geometria finsleriană naturală coincide sigur, în acest caz, cu metrica lui Poincaré.

Într-adevăr, dacă $H = J$, regiunea J nu e străbătută de niciun „cerc de străbatere". Urmează, că pentru fiecare punct $s \in K$ există o vecinătate $\mathcal{U}(s)$, în care curba K e un arc de cerc. Arcele nu pot aparţine la cercuri diferite, căci, dacă σ e un punct de joncţiune a două astfel de arce, în vecinătatea $\mathcal{U}(\sigma)$ arcele apar ca suportate de acelaşi cerc.

În definitiv K e un cerc şi J-metrica naturală, metrica lui Poincaré.

ФИНСЛЕРОВЫ ЕСТЕСТВЕННЫЕ I-ГЕОМЕТРИИ

РЕЗЮМЕ

В ряде статей[1]), напечатанных в этом журнале, начато изложение некоторых результатов, полученных автором между 1934—1938 гг. (по вопросу геометрии, связанному с теорией функций).

В M заложены основы одного принципа метризации и рассматривается в особенности важный частный случай: I-геометрии, в котором метризация строится при помощи абстрактизации континуума Мебиуса.

В C из I-метрик, взятых в качестве „основных", выводятся новые метрики, существование которых выявляет принцип классических метрик Каратеодори.

---

*) Math. Amm. 1929.

[1]) *Об одном принципе метризации* (статья условно обозначена автором M). Studii şi cercetări matematice, Acad. R.P.R., 1959, tom X, nr. 1.

Основание метрик Пуанкаре и Каратеодори (Статья условно обозначена автором C). Studii şi cercetări matematice, Acad. R.P.R., 1959, tom X, nr. 2.

Затем, в настоящей статье изучается частная финслерова геометрия, которая послужит в следующей статье (последней из этой серии работ) для характеристики круга при помощи свойств самой этой геометрии.

Эти свойства конформны и приходим, таким образом, к внутренней характеристике для некоторых односвязных областей в финслеровых терминах относительно индуцированной в I-геометрии, того, что называется „функцией отображения Римана".

★

I-геометрия, построенная при помощи естественного континуума Мебиуса, представляется как „естественная I-геометрия", а кривые, вдоль которых I-расстояние аддитивно, представляются весьма просто, как „геодезически".

Переход к пределу от I-расстояния приводит к „естественному финслеровому" линейному элементу.

В настоящей статье рассматривается соотношение между геодезическими и финслеровыми геодезическими.

В § 1 рассматриваются непрерывно дифференцируемые простые замкнутые кривые K, и дается характеристика круга, постулируя существование непрерывного пучка геодезических проходящих через точку в соответствующей естественной I-геометрии.

В § 2 устанавливается вид финслерового линейного элемента в естественной I-геометрии. Находим

$$ds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) d\sigma,$$

где $d\sigma = x^2 + y^2\,dt$, причем R и r являются радиусами „предельных кругов" относительно (x, y), $(x + dx, y + dy)$ (см. M).

Вводится понятие „трансверсальных линий": это линии, касательные к которым пересекают под одинаковым углом трансверсальные направления в I-геометрии, допускающей финслеров предельный переход.

В естественных I-геометриях трансверсальные линии становятся „трансверсальными окружностями".

В § 3 приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы финслеровы геодезические совпадали с геодезическими. Доказывается теорема:

В естественной I-геометрии относительно простой замкнутой кривой K, удовлетворяющей условиям:

a) Непрерывная дифференцируемость (первого порядка);

b) Определимость $A \in H \subset I$ „элементарных характеристических точек" на окружностях, проведенных через A, ортогонально к K;

c) Регулярность в H задачи о финслеровых геодезических;

d) Для любой точки $s \in K$ существует окрестность $U(s)$, такая, что окружности, касательные в s и K, пересекающие K в точке $K \bigcap U(s)$, остаются внешними к H;

Любая финслерова геодезическая дуга $\Lambda \to H$, ортогональная к своим трансверсальным направлениям, является геодезической дугой и наоборот.

LES J-GÉOMÉTRIES NATURELLES FINSLÉRIENNES

RÉSUMÉ

Dans une série d'articles*) parus ici même, on a entrepris la rédaction de certains résultats obtenus par l'auteur entre 1934—1938, dans une question de géométrie touchant de près à la théorie des fonctions.

M pose les bases d'un principe de métrisation et s'attache surtout à un cas particulier important : les J-géométries, où la métrisation est construite à l'aide d'une abstraction du continuum de Möbius.

Dans C on dérive de ces J-métriques, prises comme «métriques souches», des métriques nouvelles dont l'existence met à nu le principe des métriques classiques dues à Carathéodory.

De même, dans cet article, on étudie une géométrie finslérienne particulière, qui servira dans l'article prochain (le dernier de cette suite) à la caractérisation du cercle à l'aide des propriétés de cette géométrie même.

Ces propriétés sont conformes et l'on arrive ainsi, pour certains domaines simplement connexes J, à une caractérisation intrinsèque, dans le langage finslérien relatif à la J-géométrie induite en J, de ce qu'on appelle la « Riemannsche Abbildungsfunktion».

★

Une J-géométrie construite à l'aide du continuum naturel de Möbius est désignée comme «J-géométrie naturelle» et les courbes au long desquelles la J-distance est additive, sont désignées tout simplement comme « géodésiques».

Le passage à la limite de la J-distance donne l'élément d'arc «finslérien, naturel.»

Le rapport entre les géodésiques et les géodésiques finslériennes est le thème de l'article présent.

Dans § 1, le cadre étant celui des courbes K simples, fermées, une fois dérivables avec continuité, on donne une caractérisation du cercle, en postulant l'existence d'un faisceau continu de géodésiques passant par un point, dans la J-géométrie naturelle correspondante.

Dans § 2 on établit la forme de l'élément d'arc finslérien dans une J-géométrie naturelle. On trouve

$$ds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) d\sigma,$$

où $d\sigma = (x^2 + y^2)dt$, tandis que R, r représentent les rayons des «cercles extrèmes» relatifs à (x, y), $(x + dx, y + dy)$, — voir M.

---

*) Déjà parus :

Asupra unui principiu de metrizare (désigné ici par M). Studii şi cercetări matematice, Acad. R.P.R., 1959, tome X, n° 1.

Asupra unui principiu de metrizare (désigné ici par C). Studii şi cercetări matematice, Acad. R.P.R., 1959, tome X, n° 2.

On introduit la notion de «ligne transverse» : la ligne lieu des centres des éléments de contact qui coupent sous un même angle leurs directions transverses dans une J-géométrie qui admet un passage à la limite finslérien.

Dans les J-géométries naturelles les lignes transverses deviennent des « cercles transverses ».

Dans § 3 on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que les géodésiques finslériennes coïncident avec les géodésiques. On démontre ce théorème :

Dans une J-géométrie naturelle relative à une courbe simple, fermée, K satisfaisant aux hypothèses :

a. La dérivabilité continue (premier ordre) ;

b. La séparation de $A \in H \subset J$ d'avec les «points caractéristiques élémentaires» sur les cercles menés par A orthogonalement à K ;

c. La régularité en H du problème des géodésiques finslériennes ;

d. Pour tout point $s \dot{\in} K$ il existe un voisinage $U(s)$ tel que les cercles tangents en s à K et coupant K en un point de $K \cap U(s)$, restent extérieurs à H ;

tout arc géodésique finslérien $\Lambda \rightarrow H$ *orthogonal à ses directions transverses est arc de géodésique — et réciproquement.*

REDUCEREA FORMELOR PĂTRATICE *)

DE

ALEXANDRU FRODA

În algebra liniară, problema reducerii unei forme pătratice la o sumă de pătrate într-o bază ortonormală convenabilă se tratează separat, după cum spațiul vectorial considerat este euclidian real sau unitar complex. De aceea nici rezultatele obținute nu sînt poate suficient legate între ele, cum ar fi fost firesc **).

În cele ce urmează, împlinim această lacună, făcînd ca primul caz să se obțină din al doilea, prin restricția cîmpului complex pînă la cîmpul real D, depășind astfel simpla analogie.

1°. Fie $\mathcal{V}_u$ un spațiu vectorial n-dimensional, atașat cîmpului K și în care s-a definit un produs scalar simetric hermitic. Notînd cu $g(z; z)$ o formă pătratică hermitică de vectorul $z \in \mathcal{V}_u$, se arată că există în $\mathcal{V}_u$, o bază ortonormală

$$\mathcal{B}_u = \{u_1, \ldots, u_n\}, \tag{1}$$

pentru care $g(z; z)$ se reduce la o sumă de pătrate cu coeficienți reali:

$$z = \sum_j^{1,n} \zeta_j u_j, \quad \zeta_j \in K \Longrightarrow g(z; z) = \sum_j^{1,n} \mu_j |\zeta_j|^2, \ \mu_j \in D. \tag{2}$$

Demonstrația acestui rezultat se sprijină esențial pe proprietatea lui K de a fi algebric închis.

În cazul asemănător, cînd $\mathcal{V}_e$ este un spațiu vectorial n-dimensional, atașat cîmpului D, care nu este algebric închis, proprietatea precedentă este totuși valabilă. Într-adevăr, fie definit în $\mathcal{V}_e$ un produs scalar,

---

*) Primele rezultate s-au comunicat la Sesiunea științifică din iunie 1959 a Universității „C. I. Parhon", București.

**) Tratarea separată a cazurilor real sau complex apare limpede la autori; a se vedea astfel [2], [4], [5].

În [3], Halmos indică direct că soluția poate fi dată prin analogie. Tratarea de față este esențial diferită, cazul real fiind inclus în cazul general complex.

simetric. Notînd cu $f(x; x)$ o formă pătratică de vectorul $x \in \mathfrak{V}_e$, se arată direct, fără a folosi (2), că există în $\mathfrak{V}_e$ o bază

$$\mathcal{B}_v = \{v_1, \ldots, v_n\}, \tag{3}$$

astfel ca să avem

$$x = \sum_j^{1,n} \xi_j v_j, \quad \xi_j \in D \Longrightarrow f(x; x) = \sum_j^{1,n} \nu_j \xi_j^2, \quad \nu_j \in D. \tag{4}$$

Demonstrația clasică a acestui caz face apel la proprietatea că orice polinom de t cu coeficienți în D, de grad $m > 1$, se descompune în produs de factori ireductibili față de D, de gradele 1 și 2.

Ne propunem să arătăm că (4) se poate obține din formula (2) și fără a se mai recurge în demonstrație la proprietatea menționată de descompunere a polinoamelor. Vom relua în acest scop demonstrația clasică, adaptată problemei de a se obține cazul real, din cel complex, prin particularizare.

2°. Vom sprijini demonstrația noastră pe construcția, pentru spațiul euclidian real $\mathfrak{V}_e$, n-dimensional dat peste D, a unui spațiu unitar complex $\mathfrak{V}_u$, peste K și de aceeași dimensiune cu $\mathfrak{V}_e$, astfel ca să avem îndeplinite și condițiile unei extensii a cîmpului de scalari*):

a. $\mathfrak{V}_e \subset \mathfrak{V}_u$

b. Suma $x + y$ a doi vectori din $\mathfrak{V}_e$ să fie egală cu suma lor $x \oplus y$ în $\mathfrak{V}_u$,

c. Produsul $\alpha.x$ al unui vector x cu scalarul $\alpha \in D$, în $\mathfrak{V}_e$, să fie egal cu produsul $\alpha \odot x$, în $\mathfrak{V}_u$

d. Produsul scalar $(x, y) \in D$ în $\mathfrak{V}_e$ să fie egal cu valoarea produsului scalar $\langle x, y\rangle \in K$, în $\mathfrak{V}_u$.

Vom satisface condițiile precedente, construind mai întîi un spațiu vectorial $\mathfrak{V}_u$, peste K, în care a, b, c să fie îndeplinite și numai după aceea vom introduce, în mod convenabil, un produs scalar $\langle x, y\rangle$ în $\mathfrak{V}_u$, în acord cu d.

3°. Începem, prin a organiza produsul cartezian $\mathfrak{V}_e \times \mathfrak{V}_e$ al perechilor ordonate $z^* = \{x; x'\}$, unde x, x' sînt vectori din $\mathfrak{V}_e$, ca un spațiu vectorial $\mathfrak{V}_u^*$, de vectorii z^*, peste cîmpul K, sprijinit pe proprietățile spațiului vectorial $\mathfrak{V}_e$, peste cîmpul D.

Pentru egalitatea vectorilor în $\mathfrak{V}_u^*$, punem

$$\{x; x'\} \ominus \{y; y'\} \langle\Longrightarrow\rangle x = y, \; x' = y'. \tag{5}$$

Pentru suma vectorilor în V_u^*, punem

$$\{x; x'\} \oplus \{y, y'\} \ominus \{x + y; x' + y'\}. \tag{6}$$

Pentru produsul cu scalarul $\alpha \in K$, unde $\alpha = \lambda + i\lambda'$, $i^2 + 1 = 0$ $\lambda, \lambda' \in D$, punem

$$\alpha \odot \{x; x'\} \ominus \{\lambda x - \lambda' x'; \lambda x' + \lambda' x\}. \tag{7}$$

*) A se vedea în [1] problema generală a extinderii cîmpului de scalari al unui spațiu vectorial.

Simbolurile $=$, $+$, $.$, în (5), (6), (7) se referă la operațiile din $\mathfrak{V}_e$. Se verifică ușor liniaritatea spațiului $\mathfrak{V}_u^*$ peste K, în baza definițiilor precedente. Putem așadar reveni în $\mathfrak{V}_u^*$ la notațiile obișnuite $=$, $+$, $\cdot$, în loc de $\ominus$, $\oplus$, $\odot$, respectiv.

Observăm apoi că în virtutea lui (7), avem

$$\lambda = 0,\ \lambda' = 1 \Longrightarrow i\{0\,;\ x'\} = \{-x'\,;\ 0\} \tag{8}$$

și că aplicînd (6), rezultă

$$\{x\,;\ x'\} = \{x\,;\ 0\} + \{0\,;\ x'\}. \tag{9}$$

Ținînd seama de verificarea postulatelor spațiului liniar în $\mathfrak{V}_u^*$, putem înlocui — fără inconvenient — vectorul $\{x\,;\ 0\} \in \mathfrak{V}_u^*$ cu x. Aceasta corespunde unei schimbări de notație și, în virtutea lui (8), (9), va conduce să notăm, mai general, vectorul $\{x\,;\ x'\} \in \mathfrak{V}_u^*$ cu $x + ix'$. Spațiul $\mathfrak{V}_u^*$ de vectorii $z^* = \{x\,;\ x'\}$ se înlocuiește astfel cu spațiul $\mathfrak{V}_u$ de vectorii $z = x + ix'$, ele fiind spații liniar izomorfe peste K prin corespondența biunivocă

$$z^* = \{x\,;\ x'\} \Longleftrightarrow z = x + ix',\quad x, x' \in \mathfrak{V}_e,\quad z \in \mathfrak{V}_u. \tag{10}$$

În spațiul $\mathfrak{V}_u$, astfel definit, condițiile a, b, c (2°) sînt evident satisfăcute.

4°. Fie notat cu $(x, y) \in D$ produsul scalar de vectorii x, y din spațiul euclidian real $\mathfrak{V}_e$; acest produs este — conform postulatelor — simetric, adică $(x, y) = (y, x)$. În afară de aceasta, sînt satisfăcute condițiile : $\alpha \in D \Longrightarrow \alpha(x, y) = (\alpha x, y)$, $(x + x', y) = (x, y) + (x', y)$, $x \neq 0 \Longrightarrow (x, x) > 0$, unde x, y sînt vectorii din $\mathfrak{V}_e$.

Introducem în spațiul vectorial $\mathfrak{V}_u$, definit peste K, mai sus (3°) un produs scalar $\langle z, t\rangle \in K$, de vectori z, t din $\mathfrak{V}_u$, dat de relația de definiție

$$\langle z, t\rangle = (x, y) + i(x', y) - i(x, y') + (x', y') \tag{11}$$

unde

$$z = x + ix',\quad t = y + iy',\quad i^2 + 1 = 0.$$

Produsul scalar $\langle z, t\rangle$ este hermitic simetric, căci satisface cum se verifică ușor, postulatele :

$$\langle z, t\rangle = \overline{\langle t, z\rangle},\quad \langle z_1 + z_2, t\rangle = \langle z_1, t\rangle + \langle z_2, t\rangle,$$

$$\alpha \in K \Longrightarrow \alpha\,.\,\langle z, t\rangle = \langle \alpha z, t\rangle,\ z \neq 0 \Longrightarrow \langle z, z\rangle > 0$$

unde, cu $\overline{\langle t, z\rangle}$ se notează conjugatul complex $\bar{\lambda}$, al lui $\lambda = \langle t, z\rangle \in K$.

Condiția d de mai sus (2°) este vizibil satisfăcută și, în consecință, putem întrebuința fără inconvenient, pentru produsul scalar introdus notația (z, t), în loc de $\langle z, t\rangle$.

Spațiul vectorial $\mathfrak{V}_u$, peste K, dotat cu produsul scalar hermitic simetric din (5) este un *spațiu unitar complex*, obținut ca o extensie a *spațiului euclidian real* dat $\mathfrak{V}_e$. Invers, $\mathfrak{V}_e$ *se obține din* $\mathfrak{V}_u$, *prin restricția cîmpului de scalari* K *la subcîmpul* D.

5°. Se știe că în spațiul euclidian real $\mathfrak{V}_e$, există o bază ortonormală

$$\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\} \tag{12}$$

de n vectori, cînd $\mathfrak{V}_e$ este n-dimensional și astfel ca

$$(e_r, e_s) = \delta_{rs} \qquad r, s \in \{1, \ldots, n\}, \tag{13}$$

unde δ_{rs} (simbolul lui Kronecker) satisface implicațiile

$$r = s \Longrightarrow \delta_{rs} = 1, \quad r \neq s \Longrightarrow \delta_{rs} = 0. \tag{14}$$

Fie $\mathfrak{V}_u$ spațiul unitar complex, obținut mai sus, cînd extindem cîmpul de scalari D, atașat lui $\mathfrak{V}_e$, pînă la $K = D(i)$, cîmp obținut prin extensia de corp a lui D, prin adjuncția lui i, unde $i^2 + 1 = 0$.

Cum avem $\mathfrak{V}_e \subset \mathfrak{V}_u$, iar $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{V}_e$, rezultă că $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{V}_u$ și cum produsul scalar în $\mathfrak{V}_e$ se extinde prin relația (11), se observă că $\mathfrak{B}$ este o bază ortonormală a spațiului $\mathfrak{V}_u$ peste K, deoarece avem satisfăcute condițiile (13), (14). Dimensiunea lui $\mathfrak{V}_u$ este deci egală cu a lui $\mathfrak{V}_e$, egală cu n. Baza ortonormală $\mathfrak{B}$ este comună ambelor spații $\mathfrak{V}_e$ peste D și $\mathfrak{V}_u$ peste K.

Fie z un vector oarecare al lui $\mathfrak{V}_u$, el se va scrie așadar în mod unic sub forma

$$z = \sum_j^{1,n} \zeta_j e_j, \quad \zeta_j \in K, \quad e_j \in \mathfrak{B} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Or, se pot scrie în mod unic și scalarii din K,

$$\zeta_j \in K \Longrightarrow \zeta_j = \xi_j + i\xi'_j, \quad i^2 + 1 = 0, \ \xi_j \in D, \ \xi'_j \in D,$$

deci se vede că punînd

$$x = \sum_j^{1,n} \xi_j e_j, \ x' = \sum_j^{1,n} \xi'_j e_j, \qquad e_j \in \mathfrak{B} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

obținem reprezentarea

$$z \in \mathfrak{V}_u \Longrightarrow z = x + ix', \ x \in \mathfrak{V}_e, \ x' \in \mathfrak{V}_e, \tag{16}$$

iar descompunerea lui z se verifică din nou că este unică, folosind independența liniară a vectorilor din $\mathfrak{B}$, atît peste cîmpul D, cît și peste cîmpul K, care rezultă simplu din ortonormalitatea sistemului, printr-un raționament clasic.

6°. Fie dată o transformare liniară A_e în $\mathfrak{V}_e$, peste cîmpul D. Introducem o transformare A_u în $\mathfrak{V}_u$, prin relația următoare, legată de reprezentarea (16):

$$z \in \mathfrak{V}_u \Longrightarrow A_u z = A_e x + iA_e x' \qquad (i^2 + 1 = 0). \tag{17}$$

Spunem că A_u *extinde transformarea* A_e din $\mathfrak{V}_e$ în $\mathfrak{V}_u$ și observăm, ceea ce se verifică ușor, că A_u este o transformare liniară. Într-adevăr, stabilim succesiv, bazat pe (17), că

$$z_1 \in \mathfrak{V}_u, \ z_2 \in \mathfrak{V}_u \Longrightarrow A_u(z_1 + z_2) = A_u z_1 + A_u z_2, \tag{18}$$

$$z \in \mathfrak{V}_u, \ \alpha \in K \Longrightarrow A_u(\alpha z) = \alpha \, . \, A_u z, \tag{19}$$

deoarece (19) se deduce din (18) și din rezultatul, care ca și (18) decurge direct din (17), cînd

$$\alpha = \alpha' + \alpha'', \quad \alpha' \in D, \quad \alpha'' \in D,$$

anume

$$x \in \mathfrak{V}_e, \quad \alpha \in K \Longrightarrow A_u(\alpha x) = (\alpha' + i\alpha'')\, A_e x = \alpha A_u x$$

și cînd se ține totodată seama de (16) și de liniaritatea lui A_e.

Adăugăm și următoarea observație:

Fie A_e o transformare liniară *simetrică* din $\mathfrak{V}_e$, adică satisfăcînd relația de definiție a acestei proprietăți

$$x, y \in \mathfrak{V}_e \Longrightarrow (A_e x, y) = (x, A_e y). \tag{20}$$

Se constată direct, bazat pe (17), că A_u este, în acest caz (20), o transformare liniară *hermitic simetrică* din $\mathfrak{V}_u$, adică satisface relația de definiție acestei proprietăți

$$z, t \in \mathfrak{V}_u \Longrightarrow (A_u z, t) = (z, A_u t), \tag{21}$$

deoarece în (20) și (21) sînt verificate postulatele produsului scalar, simetric în $\mathfrak{V}_e$, hermitic simetric în $\mathfrak{V}_u$, folosind reprezentarea (16).

7°. Arătăm în sfîrșit cum se obține reducerea unei forme pătratice la o sumă de pătrate, într-un spațiu euclidian real dat $\mathfrak{V}_e$, recurgînd la restricția cîmpului de scalari la subcîmpul real D; aplicată cazului mai general al spațiului unitar complex $\mathfrak{V}_u$, obținut din $\mathfrak{V}_e$ prin procedeul mai sus indicat (3°—5°).

Detaliul demonstrației se pregătește astfel:

Fie date un spațiu euclidian real $\mathfrak{V}_e$ și forma pătratică $f(x; x)$ reală, definită pentru vectorii x din $\mathfrak{V}_e$. Construim pe $\mathfrak{V}_u$, cum s-a arătat, prin extensia lui $\mathfrak{V}_e$.

Fiecare vector $z \in \mathfrak{V}_u$ satisface relația (16).

Notăm cu $f(x; y)$ forma polară simetrică a lui $f(x; x)$, adică funcționala biliniară unic determinată $f(x; y)$ din $\mathfrak{V}_e$, care satisface relația

$$f(x; y) = f(y; x) \tag{22}$$

și în care punînd $y = x$, obținem pe $f(x; x)$.

Se știe că există o transformare liniară A_e în spațiul $\mathfrak{V}_e$ unic determinată, astfel ca să avem

$$x, y \in \mathfrak{V}_e \Longrightarrow f(x; y) = (A_e x, y), \tag{23}$$

unde $(A_e x, y)$ este un produs scalar din $\mathfrak{V}_e$.

Din (22), (23) rezultă egalitatea

$$(A_e x, y) = (x, A_e y), \quad x \in \mathfrak{V}_e, \; y \in \mathfrak{V}_e \tag{24}$$

adică transformarea A_e este simetrică.

Extindem pe A_e din $\mathfrak{V}_e$ la transformarea liniară A_u din $\mathfrak{V}_u$ prin (17), care este hermitic simetrică, cum am constatat, adică avem egalitatea din (21), următoare:

$$(A_u z, t) = (z, A_u t), \quad z \in \mathfrak{V}_u, \; t \in \mathfrak{V}_u \tag{25}$$

Fie definită o funcțională biliniară hermitică*) din $\mathfrak{V}_u$ prin

$$g(z;\ t) = (A_u z, t). \tag{26}$$

Observăm că folosind (26) și una din proprietățile postulate pentru produsul scalar hermitic simetric, avem

$$(z, A_u t) = \overline{(A_u t, z)} = \overline{g(t;z)}$$

adică, ținînd seama de (25), rezultă că $g(z,\ t)$ este hermitic simetrică,

$$g(z;t) = \overline{g(t;z)}.$$

Punînd $t = z$ în (16) obținem o formă pătratică hermitică $g(z;z)$ și avem

$$z \in \mathfrak{V}_u \Longrightarrow g(z;z) = (A_u z, z). \tag{27}$$

Formula clasică (2), amintită mai sus, are loc pentru o formă pătratică hermitică $g(z;\ z)$ cînd z se reprezintă ca o combinație liniară, peste K, a vectorilor unei baze ortonormale convenabile a spațiului $\mathfrak{V}_u$ peste K. Să demonstrăm că putem alege o asemenea bază astfel ca ea să aparțină și spațiului $\mathfrak{V}_e$, peste D, obținut prin restricția cîmpului de scalari, definită mai sus, la punctul 4°.

8°. Proprietatea (2) ia în cazul amintit formularea următoare, adaptată problemei puse inițial:

Cînd forma pătratică hermitică $g(z;\ z)$ este dată în spațiul unitar n-dimensional $\mathfrak{V}_u$ peste K, obținut prin extensia cîmpului de scalari al unui spațiu n-dimensional $\mathfrak{V}_e$ peste D, există o bază ortonormală $\mathfrak{B}_e$ de vectori din $\mathfrak{V}_e \subset \mathfrak{V}_u$

$$\mathfrak{B}_e = \{ e_1, \ldots, e_n \}, \tag{28}$$

astfel ca să avem, oricare ar fi $z \in \mathfrak{V}_u$ și $j = 1, \ldots, n$

$$z = \sum_j^{1,n} \zeta_j e_j,\ \zeta_j \in K \Longrightarrow g(z;z) = \sum_j^{1,n} \mu_j |\ \zeta_j\ |^2, \tag{29}$$

unde $\mu_j \in D$.

Bazăm demonstrația acestei proprietăți pe o

Lemă. Dîndu-se transformarea simetrică A_e din spațiul euclidian $\mathfrak{V}_e$ peste D și transformarea hermitic simetrică din spațiul unitar $\mathfrak{V}_u$ peste K, obținută prin extensia cîmpului de scalari, există în $\mathfrak{V}_e \subset \mathfrak{V}_u$ o bază ortonormală comună acestor spații n-dimensionale

$$\mathfrak{B}_e = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \},$$

---

*) O funcțională biliniară hermitică $f(z;\ t)$ din $\mathfrak{V}_u$ satisface prin definiție postulatele de liniaritate pentru z și de liniaritate conjugată pentru t, adică avem aditivitatea pentru z și pentru t, precum și

$$f(\alpha z;\ t) = \alpha f(z;\ t),\ f(z;\ \alpha t) = \bar{\alpha} f(z;\ t)$$

Funcționala este *hermitic simetrică*, cînd $f(z,\ t) = \overline{f(t,\ z)}$.

formată din vectori proprii ai transformării simetrice A_e din $\mathfrak{V}_e$. Valorile proprii respective satisfac relațiile

$$A_u e_j = A_e e_j = \mu_j e_j, \qquad e_j \in \mathfrak{V}_e, \ \mu_j \in D, \ j = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

a. Într-adevăr, deoarece cîmpul K este algebric închis, polinomul caracteristic al transformării A_u din $\mathfrak{V}_u$ posedă cel puțin o rădăcină, în K, valoare proprie căreia i se atașează un vector propriu. Această proprietate are evident loc și pentru transformarea indusă de A_u într-un subspațiu invariant oarecare al lui $\mathfrak{V}_u$.

b. Fie e_j^* un vector propriu al lui A_u, $e_j^* \in \mathfrak{V}_u$. Se știe că valoarea proprie μ_j atașată este reală, căci A_u fiind hermitic simetrică, avem

$$e_j^* \in \mathfrak{V}_u \Longrightarrow A_u e_j^* = \mu_j e_j^* \Longrightarrow (A_u e_j^*, e_j^*) = (e_j^*, A_u e_j^*)$$
$$\Longrightarrow (\mu_j e_j^*, e_j^*) = (e_j^*, \mu_j e_j^*) \Longrightarrow \mu_j = \bar{\mu}_j \Longrightarrow \mu_j \in D.$$

Cum $\mathfrak{V}_u$ se obține extinzînd pe $\mathfrak{V}_e$ ca la punctul 3°, avem

$$e_j^* \in \mathfrak{V}_u \Rightarrow e_j^* = e_j + ie_j', \qquad e_j \in \mathfrak{V}_e, \quad e_j' \in \mathfrak{V}_e, \quad (i^2 + 1 = 0), \tag{31}$$

iar A_u fiind extensia în $\mathfrak{V}_u$ a lui A_e din $\mathfrak{V}_e$, avem (17)

$$A_u e_j^* = A_e e_j + iA_e e_j'. \tag{32}$$

Or, $A_u e_j^* = \mu_j e_j^*$, $\mu_j \in D$ și deci înlocuind în (31), obținem

$$A_u e_j^* = A_u (e_j + ie_j') = \mu_j (e_j + ie_j') = \mu_j e_j + i \mu_j e_j'$$

și, dat fiind unicitatea reprezentării lui $A_u e_j^*$ în $\mathfrak{V}_u$, rezultă

$$A_u e_j^* = \mu_j e_j^* \Rightarrow A_u e_j = A_e e_j = \mu_j e_j \tag{33}$$

și deci vectorul e_j, dat de (31), este un vector propriu al transformării A_e din $\mathfrak{V}_e$ și al transformării A_u din $\mathfrak{V}_u$, atașat aceleiași valori proprii $\mu_j \in D$.

c. Introducem următoarea definiție: Spunem că o transformare liniară T este *orto-invariantă* într-un spațiu liniar $\mathfrak{V}$, dotat cu un produs scalar, cînd subspațiul ortogonal complementar $\mathfrak{L}^\perp$ al unui subspațiu $\mathfrak{L}$ în $\mathfrak{V}$ este invariant față de T, dacă și numai dacă $\mathfrak{L}$ este invariant față de T.

Vom folosi proprietatea cunoscută:

Dacă T_0 este transformarea indusă de T în subspațiul $\mathfrak{L}$ din $\mathfrak{V}$, invariant față de T, proprietatea de ortoinvarianță a lui T în $\mathfrak{V}$ este *ereditară*, înțelegînd prin aceasta că T_0 este ortoinvariantă și în subspațiul $\mathfrak{L}$.

Observăm că transformarea A_u din $\mathfrak{V}_u$ fiind hermitic simetrică este ortoinvariantă în $\mathfrak{V}_u$. Într-adevăr, fie $x \in \mathfrak{L}$ și $y \in \mathfrak{L}^\perp$, iar $\mathfrak{L}$ invariant față de A_u. Avem $(A_u x, y) = (x, A_u y)$ și cum $A_u x \in \mathfrak{L}$, $y \in \mathfrak{L}^\perp$, avem $(A_u x, y) = 0$, deci $(x, A_u y) = 0$, iar x fiind oarecare în $\mathfrak{L}$, avem $A_u y \in \mathfrak{L}^\perp$ și reciproc, ceea ce confirmă ortoinvarianța lui A_u în $\mathfrak{V}_u$.

d. Definim o bază ortogonală $\mathfrak{B}_n$ comună spațiilor $\mathfrak{V}_e$ peste D și $\mathfrak{V}_u$ peste K, astfel:

Alegem întîi un vector propriu $e_1^* \in \mathfrak{V}_u$ al transformării A_u, atașat unei valori proprii reale μ_1 și definim pe $e_1 \in \mathfrak{V}_e$ ca în (31).

Avem relaţia (33), pentru $j = 1$, adică

$$A_u e_1 = A_e e_1 = \mu_1 e_1, \quad e_1 \in \mathfrak{V}_e \subset \mathfrak{V}_u$$

şi punem

$$\mathfrak{B}_1 = \{e_1\}.$$

Procedăm apoi, prin inducţie, pentru $j = 1, \ldots, n-1$ la alegerea succesivă a vectorilor e_{j+1} ai bazei $\mathfrak{B}_n$ în subspaţiile $\mathfrak{L}_j^{\perp}$, invariante faţă de A_u, unde $\mathfrak{L}_j^{\perp}$ este complementarul ortogonal al subspaţiului $\mathfrak{L}_j$ în $\mathfrak{V}_u$, generat, peste K, de sistemul ortogonal $\mathfrak{B}_j = \{e_1 \ldots, e_j)$ de vectori proprii e_r din $\mathfrak{V}_e$, satisfăcînd (33) pentru $r = 1, \ldots, j$, sistem a cărui existenţă şi ortogonalitate constituie ipoteza inducţiei.

Fie $e_{j+1}^* \in \mathfrak{L}_j^{\perp} \subset \mathfrak{V}_u$. Atunci e_{j+1}^* este ortogonal fiecărui $e_r \in \mathfrak{V}_e \subset \mathfrak{V}_u$, adică,

$$r = 1, \ldots, j \Longrightarrow (e_{j+1}^*, e_r) = 0$$

şi conform definiţiei produsului scalar din $\mathfrak{V}_e$ şi $\mathfrak{V}_u$, descompunînd ca în (31) pe e_{j+1}^*, avem

$$e_{j+1}^* = e_{j+1} + ie'_{j+1} \Longrightarrow 0 = (e_{j+1}, e_r) + i\,(e'_{j+1}, e_r), \quad (i^2 + 1 = 0)$$

şi cum produsele scalare din ultimul membru sînt reale, rezultă

$$r = 1, \ldots, j \Longrightarrow (e_{j+1}, e_r) = 0,$$

adică e_{j+1} este ortogonal bazei subspaţiului $\mathfrak{L}_j$ şi deci $e_{j+1} \in \mathfrak{L}_j^{\perp}$. Formăm sistemul ortogonal

$$\mathfrak{B}_{j+1} = \mathfrak{B}_j \cup \{e_{j+1}\}.$$

Definindu-l succesiv pentru $j = 1, \ldots, n-1$, rezultă că sistemul $\mathfrak{B}_n$ de n vectori ortogonali este o bază de vectori proprii din $\mathfrak{V}_e$ peste D, satisfăcînd (33) şi totodată o bază a lui $\mathfrak{V}_u$ peste K. Obţinem baza $\overline{\mathfrak{B}}_e$ ortonormală, normalizînd vectorii e_j din $\mathfrak{V}_n$ adică punînd

$$e_j \in \mathfrak{B}_n \Longrightarrow \bar{e}_j = \frac{e_j}{\| e_j \|}, \quad \| e_j \| = + \sqrt{(e_j, e_j)}, \quad \bar{e}_j \in \overline{\mathfrak{B}}_e$$

şi avem deci

$$A_u e_j = A_e \bar{e}_j = \mu_j \bar{e}_j \text{ unde } \bar{e}_j \in \mathfrak{V}_e, \ \mu_j \in D, \ j = 1, \ldots, n.$$

Aşadar, în noua bază $\overline{\mathfrak{B}}_e$ vectorii satisfac condiţia (30) şi este suficientă o schimbare de notaţie (prin suprimarea barelor) ca să regăsim enunţul lemei . *c.c.t.d.*

9°. Demonstraţia proprietăţii enunţate la punctul precedent urmează aproape imediat din lemă.

Fie $g(z\,;\,z)$ o formă pătratică hermitică din $\mathfrak{V}_u$, peste K, unde acest spaţiu se presupune obţinut prin extensia cîmpului de scalari al unui spaţiu $\mathfrak{V}_e$, peste D.

Folosind baza ortonormală $\mathfrak{B}_e$ din lema precedentă exprimăm pe z ca o combinație liniară, peste K, a vectorilor lui $\mathfrak{B}_e$. Avem

$$z = \sum_j^{1,n} \zeta_j e_j, \qquad \text{unde } \zeta_j \in K,\ e_j \in \mathfrak{B}_e \subset \mathfrak{V}_e \subset \mathfrak{V}_u.$$

Obținem

$$A_u z = \sum_j^{1,n} \zeta_j A_u e_j = \sum_j^{1,n} \zeta_j A_e e_j = \sum_j^{1,n} \zeta_j \mu_j e_j,$$

de unde, δ_{jk} fiind simbolul lui Kronecker, avem, din (27)

$$g(z;z) = (A_u z, z) = \left(\sum_j^{1,n} \zeta_j \mu_j e_j, \sum_k^{1,n} \zeta_k e_k\right)$$

$$= \sum_j^{1,n} \sum_k^{1,n} \mu_j \zeta_j \bar{\zeta}_k (e_j, e_k) = \sum_j^{1,n} \sum_k^{1,n} \mu_j \zeta_j \zeta_k \delta_{jk}$$

$$= \sum_j^{1,n} \mu_j \zeta_j \bar{\zeta}_j = \sum_j^{1,n} \mu_j |\zeta_j|^2, \quad \mu_j \in D,$$

adică obținem relația (29).

10°. Din teorema precedentă, obținem în particular rezultatul:

Cînd forma pătratică simetrică $f(x;x)$ este dată în spațiul euclidian real $\mathfrak{V}_e$ peste D, există o bază ortonormală $\mathfrak{B}_e$ de vectori din $\mathfrak{V}_e$,

$$\mathfrak{B}_e = \{e_1, \ldots, e_n\}, \tag{34}$$

astfel ca să avem, oricare ar fi $x \in \mathfrak{V}_e$ și $j = 1, \ldots, n$,

$$x = \sum_j^{1,n} \xi_j e_j,\ \xi_j \in D \Rightarrow f(x;x) = \sum_j^{1,n} \mu_j \xi_j^2,\ \mu_j \in D. \tag{35}$$

Demonstrație. Extindem pe $\mathfrak{V}_e$ peste D pînă la spațiul $\mathfrak{V}_u$ peste K, ca la punctele 3°, 4°. Din forma polară $f(x,y)$ de la punctul 7°, obținem pe $f(x;x)$ punînd $y = x$, ceea ce determină în mod unic transformarea A_e din $\mathfrak{V}_e$, pentru care

$$f(x;x) = (A_e x, x). \tag{36}$$

Extinzînd apoi pe A_e pînă la transformarea A_u din $\mathfrak{V}_u$, ca la punctele 6°, 7°, obținem pe $g(z;z)$ ca o formă pătratică hermitică

$$g(z;z) = (A_u z, z). \tag{37}$$

Aplicăm lui $g(z;z)$ teorema de la punctul 8° și avem relația (29). Or, făcînd în (37), $z = x$, observăm că $A_u z = A_e x$ și deci prin restricția cîmpului de scalari, obținem

$$g(x;x) = f(x;x). \tag{38}$$

Punînd $z = x$, înlocuim (38) în (29), după ce observăm că unicitatea reprezentării vectorilor din $\mathcal{V}_u$ în baza $\mathcal{B}_e$, comună cu a lui $\mathcal{V}_e$, are drept consecinţă

$$z = x \Longrightarrow \sum_{j}^{1,n} \zeta_j e_j = \sum_{j}^{1,n} \xi_j e_j \Longrightarrow \zeta_j = \xi_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

şi obţinem formula (35).

c.c.t.d.

ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

РЕЗЮМЕ

Задача о приведении квадратичных форм $f(z; z)$ к сумме квадратов рассматривается обычно отдельно для случая, когда вектор z принадлежит *унитарному комплексному* пространству $\mathcal{V}_u$ и отдельно для *действительного эвклидового* пространства $\mathcal{V}_e$, причем формальные результаты одинаковы. Согласно Хальмошу классический метод исходит из аналогий с разложением многочлена над K или над D на непроводимые множители, где K, D — соответственно комплексное и действительное поле.

Настоящая работа сводит следующим образом действительный случай к частной реализации комплексного случая.

Производится подходящее расширение $\mathcal{V}_e$ (над D) до $\mathcal{V}_u$ (над K), таким образом, чтобы линейные операции и скалярное произведение векторов из $\mathcal{V}_e$ сходились в $\mathcal{V}_u$. Более того, каждый ортонормированный базис в $\mathcal{V}_e$ является также и базисом в $\mathcal{V}_u$ и любой $z \in \mathcal{V}_u$ представляется одинаковым образом (15), (16). Любой линейный оператор A_e из $\mathcal{V}_e$ расширяется до A_u в $\mathcal{V}_u$ (17) и если A_e является симметрическим, то таким же является и оператор A_u. Любой квадратичной форме $f(x; x)$ из $\mathcal{V}_e$ (над D) соответствует эрмитова квадратичная форма $g(z; z)$ такая, что из $z = x \in \mathcal{V}_e$ следует $g(x; x) = f = (x; x)$.

При помощи леммы устанавливается, что если A_u получается при предыдущем расширении из A_e, то существует ортонормированный базис $\mathcal{B}_e$ пространства $\mathcal{V}_e$ (над D), состоящий из векторов e_j $(j = 1, \ldots, n)$, причем $\mathcal{B}_e$ является также и базисом $\mathcal{V}_u$ (над K), где e_j являются собственными векторами A_e и A_u, принадлежащими одинаковым действительным собственным значениям.

Получаем представление эрмитовой квадратичной формы $g(z; z)$ в виде суммы квадратов (29), сводящееся к (35) в действительном случае, если положить $z = x \in \mathcal{V}_e$.

RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES

RÉSUMÉ

Le problème de la réduction des formes quadratiques $f(z;z)$ à une somme de carrés est d'habitude traité séparément, selon que le vecteur z appartient à un espace *unitaire complexe* $\mathfrak{V}_u$ ou à un espace *euclidien réel* $\mathfrak{V}_e$, les résultats formels étant similaires. Selon Halmos, la méthode classique s'inspire de l'analogie de la décomposition d'un polynôme sur K ou sur D, en facteurs irréductibles, où K, D sont, respectivement, les champs complexe ou réel.

Le présent travail ramène le cas réel à une réalisation particulière du cas complexe, comme suit :

On procède à une extension convenable de $\mathfrak{V}_e$ (sur D) à $\mathfrak{V}_u$ (sur K), telle que les opérations linéaires et le produit scalaire des vecteurs de $\mathfrak{V}_e$ se retrouvent en $\mathfrak{V}_u$. De plus, toute base orthonormale de $\mathfrak{V}_e$ en est aussi une pour $\mathfrak{V}_u$ et tout $z \in \mathfrak{V}_u$ se représente d'une manière unique (15), (16). Tout opérateur linéaire A_e de $\mathfrak{V}_e$ s'étend à un A_u de $\mathfrak{V}_u$ (17) et si A_e est symétrique, A_u l'est aussi. A toute forme quadratique $f(x;x)$ de $\mathfrak{V}_e$ (sur D) correspond une forme quadratique hermitienne $g(z;z)$, telle que $z = x \in \mathfrak{V}_e$ implique $g(x;x) = f(x;x)$.

Un lemme établit que si A_u s'obtient de A_e par l'extension précédente, il existe une base orthonormale $\mathfrak{R}_e$ de $\mathfrak{V}_e$ (sur D), formée de vecteurs e_j $(j = 1, \ldots, n)$ et $\mathfrak{R}_e$ est aussi une base de $\mathfrak{V}_u$ (sur K), les e_j étant des vecteurs propres de A_e et de A_u, appartenant aux mêmes valeurs propres μ_j, réelles.

Il en résulte la représentation de la forme quadratique hermitienne $g(z;z)$ en somme de carrés, par (29), qui se réduit à (35), dans le cas réel, en posant $z = x \in \mathfrak{V}_e$.

BIBLIOGRAFIE

1. BOURBAKI, *Algèbre multilinéaire*. Paris, 1948, § 2, **2**, 24.
2. ГЕЛЬФАНД И. М., *Лекции по линейной алгебре*. Гостехтеориздат, Москва, 139,142 (1951).
3. HALMOS, PAUL R., *Finite vector spaces*. Princeton, 1955, p. 121.
4. JACOBSON, NATHAN, *Lectures in abstract algebra*. New York, **2**, 156, 158 (1953).
5. VAN DER WAERDEN, B. L. *Moderne Algebra*, Berlin, **2**, 134 (1940).

ASUPRA TEORIEI MIȘCĂRILOR CONICE ÎN CAZUL ARIPILOR SUBȚIRI DE SECȚIUNE DATĂ *)

DE

ELENA MURGULESCU

INTRODUCERE

Scopul lucrării de față este de a da o tratare unitară teoriei mișcărilor conice în cazul aripii subțiri de secțiune dată.

Din punct de vedere matematic teoria mișcărilor conice revine la rezolvarea unor probleme la limită relative la clasa soluțiilor omogene de grad zero, ale ecuației undelor

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\beta = \text{constantă reală}).$$

Problema aceasta a fost deja considerată de către S m i r n o v și S o b o l e v în publicațiile Institutului Seismologic U.R.S.S. în 1932; metoda lor se găsește expusă în Cursul de matematici superioare al lui S m i r n o v din 1933 [44]. Dar teoria a luat o amplă dezvoltare numai în momentul cînd și-a găsit o importantă aplicație în aerodinamică. Ea a fost stabilită în mod cu totul independent în 1943 de A. B u s e m a n n [5], care a formulat ipoteza mișcării supersonice conice în jurul unei aripi conice. Cercetările începute de A. B u s e m a n n au fost reluate de către numeroși cercetători care au studiat în detaliu cazul sectorului unghiular plan simetric sau disimetric, în toate ipotezele de plasare ale lui față de conul caracteristic al vîrfului și au dezvoltat aplicațiile de interes aerodinamic.

Se pare că B u s e m a n n însuși nu și-a dat seama de posibilitățile vaste de aplicare ale metodei sale, mărginindu-se numai la tratarea cazului conului circular de înclinare nulă față de curentul neperturbat. Cazul

*) Dizertație prezentată Facultății de matematică și fizică, Universitatea „C. I. Parhon", 1959.

sectorului unghiular plan (aripa unghiulară plană) simetric, situat în întregime în interiorul conului caracteristic al vîrfului a fost studiat întîi de R. T. Jones [30] pentru deschiderea infinit mică şi apoi de H. J. Stewart [46] pentru cazul deschiderii finite care a utilizat o metodă de reprezentare conformă destul de complicată. M. J. Gurevici [20], [21], a dat o tratare amănunţită a aripii unghiulare plane disimetrice considerînd ipotezele următoare :

a) Aripa situată în interiorul conului caracteristic al vîrfului.

b) Aripa depăşind parţial conul caracteristic şi avînd un bord de atac supersonic iar celălalt bord de atac subsonic.

c) Aripa depăşind parţial conul caracteristic, cu un bord de atac supersonic şi un bord de fugă subsonic.

d) Aripa depăşind total conul caracteristic şi avînd ambele borduri de atac supersonice.

L. Beschkine [2] a studiat de asemenea cazurile de mai sus în vederea aplicaţiilor la suprapunerea mişcărilor de tip conic pentru obstacole de formă dată. O metodă elegantă de obţinere a formulelor lui A. Busemann a fost indicată de H. Poritsky [40], [41] prin reducerea ecuaţiei undelor la ecuaţia lui Laplace şi căutarea soluţiilor armonice omogene de grad zero. Utilizînd sistemul de coordonate sferice ρ, θ, ψ, funcţiile armonice căutate nu depind decît de longitudinea ψ şi colatitudinea θ. Dacă se trece la coordonatele stereografice, ele devin funcţii armonice de aceste două coordonate. H. Poritsky a studiat de asemenea proprietăţile transformării lui Busemann. Teoria generală a mişcărilor conice a fost reluată de P. Germain [17] în teza sa de doctorat din 1948, făcînd o analiză amănunţită a ipotezelor care stau la baza acestei teorii şi insistînd asupra principiului singularităţilor minime din expresia funcţiilor $U(\zeta)$, $V(\zeta)$, $W(\zeta)$, funcţii despre care se va vorbi la capitolul I. P. Germain a dat o teorie generală a mişcărilor conice relative la obstacole conice de deschidere foarte mică şi cu secţiune oarecare, regăsind în particular cazul aripii unghiulare plane de deschidere infinit mică care fusese studiat anterior de R. T. Jones [30]. În legătură cu teoria mişcărilor conice relative la plăci unghiulare plane, P. Germain [17] după ce stabileşte pe altă cale soluţia referitoare la diferitele cazuri deja studiate de Gurevici, este primul care consideră problema aripilor unghiulare subţiri de secţiune dată deosebind „cazul simetric" de „cazul portant". El rezolvă problema prin suprapunere de soluţii elementare în „cazul simetric" cînd aripa este interioară conului caracteristic sau cînd aripa depăşeşte parţial conul caracteristic al vîrfului şi verifică a posteriori rezultatele obţinute. P. Germain studiază de asemenea compunerea mişcărilor conice şi aplicaţiile sale la cazul avioanelor supersonice. El dezvoltă teoria mişcărilor conice în jurul aripilor plăci plane în formă de diedru, interioare conului caracteristic. Cazul cînd aripile în diedru traversează acest con, fusese deja studiat de R. M. Snow [45].

În tratarea problemelor la limită care intervin în teoria mişcărilor conice relative la aripi unghiulare plane se face de obicei ipoteza simplificatoare că aripa se găseşte la incidenţă nulă, incidenţa efectivă figurînd numai în condiţiile la limită. R. C. F. Bartels şi O. Laporte [1]

pe de o parte și C. Iacob [27] pe de alta, au studiat problema la limită fără a face această simplificare. Din studiul făcut rezultă că ipoteza simplificatoare admisă de obicei este complet justificată. Cu acest prilej C. Iacob [27], [28] limitîndu-se la cazul aripii situate în interiorul conului caracteristic al vîrfului a dat un nou procedeu simplificat de rezolvare a problemei la limită, în planul variabilei $\zeta = \xi + i\eta$, care nu mai necesită alte reprezentări conforme. O metodă analoagă a fost utilizată de noi pentru cazul cînd aripa depășește parțial sau total conul caracteristic al vîrfului, cu care prilej s-au pus în evidență apariția unor discontinuități pe conul caracteristic, ceea ce nu reiese din teoria simplificată [34]. Metoda dezvoltată de P. Germain în cazul aripilor conice de deschidere foarte mică a fost aplicată de noi la cazul aripilor unghiulare plane simetrice prevăzute cu un fuzelaj conic circular [36]. Cazul cînd fuzelajul conic are o secțiune oarecare simetrică față de planul aripii a fost apoi tratat de C. Iacob [29]. Este locul să menționăm aici că problema mișcării conice în jurul unei aripi unghiulare plane simetrice care depășește conul caracteristic al vîrfului și este prevăzut cu un fuzelaj conic circular a fost studiat de N. Patraulea [38] cu ajutorul unor dezvoltări în serie. În colaborare cu D. Pantazopol, N. Patraulea [39] a cercetat și cazul aripii avînd la unul din capete un con aproape circular. Vom menționa de asemenea că în două lucrări, dintre care prima datează din 1952, noi am studiat problemele la limită care se prezintă în teoria mișcărilor conice relative la aripi conice subțiri de secțiune dată, rezolvînd atît „cazul simetric" cît și „cazul portant" [35] pentru aripa care depășește conul lui Mach. Aceeași problemă a fost studiată tot în 1952 pentru cazul aripii unghiulare interioară conului caracteristic al vîrfului, de C. Iacob [29] în cursul său de la Facultatea de matematică și fizică, utilizînd metodele dezvoltate în lucrări anterioare [25], [26].

Teoria mișcărilor conice a fost reluată în 1952 de E. Carafoli [6] care consideră la început cazul aripii unghiulare plane în diferite ipoteze deja amintite și, întrebuințînd un limbaj hidrodinamic adecvat tehnicienilor, regăsește soluțiile date de Stewart și Gurevici pe o altă cale, cu ajutorul unor reprezentări conforme și distribuții de singularități hidrodinamice izolate ca „izvorul" și „dublul izvor". Aceleași procedee sînt apoi extinse la cazul aripilor subțiri de secțiune dată, deosebindu-se cazul aripilor pe care acest autor le numește „groase" corespunzătoare cazului „simetric" și cazul aripilor „subțiri" care corespund „cazului portant" [7]. Menționăm că prin terminologia pe care am adoptat-o noi, înțelegem prin aripă subțire o aripă a cărei secțiune prin planul $z = 1$ este o curbă închisă sau un arc de curbă de formă oarecare astfel că distanțele punctelor ei la axa OX sînt foarte mici. Prin urmare atît aripile „groase" cît și aripile „subțiri" considerate de E. Carafoli [7] intră în categoria aripilor subțiri în sensul de mai sus și ele se deosebesc doar prin faptul că în rezolvarea problemelor la limită avem de-a face în cazul întîi cu date disimetrice iar în al doilea cu date simetrice față de segmentul frontieră care simbolizează aripa.

În colaborare cu B. Horovitz [9], E. Carafoli a considerat de asemenea cazul aripilor cruciforme sau prevăzute cu aripi marginale,

extinzînd cercetările lui P. Germain din cazul aripilor în diedru. În colaborare cu M. Ionescu [10], E. Carafoli a studiat de asemenea mişcări supersonice în jurul unor aripi dublu conice care însă nu au legătură directă cu lucrarea de faţă.

E. Carafoli şi S. Săndulescu [12] au cercetat apoi influenţa aripioarelor în cazul aripii triunghiulare în curent supersonic, problemă a cărei cercetare a început-o P. Germain în teza sa. În colaborare cu L. Dumitrescu [11], E. Carafoli a cercetat de asemenea cazul aripilor dublu conice delta subţiri.

Printre numeroasele lucrări consacrate teoriei mişcărilor conice vom mai aminti *) pe acelea ale lui : P. A. Lagerstrom [31] care cercetează în special cazul aripilor infinit subţiri (plane) în diferitele ipoteze, discutînd unicitatea soluţiilor ; A. Robinson [42] care a studiat aripa triunghiulară plană disimetrică, C. E. Brown [3] studiază la fel cazul aripii triunghiulare însă cu metoda surselor şi dubletelor ; W. D. Hayes [22] consideră mişcările conice cu simetrie de rotaţie, obţinînd soluţii prin metoda separării variabilelor ; în colaborare cu S. H. Browne şi J. R. Lew [23] el studiază aripile triunghiulare ; H. J. Stewart [47] studiază în colaborare cu A. E. Puckett performanţele aripilor triunghiulare. W. D. Hayes [24] în colaborare cu R. C. Roberts şi N. Haaser studiază mişcările conice generalizate.

Tot în legătură cu teoria mişcărilor conice menţionăm de asemenea lucrările lui S. H. Browne, L. Friedmann, I. Hodes [4], apoi pe acele ale lui O. Laporte, R. C. F. Bartels şi R. C. O. Rourke [32]. În acelaşi domeniu de cercetări vom semnala şi lucrările P. Germain şi D. Vallée [19], M. Fenain şi D. Vallée [14], [15] asupra unor anumite categorii de aripi ; R. Legendre [33] atacă recent aceeaşi problemă a aripilor de secţiune dată, căutînd explicitarea soluţiilor cu ajutorul transcendentelor eliptice.

Teoria mişcărilor conice a făcut şi obiectul unor expuneri de ansamblu în cîteva tratate recente, în care se expune stadiul cercetărilor duse pînă la data apariţiei lor. Vom cita în primul rînd excelenta expunere dată de F. I. Frankl şi F. A. Karpovich [16] în anul 1948, în care se dă o vedere de ansamblu asupra problemelor consacrate aerodinamicii aripii subţiri şi un capitol este consacrat mişcărilor conice. În 1952, C. Iacob [28] în tratatul citat dă o expunere generală a teoriei mişcărilor conice, rataşînd problemele care se pun la problema lui Dirichlet pentru funcţiile armonice. O bibliografie foarte completă a lucrărilor consacrate teoriei mişcărilor conice se găseşte în cartea lui G. N. Ward [48] publicată în anul 1955. În această carte sînt expuse şi cercetările lui S. V. Falkovici, E. A. Krasilscikova şi G. N. Ward, asupra aripii de formă oarecare. În cartea editată de W. R. Sears [43] se găseşte un amplu capitol redactat de M. A. Heaslet şi H. Lomax consacrat mişcărilor supersonice, cu referire şi la mişcările conice.

*) De aceste lucrări nu am putut lua cunoştinţă direct ci numai prin recenziile din Mathematical Reviews.

În fine în anul 1957, într-un tratat consacrat aerodinamicii vitezelor mari, E. Carafoli [8] dă o amplă dezvoltare teoriei mişcărilor conice, cu specială dezvoltare a cercetărilor sale şi ale colaboratorilor săi.

După cum am amintit mai sus, numai unii dintre cercetătorii citaţi au considerat cazul aripii subţiri de secţiune dată, pentru poziţii anumite faţă de conul caracteristic al vîrfului.

În lucrarea de faţă ne propunem să reluăm cercetările noastre anterioare, din cazul aripii subţiri de secţiune dată, dînd o tratare unitară acestei probleme în toate cazurile. Cap. I se ocupă cu stabilirea formulelor generale ale teoriei mişcărilor linearizate şi a condiţiilor la limită la care conduce această teorie. Rezolvarea acestor probleme la limită formează obiectul cap. II în cazul că aripile sînt limitate de borduri de atac subsonice sau supersonice. Cap. III este destinat rezolvării problemelor la limită în cazul că aripile prezintă şi borduri de fugă subsonice sau supersonice.

În toate cazurile considerate, preocuparea noastră se îndreaptă spre determinarea funcţiunii $V(\zeta)$ relativ la care se pun direct condiţiile la limită.

CAPITOLUL I

PROBLEMA MIŞCĂRILOR CONICE. CONDIŢIILE LA LIMITĂ

1. Ecuaţia mişcării linearizate

Să considerăm mişcarea în aer a unei aripi de formă conică cu o viteză de translaţie constantă mai mare decît viteza sunetului. Revine la acelaşi lucru de a presupune că aripa este imobilă şi că curentul de aer

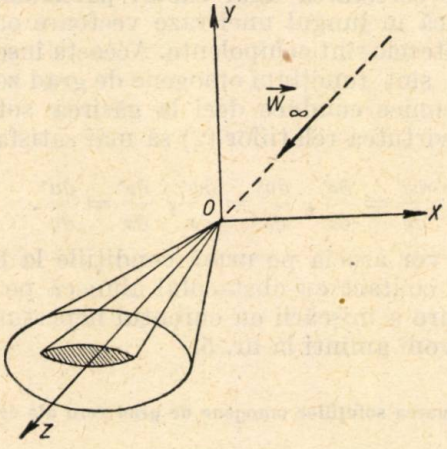


Fig. 1

este animat de o viteză opusă la infinit. Presupunem conul, constituind aripa, foarte subţire (con aproape turtit) şi de incidenţă mică aşa încît să putem considera că mişcarea aerului în jurul aripei este foarte puţin perturbată de prezenţa aripii (fig. 1).

Să luăm un sistem de axe de coordonate de sens direct, cu originea O în vîrful conului astfel ca axa Oz să fie paralelă și de același sens cu viteza $\overline{W}_\infty$ a curentului. În aceste condiții proiecțiile vitezei unei particule fluide pe axe se pot scrie :

$$u = u', \; v = v', \; w = W_\infty + w' \tag{1}$$

unde

$$u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w' = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{2}$$

sînt componentele vitezei de perturbație, datorită prezenței aripii și care sînt presupuse foarte mici. În virtutea ecuației de continuitate, potențialul $\varphi(x, y, z)$ al vitezei de perturbație verifică ecuația cu derivate parțiale lineară

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{3}$$

unde $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$, $M = \frac{W_\infty}{c_\infty}$, c_∞ fiind viteza de propagare a sunetului la infinit ; M se mai numește numărul lui Mach și avem $M > 1$ mișcarea fiind supersonică. Componentele u', v', w' ale vitezei de perturbație verifică și ele ecuația (3) după cum se constată ușor.

2. Ipoteza mișcărilor conice

Ipoteza fundamentală a mișcărilor conice este aceea care a fost formulată de către aerodinamicianul A. Busemann (1943) și care i-a fost sugerată de cercetarea unor cazuri particulare. Această ipoteză revine la a admite că în lungul unei raze vectoare oarecare trecînd prin vîrful O al conului vitezele sînt echipolente. Aceasta înseamnă că $u'(x, y, z)$, $v'(x, y, z)$, $w'(x, y, z)$ sînt funcțiuni omogene de grad zero. Problema determinării mișcărilor conice conduce deci la găsirea soluțiilor u', v', w' ale ecuației (3) care în virtutea relațiilor (2) să mai satisfacă și condițiile

$$\frac{\partial w'}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial z}, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial y}. \tag{2'}$$

La aceasta se vor asocia pe urmă condițiile la limită exprimînd că particulele fluide în contact cu obstacolul alunecă pe obstacol precum și condițiile de racordare a mișcării cu curentul neperturbat din fața obstacolului despre care vom aminti la nr. 5.

3. Determinarea soluțiilor omogene de grad zero ale ecuației (3)

Fie $\Phi(x, y, z)$ o soluție omogenă și de grad zero a ecuației (3) ; valorile ei vor fi cunoscute dacă le cunoaștem în planul $z = 1$. Aceasta ne conduce să facem schimbarea de variabilă

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{1} = Z, \tag{4}$$

adică

$$x = XZ,\ y = YZ,\ z = Z \tag{5}$$

unde X, Y, 1 reprezintă coordonatele intersecţiei razei vectoare care trece prin punctul de coordonate (x, y, z) cu planul $z = 1$ (fig. 2).

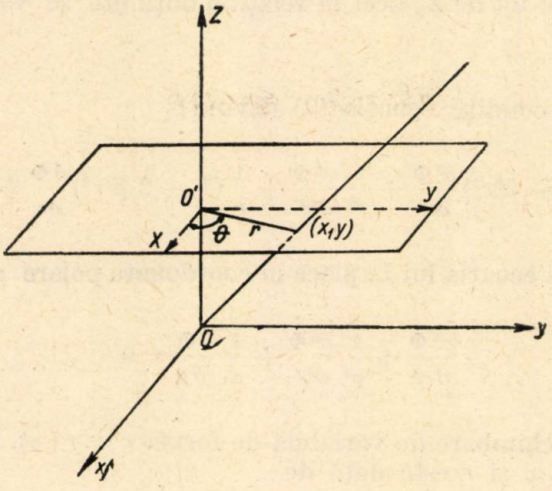


Fig. 2

Să considerăm în planul $z = 1$ coordonatele polare (r, θ) punînd

$$\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Din (5) şi (6) rezultă

$$x = r\cos\theta . Z,\ y = r\sin\theta . Z,\ z = Z, \tag{7}$$

de unde se deduce uşor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\cos\theta}{Z},\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\sin\theta}{Z},\ \dfrac{\partial r}{\partial z} = -\dfrac{r}{Z} \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{\sin\theta}{rZ},\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{rZ},\ \dfrac{\partial\theta}{\partial z} = 0\,. \end{cases} \tag{8}$$

Prin schimbarea de variabilă (7), $\Phi(x, y, z)$ devin o funcţie de r, θ, Z, pe care o notăm prin $\Phi(r, \theta, Z)$.

În virtutea formulelor (8) se găseşte uşor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \dfrac{\cos\theta}{Z}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{rZ}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = \dfrac{\sin\theta}{Z}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{rZ}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = -\dfrac{r}{Z}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial Z}. \end{cases} \tag{9}$$

Apoi în virtutea relațiilor (9) în care se înlocuiește Φ respectiv prin $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, se calculează derivatele de ordinul al doilea $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$. Însă deoarece Φ este presupusă omogenă și de grad zero, ea nu va depinde decît de r și θ și nu de Z, deci în relațiile obținute se va pune $\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0$ și $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = 0$.

În aceste condiții ecuația (3) devine :

$$(1 - \beta^2 r^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} (1 - 2\beta^2 r^2) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

și ea se reduce la ecuația lui Laplace în coordonate polare ρ și θ,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0$$

dacă se face o schimbare de variabilă de forma $r = r(\rho)$. Se găsește ușor că relația între ρ și r este dată de

$$\rho = \frac{\beta r}{1 + \sqrt{1 - \beta^2 r^2}}. \tag{10}$$

Prin urmare $\Phi(r, \theta)$ este o funcție armonică de variabilele $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$ și dacă punem $\zeta = \xi + i\eta$, atunci putem scrie

$$\Phi = \mathcal{R}e \{F(\zeta)\} \tag{11}$$

unde $F(\zeta)$ este o funcție analitică de variabilă complexă ζ; simbolul $\mathcal{R}e$ { } înseamnă că se ia parte reală a expresiei din paranteză. Avem

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{\beta (r \cos \theta + ir \sin \theta)}{1 + \sqrt{1 - \beta^2 r^2}}$$

de unde, în virtutea formulelor (6)

$$\zeta = \frac{\beta (X + iY)}{1 + \sqrt{1 - \beta^2 (X^2 + Y^2)}}. \tag{12}$$

Deci prin intermediul formulei (11) soluțiile omogene de grad zero ale ecuației (3) se exprimă în funcție de X, Y, coordonatele carteziene ale intersecției razei vectoare cu planul $z = 1$ (fig. 2) prin mijlocirea unei funcții analitice arbitrare $F(\zeta)$.

4. Expresia generală a vitezei de perturbaţie

Rezultatele de la nr. 3 ne conduc să scriem

$$u' = \mathcal{R}e\{U(\zeta)\},\quad v' = \mathcal{R}e\{V(\zeta)\},\quad w' = \mathcal{R}e\{W(\zeta)\}. \tag{13}$$

Însă mişcarea fiind irotaţională formulele (2') impun ca să avem

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

ceea ce atrage anumite relaţii între funcţiile analitice $U(\zeta)$, $V(\zeta)$, $W(\zeta)$, pe care le vom preciza acum. Se găseşte uşor din formulele (5) că pentru orice funcţie derivabilă de X, Y avem

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial X},\quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial Y},\quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{Z}\left(X\frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial}{\partial Y}\right) \tag{15}$$

Relaţiile (15) conduc la următoarele condiţii

$$\begin{cases} \mathcal{R}e\left\{\dfrac{dW}{d\zeta}\dfrac{\partial\zeta}{\partial Y}\right\} = -\mathcal{R}e\left\{\left(X\dfrac{\partial\zeta}{\partial X} + Y\dfrac{\partial\zeta}{\partial Y}\right)\dfrac{dV}{d\zeta}\right\} \\ \mathcal{R}e\left\{\dfrac{dW}{d\zeta}\dfrac{\partial\zeta}{\partial X}\right\} = -\mathcal{R}e\left\{\left(X\dfrac{\partial\zeta}{\partial X} + Y\dfrac{\partial\zeta}{\partial Y}\right)\dfrac{dU}{d\zeta}\right\} \\ \mathcal{R}e\left\{\dfrac{dV}{d\zeta}\dfrac{\partial\zeta}{\partial X}\right\} = \mathcal{R}e\left\{\dfrac{dU}{d\zeta}\dfrac{\partial\zeta}{\partial Y}\right\} \end{cases} \tag{16}$$

Din (12) se deduce printr-un calcul uşor

$$\frac{\partial\zeta}{\partial X} = \frac{\beta}{2}\frac{\zeta^2+1}{\sqrt{1-\beta^2(X^2+Y^2)}},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial Y} = -\frac{i\beta}{2}\frac{\zeta^2-1}{\sqrt{1-\beta^2(X^2+Y^2)}}.$$

Apoi

$$X\frac{\partial\zeta}{\partial X} + Y\frac{\partial\zeta}{\partial Y} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\beta^2(X^2+Y^2)}}.$$

Condiţiile (16) devin

$$\begin{cases} \mathcal{R}e\left\{-\dfrac{i\beta}{2}(\zeta^2-1)\dfrac{dW}{d\zeta}\right\} = -\mathcal{R}e\left\{\zeta\dfrac{dV}{d\zeta}\right\} \\ \mathcal{R}e\left\{\dfrac{\beta}{2}(\zeta^2+1)\dfrac{dW}{d\zeta}\right\} = -\mathcal{R}e\left\{\zeta\dfrac{dU}{d\zeta}\right\} \\ \mathcal{R}e\left\{(\zeta^2+1)\dfrac{dV}{d\zeta}\right\} = -\mathcal{R}e\left\{i(\zeta^2-1)\dfrac{dU}{d\zeta}\right\} \end{cases} \tag{17}$$

ceea ce atrage

$$\begin{cases} U(\zeta) = -\frac{\beta}{2}\int\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\frac{dW}{d\zeta}d\zeta \\ V(\zeta) = \frac{i\beta}{2}\int\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{dW}{d\zeta}d\zeta \end{cases} \tag{18}$$

$W(\zeta)$ rămînînd arbitrar.

Relațiile (13) împreună cu (18) ne dau expresia generală a vitezei de perturbație.

5. Condițiile la limită pentru cazul aripii interioare conului lui Mach al vîrfului

O primă condiție este aceea că pe suprafața aripii, viteza este tangentă. Această condiție se exprimă prin relația

$$\bar{v}.\bar{n} = \alpha u' + \beta v' + \gamma(W_\infty + w') = 0 \tag{19}$$

unde (α, β, γ) este vectorul normal la aripă în punctul considerat. Este suficient a scrie această condiție pentru $z = 1$. Dacă reprezentăm prin $x = X(t)$, $y = Y(t)$, $z = 1$ coordonatele unui punct al secțiunii (C) a aripii conice prin planul $z = 1$ (fig. 3), putem să luăm

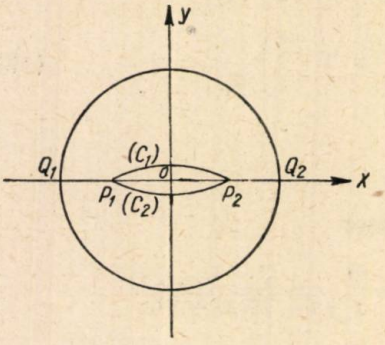


Fig. 3

$$\bar{n} = -\frac{dY}{dt}\bar{i} + \frac{dX}{dt}\bar{j} + \left(X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}\right)\bar{k}.$$

Deci (19) devine

$$-\frac{dY}{dt}u' + \frac{dX}{dt}v' + \left(X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}\right)(W_\infty + w') = 0. \tag{20}$$

Potrivit unei reguli constante admise în aerodinamica supersonică, anume regula semnalelor interzise, perturbările provocate de prezența aripii nu se pot transmite decît în vecinătatea aripii și în aval, iar nu la infinit în amonte, unde curentul fluid este uniform și de viteză $\overline{W}_\infty$. Dacă admitem ipoteza lui Busemann a continuității cîmpului de viteze, atunci perturbările produse de prezența aripii vor afecta numai accelerațiile adică derivatele de ordinul al doilea ale potențialului vitezei φ, care vor prezenta salturi pe suprafața care separă zona perturbată de cea neperturbată.

Or, din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea se știe că aceste salturi pot avea loc numai pe suprafețele caracteristice;

în cazul ecuației (3) suprafețele caracteristice $S(x, y, z) = 0$ sînt definite de ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \beta^2\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 0. \tag{21}$$

Această ecuație admite integrala completă

$$\sum(x, y, z) \equiv z - z_0 \pm \beta\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 0$$

ale cărei înfășurătoare generează suprafețele caracteristice cînd punctul (x_0, y_0, z_0) descrie o curbă. Suprafețele $\sum(x, y, z) = 0$ reprezintă conuri de rotație, cu vîrful în punctul de coordonate (x_0, y_0, z_0), avînd axele paralele cu axa Oz și semideschiderea egală cu unghiul α definit de $\sin\alpha = \frac{1}{M}$.

Să admitem că aripa conică este situată în întregime în interiorul conului caracteristic corespunzător vîrfului O (fig. 1). Atunci însăși suprafața acestui con este sediul discontinuităților derivatelor parțiale de ordinul al doilea. Prin urmare, pe suprafața

$$z = \beta\sqrt{x^2 + y^2} \tag{22}$$

va trebui să avem condițiile de racordare ale derivatelor de ordinul întîi ale lui φ. Este suficient să scriem aceste condiții în planul $z = 1$. Prin urmare, în acest plan pe cercul lui Mach

$$X^2 + Y^2 = \frac{1}{\beta^2} \tag{23}$$

avem relațiile

$$u' = v' = w' = 0 \tag{24}$$

Rezumînd, în planul $z = 1$ avem de determinat funcțiile

$$u'(X, Y),\ v'(X, Y),\ w'(X, Y)$$

definite cu ajutorul formulelor (18) care să verifice condițiile (20) și (24) pe frontiere.

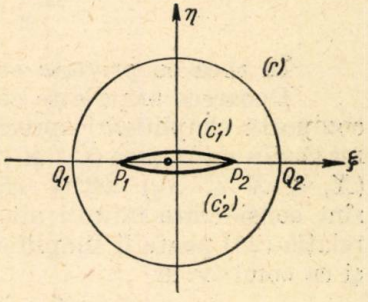


Fig. 4

Dacă trecem la planul $\zeta = \xi + i\eta$ cu ajutorul formulei (12), secțiunea (C) se va transforma într-o curbă (C'), în timp ce cercul (23) se va transforma în cercul (Γ) definit de $|\zeta| = 1$. Curba (C') este interioară acestui cerc (fig. 4).

Funcțiile u', v', w' devin funcțiuni armonice de ξ și η care vor trebui să satisfacă condițiile la limită transformate din (20) și (24).

Din (12) se deduce înmulțind în membrul doi cu $1 - \sqrt{1 - \beta^2(X^2 + Y^2)}$ și presupunînd în mod esențial că $1 - \beta^2(X^2 + Y^2) > 0$

$$\beta\bar{\zeta}(X + iY) = 1 - \sqrt{1 - \beta^2(X^2 + Y^2)}\,.$$

Dar (12) se mai scrie

$$\frac{\beta}{\zeta}(X+iY)=1+\sqrt{1-\beta^2(X^2+Y^2)}\,.$$

De aici prin adunare rezultă ușor

$$X+iY=\frac{2}{\beta}\,\frac{\zeta}{1+\zeta\bar{\zeta}}\,, \tag{25}$$

de unde

$$dX+idY=\frac{2}{\beta}\,\frac{d\zeta-\zeta^2 d\bar{\zeta}}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2}\,. \tag{26}$$

Pe de altă parte condiția (20) se mai poate scrie

$$\mathcal{I}m\{(u'-iv')(dX+idY)\}=(W_\infty+w')\,\mathcal{I}m\{(X-iY)(dX+idY)\} \tag{20'}$$

Conform formulei (26) pe curba (C') avem

$$\mathcal{I}m\{(u'-iv')(d\zeta-\zeta^2 d\bar{\zeta})\}=\frac{2}{\beta}(W_\infty+w')\,\mathcal{I}m\{\bar{\zeta}\,d\zeta\}$$

sau

$$u'[(1+\xi^2-\eta^2)\,d\eta-2\xi\eta d\xi]-v'[(1-\xi^2+\eta^2)\,d\xi-2\xi\eta\,d\eta]$$

$$=\frac{2}{\beta}(W_\infty+w')(\xi\,d\eta-\eta\,d\xi)\,. \tag{27}$$

În ceea ce privește condițiile (24) ele se transformă pe cercul (Γ).

Deoarece aripa este considerată foarte subțire condițiile de mai sus comportă simplificări apreciabile, astfel, dacă considerăm curba (C) formată din două arce (C_1) și (C_2) care au ecuațiile $Y=Y_1(X)$ și $Y=Y_2(X)$, $(X_1\leqslant X\leqslant X_2)$ astfel că $Y_1(X)$, $Y_2(X)$ și derivatele lor prime sînt considerate infiniți mici de ordinul întîi, la fel ca u', v', w', atunci relația (20) poate fi simplificată neglijînd infiniții mici de ordinul al doilea și ea conduce la

$$v'=-W_\infty(XY'_X-Y)\ \text{ pe }(C) \tag{28}$$

adică

$$v'=G_1(X)\ \text{pe}\ (C_1),\ v'=G_2(X)\ \text{pe}\ (C_2), \tag{28'}$$

unde $G_1(X)$ și $G_2(X)$ sînt funcții cunoscute.

Prin transformarea (12) aceste condiții conduc la următoarele

$$v'=H_1(\xi)\ \text{ pe }(C'_1)\quad\text{și}\quad v'=H_2(\xi)\ \text{ pe }(C'_2) \tag{29}$$

unde (C'_1) și (C'_2) sînt transformatele lui (C_1) și (C_2). Conform unei alte simplificări curent adoptate în teoria aripii subțiri, vom considera condițiile (28') ca avînd loc nu pe curbele (C_1) și (C_2) ci pe segmentul $X_1\leqslant X\leqslant X_2$, $Y=0$, de care curbele (C_1) și (C_2) diferă foarte puțin. Atunci condițiile (29) se vor aplica pe segmentul $\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2$, $\eta=0$, transformatul

segmentului precedent. Problema se reduce deci întîi la determinarea funcţiei armonice $v'(\xi, \eta)$ care figurează acum separat de celelalte două în condiţiile la limită.

6. Condiţiile la limită pentru cazul aripii ce traversează conul lui Mach

În acest caz segmentul $X_1 \leqslant X \leqslant X_2$, $Y = 0$, traversează cercul de ecuaţie (23) fie numai într-o parte fie în ambele părţi.

Condiţiile la limită pe aripă vor fi date tot de formula (28) sau ceea ce este acelaşi lucru de (28′). Însă în acest caz conurile lui Mach cu vîrfurile

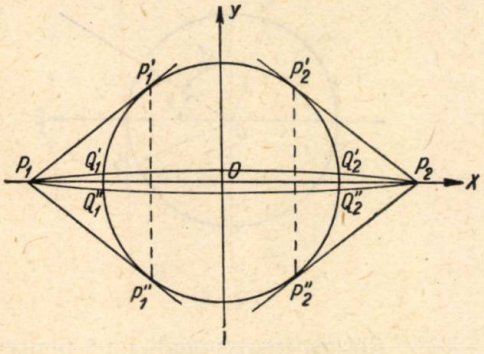


Fig. 5

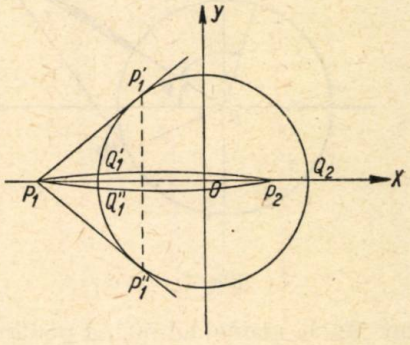


Fig. 6

pe muchia sau pe muchiile aripii exterioare conului (22) admit ca înfăşurătoare planele tangente la conul (22) şi trecînd prin aceste muchii. Aceste plane împreună cu conul (22) vor delimita zona perturbată. În secţiunea prin planul $z = 1$, vom avea deci de considerat cercul lui Mach (23), segmentul $X_1 \leqslant X \leqslant X_2$, $Y = 0$, şi tangentele duse din punctele P_1 $(X_1, 0)$ şi P_2 $(X_2, 0)$ la cercul lui Mach după cum aceste puncte sînt sau nu exterioare (fig. 5) sau (fig. 6).

Pe arcele $P_1'P_2'$, $P_1''P_2''$ (fig. 5) şi pe arcul $P_1'Q_2P_1''$ (fig. 6) vom avea de asemenea condiţiile de racordare (26). Pentru a stabili condiţiile pe arcele $Q_1'P_1'$, $Q_1''P_1''$, $Q_2''P_2''$ şi $Q_2'P_2'$ (fig. 5) sau $Q_1'P_1'$, $Q_1''P_1''$ (fig. 6) să observăm mai întîi că formulele generale (12) şi (18) rămîn valabile şi dacă punctul $M(X, Y)$ este exterior cercului (23), dar că în acest caz ele capătă o formă mai simplă. Astfel, dacă $1 - \beta^2(X^2 + Y^2) < 0$, putem să scriem $X + iY = re^{i\psi}$ şi din (12) rezultă

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{\beta r e^{i\psi}}{1 \pm i\sqrt{\beta^2 r^2 - 1}}.$$

Fie M_1 şi M_2 punctele de contact ale tangentelor duse din M la cercul (23). Avem (fig. 7)

$$\cos\delta = \frac{1}{\beta r}, \quad \sqrt{\beta^2 r^2 - 1} = \operatorname{tg}\delta$$

deci

$$\zeta = \frac{e^{i\psi}}{\cos\delta \pm i \sin\delta} = e^{i(\psi \mp \delta)}.$$

Prin urmare punctul M are două imagini pe cercul (Γ) din planul ζ, care se obțin luînd pe acest cerc punctele P_1 și P_2 care corespund acelorași unghiuri polare ca și M_1 și M_2. Se poate preciza că dacă practicăm o tăietură pe raza vectoare OM cu începere din punctul Q de intersecție cu cercul

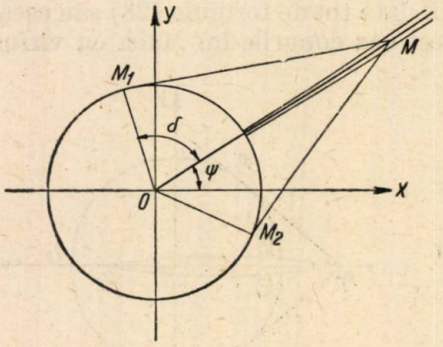


Fig. 7

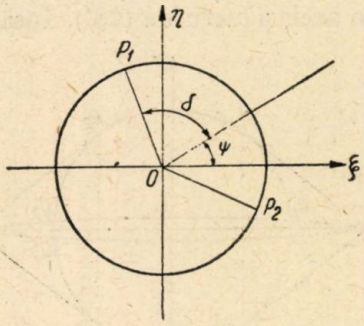


Fig. 8

lui Mach, atunci adoptînd pentru $\sqrt{1-\beta^2 r^2}$ determinarea egală cu 1 pentru $r = 0$ și pe care o urmărim prin continuitate pe ambele margini ale tăieturii, atunci punctului M considerat pe marginea pozitivă a acestei tăieturi (spre unghiurile polare ψ crescătoare) îi corespunde M_1, iar lui M considerat pe marginea negativă a tăieturii îi corespunde M_2 [28]*.

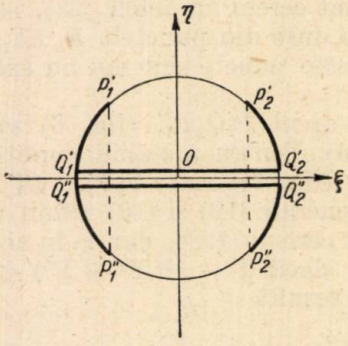


Fig. 9

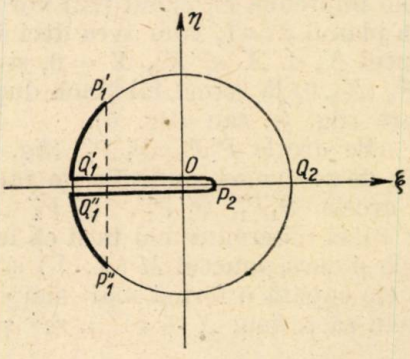


Fig. 10

Va fi deci suficient să observăm pentru cele ce urmează că dacă trecem de la planul $z = 1$ reprezentat în fig. 5 și fig. 6 la planul ζ, cu ajutorul formulei (12), atunci domeniile transformate sînt cele din fig. 9 și fig. 10.

*) p. 794.

În această transformare punctele omoloage s-au notat prin aceeaşi literă.

Prin urmare condiţiile la limită (28) ne vor conduce la condiţii de forma

$$\begin{cases} v' = 0 & \text{pe arcul } P_1'P_2' \\ v' = h_1(\xi) & \text{pe } Q_1'Q_2' \\ v' = g_1(\sigma) & \text{pe arcele } Q_1'P_1' \text{ şi } P_2'Q_2' \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} v' = 0 & \text{pe arcul } P_1''P_2'' \\ v' = h_2(\xi) & \text{pe } Q_1''Q_2'' \\ v' = g_2(\sigma) & \text{pe arcele } Q_1''P_1'' \text{ şi } Q_2''P_2'' \end{cases} \tag{31}$$

în cazul reprezentat în figura 9; este evident că acum determinarea lui $V(\zeta)$ se reduce la două probleme distincte după cum este vorba de semicercul superior sau de semicercul inferior.

În cazul reprezentat în figura 10, condiţiile la limită (28) ne conduc la condiţiile

$$\begin{cases} v' = 0 & \text{pe arcul } P_1'Q_2P_1'' \\ v' = g_1(\sigma) & \text{pe arcul } P_1'Q_1' \\ v' = h_1(\xi) & \text{pe } Q_1'P_2 \\ v' = h_2(\xi) & \text{pe } Q_1''P_2 \\ v' = g_2(\sigma) & \text{pe arcul } Q_1''P_1'' \end{cases} \tag{32}$$

pentru determinarea funcţiei $V(\zeta)$ care trebuie să fie olomorfă în domeniul reprezentat de această figură.

7. Borduri de atac subsonice şi borduri de atac supersonice

Condiţiile la limită precedente mai trebuie completate cu cele de natură fizică care precizează comportamentul soluţiei în punctele P_1 şi P_2, extremităţile segmentului care reprezintă aripa în planul $z = 1$, precum şi cu condiţiile de regularitate pe care le impune însăşi forma relaţiilor (18).

Să începem prin a face observaţia că dacă se consideră o rază vectoare trecînd prin vîrful O al aripii, atunci viteza $\overline{W}_\infty$ într-un punct al acestei raze vectoare poate fi descompusă într-o sumă de doi vectori unul $\overline{W}_{1,\infty}$ situat în lungul razei vectoare, iar celălalt $\overline{W}_{2,\infty}$ situat perpendicular pe această rază.

În interiorul conului Mach avem $W_{2,\infty} < c_\infty$. În particular această circumstanţă are loc pe razele vectoare OP_1 şi OP_2 care limitează aripa, dacă este în întregime în interiorul conului lui Mach (fig. 1).

Din această cauză bordurile de atac corespunzătoare se numesc subsonice.

Dacă raza vectoare considerată este în exteriorul conului Mach atunci vom avea din contra $W_{2,\infty} > c_\infty$. Deci pentru o aripă limitată de

razele vectoare OP_1 și OP_2 exterioare conului lui Mach bordurile de atac corespunzătoare se numesc supersonice.

În cazul bordurilor de atac subsonice mișcarea perturbată fiind datorită componentei subsonice $\overline{W}_{2,\infty}$ se admite că mișcarea are același aspect ca mișcarea subsonică în jurul unui profil cu puncte anguloase, viteza putînd deci deveni infinită în astfel de puncte.

În cazul bordurilor de atac supersonice se consideră că mișcarea are același aspect ca în teoria mișcărilor supersonice linearizate, deci viteza rămîne finită în punctele anguloase.

Pentru determinarea în mod unic a soluției vom admite cu P. Germain principiul singularităților minime după care singularitățile relative la bordul de atac subsonice trebuie să fie astfel alese ca u', v', w' să fie funcțiuni integrabile, ceea ce va asigura o valoare finită presiunii totale a aerului asupra aripii.

CAPITOLUL II

REZOLVAREA PROBLEMELOR LA LIMITĂ DIN TEORIA ARIPII CONICE

1. Trecerea la planul τ

Pentru tratarea unitară a problemelor la limită corespunzătoare diferitelor cazuri vom efectua reprezentarea conformă a domeniului din planul $O\ \xi\ \eta$ (fig. 4, 9,10) pe planul $\tau = \lambda + i\ \mu$ prin substituția

$$\tau = \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2. \tag{33}$$

2. Aripa situată în întregime în interiorul conului lui Mach

Acest caz a fost deja considerat de C. Iacob [29]; el este însă reluat aici pe o altă cale, care permite o mai ușoară comparare cu soluțiile celorlalte cazuri care vor fi tratate.

Dacă aripa este situată în întregime în interiorul conului lui Mach transformarea (33) aplicată domeniului din figura 4 conduce la domeniul din planul $\tau = \lambda + i\ \mu$ a cărui frontieră este formată din porțiunea negativă a axei reale și din segmentul $[\lambda_1, \lambda_2]$ (fig. 11), unde

$$0 < \lambda_1 = \left(\frac{1+\xi_1}{1-\xi_1}\right)^2, \quad \lambda_2 = \left(\frac{1+\xi_2}{1-\xi_2}\right)^2 > \lambda_1 .$$

Într-adevăr, dacă parcurgem cercul $\zeta = e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, avem

$$\tau = -\operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2} = \lambda$$

şi punctul $(\lambda, 0)$ parcurge marginea de sus a axei reale negative dacă $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; pentru $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, punctul $(\lambda, 0)$ parcurge marginea de jos a aceleiaşi axe reale negative, sensul de parcurs fiind păstrat de reprezentarea conformă. Apoi, dacă parcurgem segmentul $P_1 P_2$ (fig. 4), avem

$$\tau = \lambda = \left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^2$$

şi această funcţie este crescătoare faţă de ξ. Deci dacă ξ creşte de la ξ_1, la ξ_2, $\tau = \lambda$ creşte de la λ_1 la λ_2. Marginea pozitivă a segmentului P_1P_2 (fig. 4)

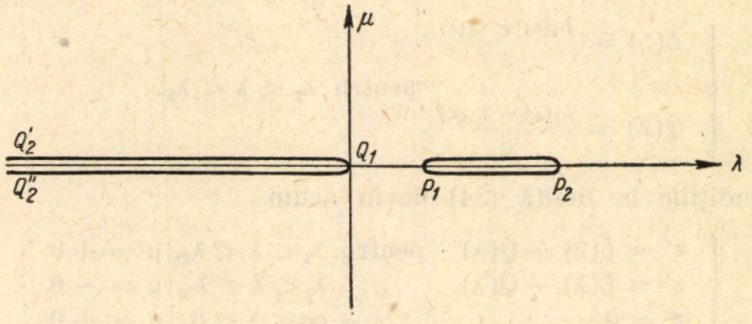


Fig. 11

corespunde marginii pozitive a segmentului $[\lambda_1, \lambda_2]$, (fig. 11), punctele corespunzătoare fiind notate cu aceleaşi litere. La fel se corespund marginile negative.

Prin transformarea (33) condiţiile la limită (29) devin

$$\begin{cases} v' = L_1(\lambda) & \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2,\ \mu = +0 \\ v' = L_2(\lambda) & \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2,\ \mu = -0 \\ v' = 0 & \text{pentru } -\infty < \lambda < 0,\ \mu = \pm 0 \end{cases} \tag{34}$$

unde s-a notat prin $L_1(\lambda)$ şi $L_2(\lambda)$ transformatele lui $H_1(\xi)$ şi $H_2(\xi)$.

Referindu-ne la consideraţiile de la cap. I, nr. 7, soluţia problemei nu va fi mărginită la capetele segmentului $[\lambda_1, \lambda_2]$ ci ea va prezenta singularităţi. Vom profita de prezenţa acestor singularităţi pentru a putea realiza şi condiţia

$$\frac{dV}{d\zeta} = 0 \quad \text{pentru } \zeta = \pm 1 \tag{35}$$

ca urmare a formulelor

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{d\zeta} = i\,\dfrac{\zeta^2+1}{\zeta^2-1}\,\dfrac{dV}{d\zeta} \\ \dfrac{dW}{d\zeta} = -\dfrac{2}{\beta}\,i\,\dfrac{\zeta}{\zeta^2-1}\,\dfrac{dV}{d\zeta} \end{cases} \tag{18'}$$

deduse din (18), care ne vor permite determinarea lui $U(\zeta)$ şi $W(\zeta)$ de îndată ce $V(\zeta)$ va fi cunoscut.

Prin transformarea (33), condiţiile (35) devin

$$\begin{cases} \lim \dfrac{dV}{d\tau}\,\tau^{\frac{3}{2}} = 0 \text{ pentru } \tau \longrightarrow \infty \\ \\ \lim \dfrac{dV}{d\tau}\,\tau^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ pentru } \tau \longrightarrow 0\,. \end{cases} \tag{36}$$

Să punem

$$\begin{cases} L(\lambda) = \dfrac{L_1(\lambda) + L_2(\lambda)}{2} \\ \\ Q(\lambda) = \dfrac{L_1(\lambda) - L_2(\lambda)}{2} \end{cases} \quad \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2. \tag{37}$$

Condiţiile la limită (34) devin acum

$$\begin{cases} v' = L(\lambda) + Q(\lambda) & \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2,\ \mu = +0 \\ v' = L(\lambda) - Q(\lambda) & \text{,,} \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2,\ \mu = -0 \\ v' = 0 & \text{,,} \quad -\infty < \lambda < 0,\ \mu = \pm 0\,. \end{cases} \tag{38}$$

Vom reduce rezolvarea problemei la limită (33) la trei probleme mai particulare punînd [26], [29],

$$V(\tau) = V_1(\tau) + V_2(\tau) + V_3(\tau). \tag{39}$$

Funcţia $V_1(\tau) = v_1' + i\,v_1''$ va trebui să verifice condiţiile la limită

$$\begin{cases} v_1' = Q(\lambda) & \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2,\ \mu = +0 \\ v_1' = -Q(\lambda) & \text{,,} \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2,\ \mu = -0 \\ v_1' = 0 & \text{,,} \quad -\infty < \lambda < 0,\ \mu = \pm 0 \end{cases} \tag{40}$$

la care putem adăuga condiţia suplimentară

$$v_1' = 0 \qquad \text{pentru} \begin{cases} 0 < \lambda < \lambda_1, \\ \lambda_2 < \lambda < +\infty \end{cases} \quad \mu = 0 \tag{41}$$

care este vizibil compatibilă cu aceasta.

Funcţia $V_2(\tau) = v_2' + iv_2''$ este supusă condiţiilor la limită

$$\begin{cases} v_2' = L(\lambda) - k & \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2,\ \mu = \pm 0 \\ v_2' = 0 & \text{,,} \quad -\infty < \lambda < 0,\ \mu = \pm 0 \end{cases} \tag{42}$$

la care se adaugă condiţia

$$v_2'' = 0 \qquad \text{pentru} \begin{cases} 0 < \lambda < \lambda_1,\ \mu = 0 \\ \lambda_2 < \lambda < +\infty\ . \end{cases} \tag{43}$$

Constanta k este încă neprecizată. Valoarea ei va fi obținută o dată cu determinarea lui $V_2(\tau)$.

Funcția $V_3(\tau) = v_3' + iv_3''$ va fi supusă condițiilor

$$\begin{cases} v_3' = k & \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \ \mu = \pm 0 \\ v_3' = 0 & \text{,, } -\infty < \lambda < 0, \ \mu = \pm 0 \end{cases} \tag{44}$$

ea putînd să aibă singularități integrabile în punctele P_1 și P_2, conform condițiilor de la nr. 7.

Este evident că dacă $V_1(\tau)$ și $V_2(\tau)$ sînt soluții cu părți reale mărginite ale problemei la limită considerate mai sus atunci (39) este soluția problemei la limită (38).

Funcția $V_1(\tau)$ considerată numai în semiplanul superior are valorile părții reale cunoscute pe frontieră. Ea se exprimă cu ajutorul formulei cunoscute

$$V_1(\tau) = \frac{i}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{Q(\xi)}{\tau - \xi} d\xi \tag{45}$$

și această expresie este valabilă și în semiplanul inferior.

Pentru determinarea lui $V_2(\tau)$ să considerăm funcția auxiliară $\sqrt{P(\tau)}$ unde

$$P(\tau) = (\tau - \lambda_1)(\tau - \lambda_2) \tag{46}$$

Pentru precizarea ramurii adoptate să luăm $\sqrt{P(\tau)} > 0$, pentru τ real și $\tau > \lambda_2$. Vom avea atunci parcurgînd axa reală, pe care sînt practicate tăieturile $Q_2' Q_1 Q_2''$ și $P_1 P_2$,

$$\sqrt{P(\tau)} = i \sqrt{|P(\lambda)|} \quad \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \ \mu = +0$$

$$\sqrt{P(\tau)} = - \sqrt{|P(\lambda)|} \quad \text{pentru } 0 < \lambda < \lambda_1, \ \mu = 0$$

$$\sqrt{P(\tau)} = -i \sqrt{|P(\lambda)|} \quad \text{pentru } -\infty < \lambda < 0, \ \mu = +0$$

unde radicalii din membrul al doilea sînt luați cu determinația aritmetică.

Fie raportul $\frac{V_2(\tau)}{\sqrt{P(\tau)}}$. Ținînd seama de determinațiile radicalului se constată că partea imaginară a acestui raport dă pe axa reală valorile

$$\mathcal{I}m \left\{ \frac{V_2(\tau)}{\sqrt{P(\tau)}} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } (-\infty, 0) \\ 0 & \text{,, } (0, \lambda_1) \\ -\dfrac{L(\xi) - k}{\sqrt{|P(\xi)|}} & \text{,, } (\lambda_1, \lambda_2) \\ 0 & \text{,, } (\lambda_2, +\infty). \end{cases} \tag{47}$$

Rezultă în mod analog

$$\frac{V_2(\tau)}{\sqrt{P(\tau)}} = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi) - k}{\sqrt{|P(\xi)|}} \frac{d\xi}{\tau - \xi}. \tag{48}$$

Din expresia lui

$$V_2(\tau) = \frac{\sqrt{P(\tau)}}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi) - k}{\sqrt{|P(\xi)|}} \frac{d\xi}{\tau - \xi} \tag{49}$$

se vede că în vecinătatea punctului de la infinit $V_2(\tau)$ se comportă ca $\sqrt{\tau}$. Pentru ca această singularitate să dispară vom alege pe k prin condiția

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi) - k}{\sqrt{|P(\xi)|}} d\xi = 0 \tag{50}$$

de unde

$$k \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\xi}{\sqrt{|P(\xi)|}} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)}{\sqrt{|P(\xi)|}} d\xi. \tag{51}$$

Pentru $V_3(\tau)$ se poate încerca o expresie de forma

$$V_3(\tau) = k + {}^{*}\int_{\lambda_1}^{\tau} \frac{A_0\tau^2 + A_1\tau + A_2}{(\tau - \lambda_1)(\tau - \lambda_2)\sqrt{\tau(\tau - \lambda_1)(\tau - \lambda_2)}} d\tau \tag{52}$$

unde ${}^{*}\int$ înseamnă partea finită a integralei în sensul lui Hadamard, iar A_0, A_1. A_2 sînt coeficienți reali nedeterminați. Este vizibil că expresia aleasă (52) pentru $V_3(\tau)$ satisface condiția pe segmentul (λ_1, λ_2) și admite singularități de forma dorită la extremități. Pentru a satisface și condiția pe $(-\infty, 0)$ va trebui să impunem constantelor condiția

$$k + {}^{*}\int_{0}^{\lambda_1} \frac{A_0\xi^2 + A_1\xi + A_2}{(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2)\sqrt{|\xi(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2)|}} d\xi = 0. \tag{53}$$

Pentru determinarea celorlalți coeficienți trebuie să îndeplinim condițiile (36).

Dacă observăm că avem

$$\frac{dV_1}{d\tau} = O\left(\frac{1}{\tau^2}\right), \quad \frac{dV_2}{d\tau} = O\left(\frac{1}{\tau\sqrt{\tau}}\right), \quad \frac{dV_3}{d\tau} = O\left(\frac{1}{\tau\sqrt{\tau}}\right)$$

în vecinătatea lui $\tau = \infty$ atunci prima condiție de verificat este

$$\lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{dV_2}{d\tau} + \frac{dV_3}{d\tau}\right) \tau\sqrt{\tau} = 0. \tag{54}$$

Ținînd seama de (49) avem în vecinătatea lui $\tau = \infty$

$$V_2(\tau) = \frac{\sqrt{\tau(\tau - \lambda_1)(\tau - \lambda_2)}}{\pi\tau^2} \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi) - k}{\sqrt{|P(\xi)|}} \xi\, d\xi + \frac{1}{\tau}(\ldots)\right].$$

Plasîndu-ne pe axa reală ($\lambda < 0$) și ținînd seama de determinația radicalului, rezultă deci

$$V_2(\lambda) = -\frac{i}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi) - k}{\sqrt{|P(\xi)|}} \xi\, d\xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Cum $|\lambda| = -\lambda$ pentru $\lambda < 0$ avem pe axa reală

$$\frac{dV_2}{d\tau} = -\frac{i}{2\pi}\frac{1}{|\lambda|^{3/2}}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{L(\xi)-k}{\sqrt{|P(\xi)|}}\,\xi\,d\xi + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

De asemenea pentru $\tau = \lambda < 0$, $|\lambda|$ fiind suficient de mare,

$$\frac{dV_3}{d\tau} = \frac{A_0\tau^2 + A_1\tau + A_2}{(\tau-\lambda_1)(\tau-\lambda_2)\sqrt{\tau(\tau-\lambda_1)(\tau-\lambda_2)}} = \frac{iA_0}{|\lambda|^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Condiţia (54) conduce deci la

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{L(\xi)-k}{\sqrt{|P(\xi)|}}\,\xi\,d\xi. \tag{55}$$

În vecinătatea lui $\tau = 0$ avem

$$\frac{dV_1}{d\tau} = O(1),\quad \frac{dV_2}{d\tau} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right),\quad \frac{dV_3}{d\tau} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) \tag{56}$$

deci a doua condiţie (36) impune ca

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{dV_2}{d\tau} + \frac{dV_3}{d\tau}\right)\sqrt{\tau} = 0. \tag{57}$$

În vecinătatea lui $\tau = 0$ pe axa reală avem

$$\frac{dV_2}{d\tau} = \frac{1}{\pi}\frac{P'(\tau)}{2\sqrt{P(\tau)}}\left[-\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{L(\xi)-k}{\xi\sqrt{|P(\xi)|}}\,d\xi + \tau(\ldots)\right].$$

Ţinînd seama de relaţia

$$P(\tau) = \tau^3 - (\lambda_1+\lambda_2)\tau^2 + \lambda_1\lambda_2\tau$$
$$P'(\tau) = 3\tau^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\tau + \lambda_1\lambda_2$$

se găseşte, dacă $\tau \longrightarrow 0$ pe marginea pozitivă a tăieturii

$$\frac{dV_2}{d\tau} = -\frac{i}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{|\tau|}}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{L(\xi)-k}{\xi\sqrt{|P(\xi)|}}\,d\xi + O\sqrt{|\tau|}).$$

Pe de altă parte

$$\frac{dV_3}{d\tau} = i\frac{A_2}{(\lambda_1\lambda_2)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{|\tau|}} + O(\sqrt{|\tau|}).$$

Se găseşte deci în virtutea formulei (57)

$$A_2 = \frac{(\lambda_1\lambda_2)^{3/2}}{2\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{L(\xi)-k}{\xi\sqrt{|P(\xi)|}}\,d\xi. \tag{58}$$

Pe baza relaţiilor (55) şi (58) coeficientul A_1 este determinat din (53).

3. Aripa depăşeşte de ambele părţi conul lui Mach

Prin schimbarea de variabilă (33) domeniile reprezentate de semicercul superior şi semicercul inferior din figura 9 se transformă respectiv în semiplanul superior $\mu \geqslant 0$ şi în semiplanul inferior $\mu \leqslant 0$ cu corespondenţa frontierelor indicată în fig. 12.

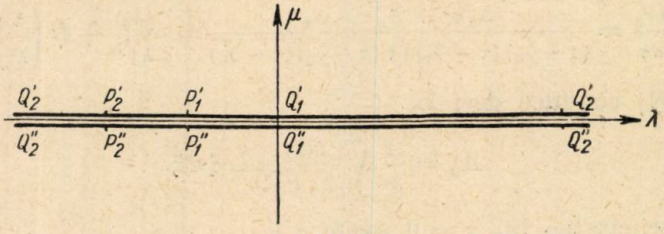


Fig. 12

Va fi suficient din cele ce urmează să ne ocupăm de semiplanul superior. Abscisele imaginilor punctelor P_2' şi P_1' vor fi notate iarăşi prin λ_2 şi λ_1.

Prin transformarea (33) condiţiile la limită (29) devin

$$\begin{aligned} v' &= L_1(\lambda) \text{ pentru } -\infty < \lambda < \lambda_2, \quad \mu = +0 \\ v' &= 0 \quad \text{pentru } \lambda_2 < \lambda < \lambda_1, \quad \mu = +0 \\ v' &= L_1(\lambda) \text{ pentru } \lambda_1 < \lambda < +\infty, \ \mu = +0. \end{aligned} \tag{59}$$

Prin urmare problema noastră s-a redus la problema clasică a lui Dirichlet pentru semiplanul superior de unde rezultă

$$V(\tau) = \frac{i}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\lambda_2} \frac{L_1(\xi)}{\tau - \xi}\, d\xi + \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{L_1(\xi)}{\tau - \xi}\, d\xi\right] \tag{60}$$

neglijînd o constantă imaginară pură care nu joacă nici un rol.

Se va observa că şi în cazul actual avem de respectat condiţiile (35) care primesc forma (36). Aceste condiţii sînt vizibil îndeplinite relativ la punctul de la infinit unde $V(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ şi pentru $\tau = 0$, unde $V(\tau) = O(1)$ dacă admitem că $L_1'(\lambda)$ verifică o condiţie Hölder în vecinătatea lui $\lambda = 0$ şi $\lambda = \pm\infty$.

Vom face calculul pentru $\tau = 0$. Avem :

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{i}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\lambda_2} \frac{L_1(\xi)}{(\tau - \xi)^2}\, d\xi + \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{L_1(\xi)}{(\tau - \xi)^2}\, d\xi\right].$$

Integrînd prin părţi

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{i}{\pi}\left\{\frac{L_1(\lambda_2)}{\tau - \lambda_2} - \frac{L_1(\lambda_1)}{\tau - \lambda_1} - \int_{-\infty}^{\lambda_2} \frac{L_1'(\xi)}{\tau - \xi}\, d\xi - \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{L_1'(\xi)}{\tau - \xi}\, d\xi\right\}.$$

Primii trei termeni sînt $O(1)$: al patrulea tinde spre

$$L_1'(0) - \frac{1}{\pi}\int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{L_1'(\xi)}{\xi}\, d\xi \qquad \text{pentru } \tau \to 0.$$

Prin urmare $\frac{dV}{d\tau} = O(1)$ și condiția (36) este îndeplinită.

Pentru semiplanul inferior problema la limită este analoagă cu (59) unde însă $L_1(\lambda)$ se înlocuiește cu o funcție cunoscută $L_2(\lambda)$, iar în loc de $\mu = +0$ avem $\mu = -0$.

Soluția acestei probleme este dată de

$$V(\tau) = -\frac{i}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\lambda_2} \frac{L_2(\xi)}{\tau - \xi}\, d\xi + \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{L_2(\xi)}{\tau - \xi}\, d\xi\right] \tag{61}$$

cu observații analoage relativ la verificarea condițiilor (36).

4. Aripa depășește numai într-o parte conul lui Mach

În acest caz transformarea (33) conduce la domeniul din planul τ avînd ca frontieră tăietura $-\infty < \lambda < \lambda_2$ pe axa reală (fig. 13)

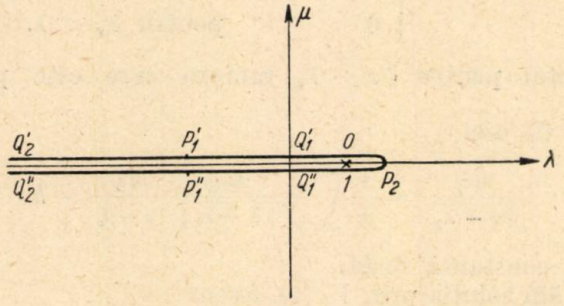


Fig. 13

Prin transformarea (33) condițiile la limită devin.

$$\begin{cases} v' = 0 & \text{pentru } -\infty < \lambda < \lambda_1, \quad \mu = \pm 0 \\ v' = L_1(\lambda) & \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \quad \mu = +0 \\ v' = L_2(\lambda) & \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \quad \mu = -0 \end{cases} \tag{62}$$

unde $L_1(\lambda)$ și $L_2(\lambda)$ sînt funcțiuni date. Transformata lui $V(\zeta)$ pe care o vom nota prin $V(\tau) = v' + iv''$ trebuie să fie o funcție olomorfă de τ în planul prevăzut cu o tăietură $Q_2' P_2\, Q_2''$ care este continuă pe această frontieră.

Pentru rezolvarea problemei la limită (62) observăm că, dacă punem

$$\begin{cases} L(\lambda) = \dfrac{L_1(\lambda) + L_2(\lambda)}{2} \\ \\ Q(\lambda) = \dfrac{L_1(\lambda) - L_2(\lambda)}{2} \end{cases} \text{ pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \tag{63}$$

atunci condițiile (62) ne dau

$$\begin{cases} v' = L(\lambda) + Q(\lambda) \text{ pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \ \mu = +0 \\ v' = L(\lambda) - Q(\lambda) \text{ pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2, \ \mu = -0 \end{cases} \tag{64}$$

ceea ce ne permite să tratăm separat cazul cînd $Q(\lambda) \equiv 0$ sau cînd $L(\lambda) \equiv 0$.

Cazul $Q(\lambda) \equiv 0$. Din motive de simetrie putem adăuga condiția la limită suplimentară $v'' = 0$ pe axa $O\lambda$ pentru $\lambda_2 < \lambda$ ceeace ne permite să ne limităm la semiplanul superior $\mu \geqslant 0$, problema la limită devenind o problemă de tipul Volterra-Signorini [28] *, care se rezolvă observînd că pentru $\mu = 0$

$$\mathcal{I}m \left\{ \frac{V(\tau)}{\sqrt{\tau - \lambda_2}} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \lambda < \lambda_1 \\ \\ -\dfrac{L(\lambda)}{\sqrt{|\lambda - \lambda_1|}} & \text{pentru } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \\ \\ 0 & \text{pentru } \lambda_2 < \lambda. \end{cases}$$

S-a adoptat pentru $\sqrt{\tau - \lambda_2}$ ramura care este pozitivă pentru $\lambda > \lambda_2$.

Rezultă de aici

$$\frac{V(\tau)}{\sqrt{\tau - \lambda_2}} = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)}{\sqrt{|\xi - \lambda_2|}} \frac{d\xi}{\tau - \xi} - k$$

unde k este o constantă reală.

Dacă notăm soluția prin $V_1(\tau)$, avem

$$V_1(\tau) = \frac{\sqrt{\tau - \lambda_2}}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)}{\sqrt{|\xi - \lambda_2|}} \frac{d\xi}{\tau - \xi} \tag{65}$$

luînd $k = 0$ deoarece $V_1(\tau)$ trebuie să fie continuă la infinit.

Cazul $L(\lambda) \equiv 0$. În acest caz putem adăuga condiția suplimentară $v' = 0$ pentru $\lambda_2 < \lambda$, $\mu = 0$ fără a altera condițiile la limită date ceea ce ne conduce la o problemă Dirichlet pentru semiplanul superior.

Notînd soluția corespunzătoare cu $V_2(\tau)$, avem

$$V_2(\tau) = \frac{i}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Q(\xi) \frac{d\xi}{\tau - \xi} \tag{66}$$

dacă neglijăm o constantă imaginară pură arbitrară care nu joacă nici un rol.

*) p. 77.

Soluţia problemei la limită (62) este dată de

$$V(\tau) = V_1(\tau) + V_2(\tau) \tag{67}$$

unde $L(\lambda)$ şi $Q(\lambda)$ sînt definite de (63).

După obţinerea lui $V(\zeta) = v' + iv''$ se determină funcţiile $U(\zeta) = u' + iu''$, $W(\zeta) = w' + iw''$, ale căror părţi reale sînt proiecţiile u' şi w' ale vitezei perturbate pe axele ox şi oz din formulele (18), ceea ce impune condiţia suplimentară (35) sau, după transformarea (33), condiţia (36).

Este uşor de verificat că $V_2(\tau)$ verifică de la sine această condiţie în timp ce $V_1(\tau)$ nu o verifică. Renunţînd la ipoteza de continuitate a lui $V_1(\tau)$ în punctul P_2 (după cum s-a precizat la nr. 7) îi vom adăuga un termen de forma

$$V_3(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{\sqrt{\tau - \lambda_2}} \tag{68}$$

ν fiind o constantă reală ceea ce nu modifică condiţiile la limită. Or, condiţia (36) implică

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{d}{d\tau} \left(V_1(\tau) + \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{\sqrt{\tau - \lambda_2}} \right) = 0.$$

Din (65) rezultă că pentru $|\tau|$ suficient de mare avem

$$V_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)}{\sqrt{|\xi - \lambda_2|}} d\xi + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right\}.$$

Se vede de asemenea că în aceleaşi condiţii

$$V_3(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left\{ \frac{\nu}{\pi} + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right\}.$$

Prin derivare se obţine

$$\frac{dV_1}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)}{\sqrt{|\xi - \lambda_2|}} d\xi + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{\tau}} O\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$

$$\frac{dV_3}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\nu}{\pi} + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{\tau}} O\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$

de unde

$$\lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{dV_1}{d\tau} + \frac{dV_3}{d\tau} \right) \tau^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)}{\sqrt{|\xi - \lambda_2|}} d\xi + \frac{\nu}{\pi} \right\}.$$

Această limită trebuind să fie nulă condiţia care determină pe ν este

$$\nu = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)}{\sqrt{|\xi - \lambda_2|}} d\xi \tag{69}$$

deci, soluția problemei este

$$V(\tau) = \frac{\sqrt{\tau - \lambda_2}}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)}{\sqrt{|\xi - \lambda_2|}} \frac{d\xi}{\tau - \xi} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\tau - \lambda_2}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)}{\sqrt{|\xi - \lambda_2|}} d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} Q(\xi) \frac{d\xi}{\tau - \xi}. \tag{70}$$

CAPITOLUL III

CAZUL ARIPILOR CARE PREZINTĂ BORDURI DE FUGĂ SUBSONICE

1. Stratul de vîrtejuri detașat de pe bordul de fugă

Dacă abscisele punctelor P_1 și P_2 sînt de același semn, atunci aripa prezintă un bord de atac și unul de fugă. Dacă $|X_1| > |X_2|$ atunci latura OP_1 constituie bordul de atac iar OP_2 este bordul de fugă. În aceste cazuri schema care se obișnuește să se adopte este diferită de cea tratată anterior, anume se admite existența unui strat de vîrtejuri care se detașează de pe bordul de fugă, în baza considerațiilor următoare.

Să luăm circulația Γ în jurul unei secțiuni C_{x_0} a aripii prin planul $x = x_0 = \text{const}$. Avem

$$\Gamma = \int_{C_{x_0}} \bar{v} d\bar{r} = \int_{C_{x_0}} (\bar{W}_\infty + \bar{v}') d\bar{r} = \int_{C_{x_0}} v' dy + w' dz$$

Însă între coordonatele x_0, y, z ale unui punct al curbei C_{x_0} și coordonatele $x(s)$, $y(s)$, 1 ale punctului curbei C de secțiune a conului obstacol prin planul $z = 1$, exprimate în funcție de abscisa curbilinie s pe secțiunea C, puncte aflate pe aceeași generatoare, avem relațiile

$$\frac{x_0}{x(s)} = \frac{y}{y(s)} = \frac{z}{1}$$

adică

$$x_0 = z\, x(s), \quad y = z\, y(s), \quad z = z$$

deci

$$y = \frac{y(s)}{x(s)} x_0, \quad z = \frac{x_0}{x(s)}.$$

În aceste condiții expresia circulației devine

$$\Gamma = x_0 \int_C v' [x(s), y(s)] d\left(\frac{y(s)}{x(s)}\right) + w' [x(s), y(s)] d\left(\frac{1}{x(s)}\right) = A x_0$$

unde A este o constantă. Acest fapt conduce să admitem la fel ca în teoria Prandtl a aripii portante, existența unui strat de vîrtejuri care se detașează de pe bordul de fugă și este în planul oxz.

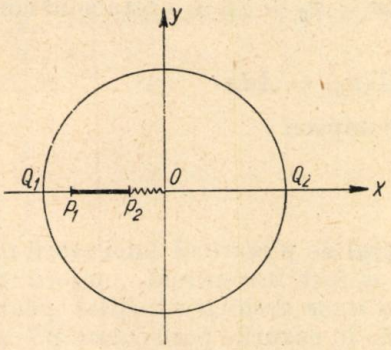


Fig. 14

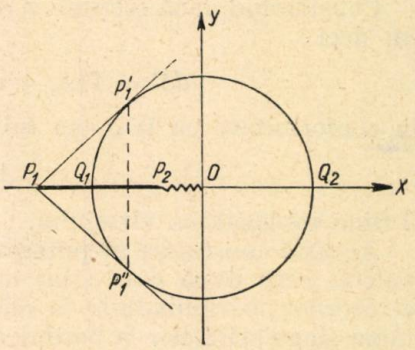


Fig. 15

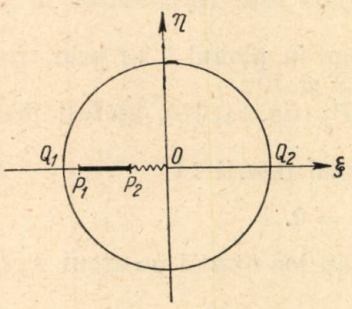


Fig. 16

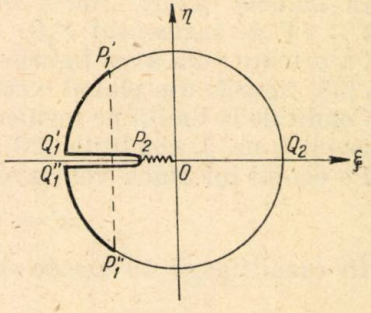


Fig. 17

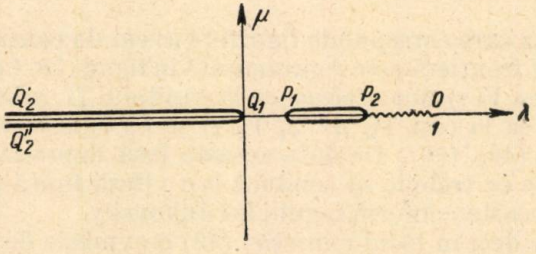


Fig. 18

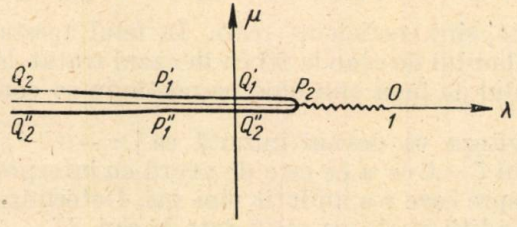


Fig. 19

Considerînd două secțiuni $x = x_0$ și $x = x_0 + dx$ în obstacolul conic avem deci

$$d\Gamma = \Gamma(x_0 + dx) - \Gamma(x_0) = A dx$$

și în conformitate cu teorema lui W. Thompson

$$A = \Omega$$

$\frac{1}{2}\ \Omega$ fiind intensitatea vîrtejului.

Această constatare ar putea fi punctul de plecare al unei teorii mai complete, care după cum știm încă nu a fost întreprinsă, majoritatea cercetătorilor mărginindu-se la adoptarea unor artificii analitice pentru evitarea singularităților la bordul de fugă, în cazurile particulare pe care le-am considerat.

Vom examina cazurile corespunzătoare figurilor 14 și 15.

În ambele cazuri stratul de vîrtejuri este reprezentat în planul $Z = X + iY$ de segmentul P_2O.

Ca urmare vom avea figurile analoage în planul ζ iar prin transformarea (33) figurile din planul τ sînt fig. 18 și 19 :

Condițiile la limită pe segmentul P_1P_2 (fig. 14, 15), au fost precizate la capitolul I, nr. 5, condițiile (29).

Pe cercul lui Mach vom avea în cazul figurii 14

$$u' = v' = w' = 0.$$

În cazul figurii 15 aceste condiții au loc numai pe arcul $P_1' Q_2 P_1''$

2. Cazul aripii interioare conului lui Mach

În acest caz care corespunde figurii 14 avem de considerat în planul τ domeniul a cărui frontieră este reprezentată în figura 18. Condițiile la limită pentru funcțiunea $V(\tau)$ sînt aceleași ca la capitolul II, adică (34).

Procedînd ca la cap. II, nr. 2, $V_1(\tau)$ și $V_2(\tau)$ se vor determina prin formulele (45) și (49), (50). De data aceasta însă expresia lui $V_3(\tau)$ va fi diferită, deoarece ea trebuie să conducă la o viteză finită pentru bordul de fugă subsonic, aceasta conform regulii lui Jukovsky.

Vom căuta deci în locul expresiei (52) o expresie de forma

$$V_3(\tau) = k + \int_{\lambda_1}^{\tau} \frac{A_0' \tau^2 + A_1' \tau + A_2'}{(\tau - 1)(\tau - \lambda_1)\sqrt{\tau(\tau - \lambda_1)(\tau - 1)}}\, d\tau \qquad (71)$$

în care A_0', A_1' și A_2' sînt coeficienți reali. În felul acesta viteza va avea o singularitate la bordul de atac la fel ca în cazul tratat la cap. II dar ea va fi finită la bordul de fugă subsonic respectîndu-se condiția lui Jukovsky. În schimb viteza va deveni infinită ca $|\tau - 1|^{\frac{-1}{2}}$ în punctul $\tau = 1$ care corespunde lui $\zeta = 0$ ce a ce este de acord cu interpretarea turbionară a fenomenului despre care s-a amintit mai sus. Determinarea constantelor se va face prin condiții analoage celor date la cap. II.

Valoarea constantei k continuă să fie dată de relaţia (51). Pentru a satisface condiţia pe $(-\infty, 0)$, vom avea în locul relaţiei (53) condiţia

$$k + \int_0^{\lambda_1} \frac{A_0'\xi^2 + A_1'\xi + A_2'}{(\xi-1)(\xi-\lambda_1)\sqrt{\xi(\xi-\lambda_1)(\xi-1)}}\, d\xi. \tag{72}$$

Condiţia (54) conduce de data aceasta la

$$A_0' = \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)-k}{\sqrt{|\xi(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)|}}\, \xi d\xi \tag{73}$$

în timp ce condiţia (57) ne va da

$$A_2' = \frac{(\lambda_1)^{\frac{3}{2}}}{2\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)-k}{\xi\sqrt{|\xi(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)|}}\, d\xi. \tag{74}$$

3. Cazul aripii care depăşeşte parţial conul lui Mach

Pentru acest caz reprezentat în fig. 15 căreia îi corespunde în planul τ, fig. 19, procedeul de urmat va fi analog cu cel de la cap. II, nr. 4. Condiţiile la limită ale problemei sînt date de (62). Prin urmare $V_1(\tau)$ şi $V_2(\tau)$ se determină prin formulele (65) şi (66). Singura deosebire constă în faptul că termenul de adăugat soluţiei date de (67) nu mai poate să aibă singularitate în P_2 deoarece viteza trebuie să rămînă finită în bordul de fugă. În aceste condiţii pentru a satisface condiţia reglementară (35) scrisă însă sub forma primei dintre relaţiile (36), vom adăuga lui $V(\tau)$ definit de (67) termenul de forma

$$V_3(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\nu'}{\sqrt{\tau-1}} \tag{75}$$

unde ν' este o constantă reală ce urmează a fi determinată. Acest procedeu este în acord cu interpretarea turbionară a fenomenului. Acest termen aditiv este imaginar pur pe frontiera pe care se dau condiţiile (62), care deci nu sînt modificate. Condiţia prin care se determină ν' este

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{d}{d\tau}\left(V_1(\tau) + \frac{1}{\pi}\frac{\nu'}{\sqrt{\tau-1}}\right) = 0.$$

Se găseşte deci, făcînd acelaşi calcul ca şi la p. 85, aceeaşi valoare

$$\nu' = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{L(\xi)}{\sqrt{|\xi-\lambda_1|}}\, d\xi \tag{76}$$

Prin urmare unica deosebire faţă de formulele de la cap. II, nr. 4 constă în forma termenului $V_3(\tau)$.

Concluzie

Metoda utilizată sistematic în această lucrare a fost reducerea problemelor care se întîlnesc în diferitele cazuri din teoria mişcărilor conice la o problemă unică, aceea a lui Dirichlet pentru planul avînd ca frontieră segmente rectilinii aşezate pe axa reală. Rezolvarea acestei probleme s-a făcut în cazul general al aripilor conice subţiri (turtite) de secţiune oarecare depăşindu-se astfel prin generalitate cazurile tratate de alţi autori. În special trecerea de la cazul bordurilor de atac supersonice la acela al bordurilor de atac subsonice, tratate în cap. III al lucrării, este cu deosebire simplă şi pune în evidenţă avantajul metodei întrebuinţate.

Formula de transformare (33) utilizată consecvent în lucrarea noastră poate fi înlocuită atunci cînd se au în vedere aplicaţiile practice directe şi prin

$$Z = \frac{2}{\beta} \frac{\zeta}{1+\zeta^2}$$

dedusă din transformarea lui Jukovsky. Această transformare care are legături evidente cu (25) prezintă avantajul că atunci cînd ζ este real ne dă direct legătura dintre $\zeta = \xi$ şi $Z = X$, X fiind abscisa pe aripă din planul figurii 3. Dacă se utilizează această transformare, rezultatele obţinute la cap. II şi III se transpun uşor cu singura deosebire că funcţia auxiliară care va figura în formulele de la cap. II, nr. 2 va fi un polinom de gradul IV. În aplicaţii aceasta va duce la utilizarea transcendentelor eliptice ale lui Jacobi în locul transcendentelor eliptice ale lui Weierstrass.

О ТЕОРИИ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В СЛУЧАЕ ТОНКИХ КРЫЛЬЕВ ЗАДАННОГО СЕЧЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Цель настоящей работы — дать единую трактовку теории конических течений в случае крыльев заданного сечения.

В введении проводится обзор наиболее важных исследований по теории конических течений.

В I главе устанавливаются общие формулы теории линеаризованных конических течений и граничные условия, к которым приводит эта теория в случае тонкого крыла заданного сечения, выходящего или не выходящего за пределы конуса Маха вершины.

Для единого рассмотрения краевой задачи внимание сосредоточено на функции $V(\zeta)$, связанной с нормальной составляющей возмущения скорости.

Во II главе замена переменной (33)

$$\tau = \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2$$

преобразует область вспомогательной плоскости ζ в область плоскости τ, с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси с другим разрезом вдоль участка положительной части этой же оси. Этим преобразованием рассматриваемые краевые задачи сводятся к задаче Дирихле для верхней полуплоскости или к смешанной задаче Вольтерра.

Дополнительные условия задачи о крыле с дозвуковыми передними кромками требуют добавления к полученным решениям $V_1(\tau)$ и $V_2(\tau)$ решения $V_3(\tau)$ однородной задачи с заданными особенностями на кромках крыла; это решение содержит некоторые постоянные, определяемые условиями (36).

В III главе рассматривается случай крыльев с дозвуковыми задними кромками. Этот случай исследуется при помощи вихревого слоя, отрывающегося от задней кромки. Аналитический прием, позволяющий получить конечную скорость на задней кромке весьма прост; в выражении скорости $V_3(\tau)$ абсцисса λ_2 точки, изображающей дозвуковую переднюю кромку непрерывно изменяется и принимает в определенный момент значение абсциссы образа точки O на оси конуса Маха, после чего рассматриваемая кромка становится дозвуковой задней кромкой. Тогда решение получается заменив в выражении $V_3(\tau)$ эту обсциссу λ_2 на абсциссу образа точки O, что не нарушает граничных условий, которым должно удовлетворять $V_3(\tau)$.

DE LA THÉORIE DES MOUVEMENTS CONIQUES DANS LE CAS DES AILES MINCES, DE SECTION DONNÉE

RÉSUMÉ

Le travail a pour but de donner une méthode unitaire d'étude des mouvements coniques dans le cas des ailes coniques minces, de sections données.

Dans l'introduction on donne un aperçu d'ensemble des recherches les plus marquantes concernant la théorie des mouvements coniques.

Dans le chapitre I on donne les formules générales de la théorie linéaire des écoulements coniques et les conditions aux limites dans le cas des ailes minces, de sections données, qui traversent ou non le cône de Mach du sommet.

Afin de traiter d'une façon unitaire les problèmes aux limites correspondants, on considère la fonction $V(\zeta)$, liée à la composante de perturbation normale de la vitesse.

Dans le chapitre II, au moyen du changement de variable (33),

$$\tau = \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2,$$

on réduit le domaine du plan auxiliaire ζ au domaine du plan τ, muni d'une coupure le long de l'axe réel négatif et d'une autre coupure sur une portion de l'axe réel positif. Les problèmes aux limites considérés se ramènent alors au problème de Dirichlet pour le demi-plan supérieur ou bien au problème mixte de Volterra.

Les conditions supplémentaires du problème de l'aile à bords d'attaque subsoniques exigent qu'on ajoute aux solutions $V_1(\tau)$ et $V_2(\tau)$, obtenues de la sorte, une solution $V_3(\tau)$ du problème homogène, à singularités données aux bords de l'aile. Cette solution comporte quelques constantes qui ont été déterminées par (36).

Dans le chapitre III on considère le cas des ailes coniques présentant des bords de fuite subsoniques. Ce cas est traité compte tenu du détachement d'une lanière tourbillonnaire du bord de fuite. L'artifice analytique permettant d'obtenir une vitesse finie au bord de fuite est simple. Dans l'expression de $V_3(\tau)$, l'abscisse λ_2 du point-image du bord d'attaque subsonique — variant continûment, passe par la valeur de l'abscisse de l'image du point O de l'axe du cône de Mach, à partir de laquelle le bord en question devient bord de fuite subsonique. La solution s'obtient alors en remplaçant dans l'expression de $V_3(\tau)$ cette abscisse λ_2 par celle de l'image du point O, ce qui n'altère pas les conditions aux limites auxquelles est assujetti $V_3(\tau)$.

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. F. BARTELS, O. LAPORTE, *An investigation of the exact solutions of the linearized equations for the flow past conical bodies.* Engineering Research Institute. Univ. of Michigan, Ann, Arbor, Blumblebee Report, *75* (1948) (din Math. Rev. 1948).
2. L. BESCHINE, *Forces aérodynamiques agissant sur les surfaces portantes aux vitesses supersoniques.* Les Cahiers d'Aérodynamique, Paris, 1947, *6* (24—38) şi (38—50).
3. C. E. BROWN, *Theoretical lift and drag at thin triangular wings at supersonic speeds.* Techn. Notes N.A.C.A., *1183* (1946) (din Math. Rev.) *9*, 114 (1948).
4. S. H. BROWNE, L. FRIEDMANN, I. HODES, *A wing body problem in a supersonic conical flow.* J. Aeronautical Sciences *15*, 443—452 (1948) (din Math. Rev. *10*, 78).
5. A. BUSEMANN, *Infinitesimale kegelige Überschallströmung.* Schriften der Deutschen Akad. der Luftfahrtforschung, **7**, 105—122 (1943).
6. E. CARAFOLI, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R.P.R., **II**, *9—10*, 629 (1952).
7. — *Extinderea analogiei hidrodinamice din mişcările conice la aripile groase şi cu incidenţă variabilă.* Comunicările Acad. R.P.R., **III**, *3—4*, 141 (1953).
8. — *Aerodinamica vitezelor mari.* Ed. Acad. R.P.R., 326—706 (1957).
9. E. CARAFOLI, BEATRICE HOROVITZ, *Mişcarea supersonică în iurul aripii triunghiulare cu discuri marginale.* Comunicările Acad. R. P. R., **III**, *11—12* (oct. dec.), 395 (1953).
10. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Rezistenţa aripilor triunghiulare dublu conice cu pantă variabilă, în curent supersonic.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **V**, *3—4*, 285—305 (1954).

11. E. CARAFOLI, L. DUMITRESCU, *Asupra aripii delta subţiri dublu conice cu incidenţă variabilă, în curent supersonic.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VI**, *3—4*, 237—257 (1955).
12. E. CARAFOLI, S. SĂNDULESCU, *Influenţa bracajului aripioarelor asupra caracteristicelor aerodinamice ale aripii triunghiulare în regim supersonic.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *4*, 815 (1956).
13. M. FENAIN, *Traînée d'ailes delta symétriques à incidence nulle en régime supersonique.* La Recherche Aéronautique, *16*, 27—38 (1950).
14. M. FENAIN, D. VALLÉE, *Application de la théorie des mouvements homogènes au calcul de la traînée d'onde d'ailes en flèche effilés.* La Recherche Aérodynamique, *44*, 9—21 (1955).
15. — *Application de la théorie des mouvements homogènes au calcul des effets de portance pour les ailes en flèche effilées.* La Recherche Aéronautique, 50, 17—25 (1956).
16. F. I. FRANKL, E. A. KARPOWICH, *Gas Dynamics of thin Bodies.* Interscience Publishers Ltd. London-New York.
17. P. GERMAIN, *La théorie des mouvements coniques et ses applications à l'Aérodynamique supersonique.* Thèses, Paris, 1948, O.N.E.R.A., *34* (1949).
18. — *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique.* La Recherche Aéronautique, *7*, 3—16 (1949).
19. P. GERMAIN, D. VALLÉE, *Effet de dièdre sur une aile delta en régime supersonique.* La Recherche Aéronautique, 52, 13—20 (1956).
20. M. J. GUREVICI, *Portanţa unei aripi în formă de săgeată într-un curent supersonic* (în l. rusă), Prikl. Math. Mech. **10**, nr. *4*, 1946.
21. — *Observaţiuni cu privire la scurgerea în jurul aripii triunghiulare într-un curent supersonic* (în l. rusă), Prikl. Math. Mech. **11**, 297 (1947).
22. W. D. HAYES, *Linearized supersonic flows with axial symmetry.* Quarterly of Applied Mathematics, **4**, 255—261 (1946).
23. W. D. HAYES, S. H. BROWNE, R. J. LEW, *Linearized theory of conical supersonic flow with applications to triangular wings.* Rep. Amer. Aviation Inc. nr. NA 46—818.
24. W. D. HAYES, R. C. ROBERTS, N. HAASER, *Generalized linearized conical flow.* Techn. Notes N.A.C.A., *2667*.
25. C. IACOB, *Sur un problème mixte pour le plan muni de coupures rectilignes alignées.* Comptes rendus, Paris, **222**, 255 (1949)
26. — *Rezolvarea unor probleme la limită pentru planul cu tăieturi rectilinii aliniate.* Studii şi cercetări matematice, **I**, 393—417 (1950).
27. — *Teoria aripei unghiulare la viteze supersonice.* Anal. Acad. R.P.R. (Seria mat., fiz. chim.), **III**, *15*, 349 (1950).
28. — *Introducere matematică în mecanica fluidelor.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 661—666 (1952).
29. — *Cercetări asupra teoriei mişcărilor conice.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R. (Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice), **VI**, *3*, 603 (iulie-august-septembrie 1954).
30. R. T. JONES, *Thin oblique airfoils at supersonic speeds.* Tech.-Notes N.A.C.A., N, 1107, (1946), (din Math. Rev. **8**, 109 (1947)).
31. A. LAGERSTROM, *Linearized supersonic theory of conical wings.* Techn. Notes N.A.C.A. N. 1685 (1948) (din Math. Rev., *10*, 163 (1949)).
32. O. LAPORTE, R. C. F. BARTELS, R.C.O. ROURKE, *An Investigation of linearized equations for the flow past conical bodies. Part III Supersonic flow past an elliptic cone at an angle of attack.* Engineering Research Institute. Univ. of Michigan, C. M. 575, Ann Arbor, Michigan, 1949, 105 pp (din Math. Rev. **11**, 275 (1949)).
33. R. LEGENDRE, *Ecoulement supersonique autour d'une aile à bords d'attaque subsoniques.* Comptes rendus, Paris, **245**, 889 (1957).
34. ELENA MURGULESCU, *Asupra unor probleme la limită din teoria mişcărilor conice.* Comunicările Acad. R.P.R., **I**, *6*, 447—453 (1951).
35. — *Problema la limită din teoria mişcărilor conice în jurul aripii subţiri de secţiune dată.* Comunicările Acad. R.P.R., **II**, *9—10*, 489—494 (1952).
36. — *Mişcarea supersonică în jurul aripei în Δ cu fuselaj conic.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R. (Secţiunea de şt. mat. şi fiz.), **VI**, *4*, 741—753 (1954).

37. ELENA MURGULESCU, *Asupra mișcării conice în cazul aripii subțiri, exterioară conului caracteristic al vîrfului.* Comunicările Acad. R.P.R., **VI**, *10*, 1179—1185 (1956).
38. N. PATRAULEA, *Mișcarea supersonică în jurul unei aripi care traversează un con aproape circular.* Bul. științ. Acad. R.P.R. (Secțiunea de științe tehn. și chim.), **V**, *1—4*, 29 (1953).
39. N. PATRAULEA, D. PANTAZOPOL, *Mișcarea conică în jurul unei aripi avînd la unul din capete un con aproape circular.* Bul. științ. Acad. R.P.R. (Secțiunea de științe tehnice și chimice), **VI**, *4*, 13 (1954).
40. H. PORITSKY, *Homogeneous harmonic functions.* Quarterly of Applied Mathematics, **6**, 379—388 (1949).
41. — *Linearized compressible Flow.* ibid., 389—403.
42. A. ROBINSON, *Lift and drag of a flat delta wing at supersonic speeds.* Royal-Air. East. Report, *1791* (1946).
43. W. R. SEARS, *General Theory of High Speed Aerodynamics*, Princeton University Press (1954).
44. SMIRNOV, *Curs de matematici superioare*, Ed. tehnică, București, vol. III, partea a II-a, 227 (1955).
45. R. M. SNOW, *Aerodynamics of thin quadrilateral wings at supersonic speeds*, Quarterly of Applied Math., **5**, 417—428 (1948).
46. H. J. STEWART, *The lift of a delta wing at supersonic speeds.* Quarterly of Applied Mathematics, **4**, 246—254 (1946).
47. H. J. STEWART, A. E. PUCKETT, *Aerodynamic performance of delta wings at supersonic speeds*, J. Aeron. Sci., **14**, 567—568 (1947).
48. G. N. WARD, *Linearized Theory of Steady High-Speed Flow.* Cambridge University Press (1955).

FORME EXTERIOARE CU BAZA INFINITĂ

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

1. **Introducere.** Obiectul prezentei lucrări este stabilirea unor proprietăţi algebrice ale formelor exterioare, cînd numărul simbolurilor x^i este infinit.

Prima parte a lucrării se ocupă de produse de forme exterioare omogene de grad oarecare, obţinîndu-se un rezultat definitiv prin introducerea unor matrice simbolice, infinite, rezultat valabil şi pentru formele exterioare cu bază finită.

Punîndu-se problema — abordată de E. Cartan [1] *) —, ca o formă exterioară omogenă de grad p să se scrie ca produs de p forme liniare, se obţin condiţii necesare, ca acest fapt să fie îndeplinit, atît pentru formele exterioare cu bază finită cît şi infinită.

Pe parcurs, se ridică probleme complet noi ca produse infinite de forme exterioare infinite.

Forma adjunctă unei forme date, necesită, în cazul formelor exterioare infinite, o adîncire prin introducerea formelor adjuncte la dreapta sau la stînga, deoarece formele exterioare infinite nu admit decît numai adjunct la dreapta sau numai la stînga după cum sînt de grad p sau $\infty - p$. Se extinde noţiunea de produs scalar şi se introduce noţiunea de normă.

Dacă Ω_∞^p este mulţimea formelor exterioare infinite de grad p, iar $\omega \in \Omega_\infty^p$, aplicaţia

$$\omega \to N(\omega)$$

unde $N(\omega)$ este norma lui ω, determină pe Ω_∞^p o structură de spaţiu Hilbert.

Studiul proprietăţilor normei au condus la un şir de egalităţi dintre care cea mai simplă este egalitatea lui Cauchy

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (b_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \right)^2$$

*) p. 19.

În ultima parte a lucrării se studiază operatori în spațiul vectorial Ω_∞^2.

2. **Definiție.** Fie un sistem infinit de numere hipercomplexe

$$x^1, x^2, \ldots x^n, \ldots$$

legate prin relațiile

$$x^i x^j + x^j x^i = 0$$

$$(x^i)^2 = 0 \qquad (i, j = 1,2, \ldots). \tag{1}$$

Algebra $\mathfrak{A}_\infty$ cu elementele bazei

$$\begin{gathered} 1, x^1, x^2, x^1x^2, x^3, x^1x^3, x^2x^3, x^1x^2x^3, \ldots \\ \ldots, x^n, x^1x^n, x^2x^n, x^1x^2x^n, \ldots, x^1x^2x^3 \ldots x^{n-1}x^n, \ldots \end{gathered} \tag{2}$$

construită pe (C) este complet determinată de (1). Dacă notăm cu $A_1(x^i)$ algebra nilpotentă de elemente ale bazei 1, x^i, cu $(x^i)^2 = 0$, atunci algebra $A_2(x^i, x^j)$ de elemente ale bazei 1, x^i, x^j, x^ix^j este produsul

$$A_1(x^i) \times A_1(x^j)$$

În general produsul

$$A_1(x^1) \times A_1(x^2) \times \ldots \times A_1(x^n)$$

definește algebra $A_n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ de ordinul 2^n, de elemente ale bazei

$$\begin{gathered} 1, x^1, x^2, x^1x^2, x^3, x^1x^3, x^2x^3, x^1x^2x^3, \ldots \\ \ldots x^n, x^1x^n, x^2x^n, \ldots, x^1x^2x^3 \ldots x^{n-1}x^n, \end{gathered}$$

fapt ce se demonstrează din aproape în aproape observînd că

$$A_n\ (x^1, x^2, \ldots, x^n) = A_1(x^1) \times A_{n-1}(x^2, x^3, \ldots, x^n) \tag{3}$$

Acest rezultat ne permite să afirmăm că algebra $\mathfrak{A}_\infty$ este produsul a o infinitate de algebre nilpotente $A_1(x^i)$ și anume

$$\mathfrak{A}_\infty = A_1(x^1) \times A_2(x^2) \times \ldots \times A_n\ (x^n) \times \ldots \tag{4}$$

Se observă însă că produsul nu este direct.
Dacă $\omega_0 \in C$, $\tau_0 \in C$ atunci

$$\omega_1 = \omega_0 x^1 + \tau_0 \in A_1(x^1)$$

tot astfel cu

$$\omega_1 \in A_1(x^1),\ \tau_1 \in A_1(x^1)$$

urmează că

$$\omega_2 = \omega_1 x^2 + \tau_1 \in A_2(x^1, x^2)$$

În general dacă

$$\omega_n \in A_n(x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad \tau_n \in A_n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

avem și

$$\omega_{n+1} = \omega_n\, x^{n+1} + \tau_n \in A_{n+1}(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n+1}) \tag{5}$$

operație ce poate fi continuată indefinit.

Fie acum două numere în algebra

$$\omega = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_{12}x^1x^2 + \ldots + a_{12\ldots n}x^1x^2\ldots x^n + \ldots$$

$$\tau = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + b_{12}x^1x^2 + \ldots + b_{12\ldots n}x^1x^2\ldots x^n + \ldots$$

Suma a două numere din algebră este tot un număr din algebră. Produsul lor este dat de

$$\omega.\tau = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x^1 + (a_0b_2 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_{12} + a_1b_2 -$$
$$- a_2b_1 + b_0a_{12})\ x^1x^2 + (a_0b_3 + a_3b_0)x^3 + (a_0b_{13} + b_0a_{13} + a_1b_3 - a_3b_1)x^1x^3 +$$
$$+ (a_0b_{23} + b_0a_{23} + a_2b_3 - a_3b_2)x^2x^3 + (a_0b_{123} + b_0a_{123} + a_1b_{23} + b_1a_{23} -$$
$$- a_2b_{13} - b_2a_{13} + a_3b_{12} + b_3a_{12})x^1x^2x^3 + \ldots + [a_0b_{12\ldots n} + b_0a_{12\ldots n} +$$
$$+ (-1)^{n-1}b_1a_{23\ldots n} + a_1b_{23\ldots n} + (-1)^{n-2}b_2a_{13\ldots n} - a_2b_{13\ldots n} +$$
$$+ (-1)^I a_{i_1i_2\ldots i_q}b_{i_{q+1}i_{q+2}\ldots i_n} + (-1)^{I+q(n-q)}a_{i_{q+1}i_{q+2}\ldots i_n}b_{i_1i_2\ldots i_q} +$$
$$+ \ldots]\ x^1x^2\ldots x^n + \ldots$$

unde I este numărul de inversiuni al permutării

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

Rezultă de aici că produsul numerelor ω și τ este dat de

$$\omega.\tau = \sum_{\substack{i_k > i_j = 0 \\ k>j}}^{\infty} \left[\sum_{\alpha_i} (-1)^I a_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2}\ldots i_{\alpha_q}} b_{i_{\alpha_{q+1}} i_{\alpha_{q+2}}\ldots i_{\alpha_p}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\alpha_i} (-1)^{I+q(p-q)}\, a_{i_{\alpha_{q+1}} i_{\alpha_{q+2}}\ldots i_{\alpha_p}} b_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2}\ldots i_{\alpha_q}} \right] x^{i_1} x^{i_2}\ldots x^{i_p} \tag{6}$$

unde I este numărul de inversiuni ale permutării

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & \ldots & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}$$

cu $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_p$. Numărul termenilor care intervin în fiecare paranteză este 2^p, de unde rezultă că operația de înmulțire este închisă în algebră.

În particular, dacă ω și τ sînt forme exterioare infinite de grad p și q respectiv atunci avem

$$\omega \cdot \tau = \sum \alpha_{i_1 i_2\ldots i_{p+q}}\, x^{i_1} x^{i_2}\ldots x^{i_{p+q}}$$

Pentru $p = q = 1$, coeficienții α sînt determinanții matricei $2 \times \infty$

$$\left\| \begin{matrix} a_1 a_2 \dots a_n \dots \\ b_1 b_2 \dots b_n \dots \end{matrix} \right\|$$

unde

$$\omega = a_i x^i, \qquad \tau = b_i x^i \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

iar în cazul general cînd p și q sînt oarecare, coeficienții se pot exprima în mod asemănător ca determinanți simbolici ai matricei coeficienților celor două forme (sau n forme) ω și τ. Legea de formare a acestor coeficienți va fi dată în aliniatul următor.

Inversul unui număr ω cu $a_0 \neq 0$ se poate determina din egalitatea

$$1 = \omega . \tau = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x^1 + \dots$$

deoarece sistemul

$$a_0 b_0 = 1$$

$$a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0, \quad a_0 b_2 + a_2 b_0 = 0, \quad a_0 b_{12} + b_0 a_{12} + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \qquad (7)$$

. . . . . .

poate fi rezolvat din aproape în aproape

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, b_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}, b_2 = -\frac{a_2}{a_0^2}, b_{12} = -\frac{a_{12}}{a_0^2}, \dots$$

3. **Forme exterioare omogene.** Dacă ω_k $(k = 1, 2, \dots, p)$ sînt p forme liniare infinite

$$\omega_k = a_{ki} x^i, \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

atunci produsul lor se scrie

$$\omega_1 . \omega_2 \dots \omega_p = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p = 1}^{\infty} \begin{vmatrix} a_{1i_1} a_{1i_2} \dots a_{1i_p} \\ a_{2i_1} a_{2i_2} \dots a_{2i_p} \\ \dots \dots \dots \\ a_{pi_1} a_{pi_2} \dots a_{pi_p} \end{vmatrix} x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_p} \qquad (8)$$

Coeficientul lui $x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_p}$ se obține din matricea $(p \times \infty)$

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \dots \\ a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{p1} a_{p2} a_{p3} \dots a_{pn} \dots \end{matrix} \right\| \qquad (9)$$

formînd determinantul cu coloanele $i_1, i_2, \dots, i_p$. Dacă matricea $\mathfrak{M}$ este de rang $r < p$ atunci produsul $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_p$ este nul.

Aceste rezultate se pot extinde la produse exterioare infinite, omogene, de grad superior folosind o notație simbolică convenabilă.

Să considerăm mai întîi formele omogene de gradul doi

$$\delta_1 = a_{1ij}\, x^i\, x^j, \quad \delta_2 = a_{2hk}\, x^h\, x^k$$

cu $a_{sij} \neq a_{sji}$. În produsul

$$\delta_1 \delta_2 = a_{1ij}\, a_{2hk}\, x^i\, x^j\, x^h\, x^k$$

coeficientul lui $x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} x^{i_4}$, $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ este suma

$$\sum_{\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_4} (-1)^I\, a_{1i_{\alpha_1} i_{\alpha_2}}\, a_{2i_{\alpha_3} i_{\alpha_4}} \tag{10}$$

unde I este numărul de inversiuni ale permutării

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & i_{\alpha_3} & i_{\alpha_4} \end{pmatrix}$$

Să observăm că cei 24 termeni ce intervin în suma (10) cu semnul lor, pot fi consideraţi ca termenii unui determinant simbolic de ordinul patru. În adevăr, dacă vom conveni să notăm

$$a_{ki\alpha_1 i\alpha_2} - a_{ki\alpha_2 i\alpha_1} = \begin{vmatrix} a_{ki\alpha_1} & a_{ki\alpha_2} \\ a_{ki\alpha_1} & a_{ki\alpha_2} \end{vmatrix} \tag{11}$$

atunci suma (10) se poate scrie ca valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & a_{1i_3} & a_{1i_4} \\ a_{1i_1} & a_{1i_2} & a_{1i_3} & a_{1i_4} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & a_{2i_3} & a_{2i_4} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & a_{2i_3} & a_{2i_4} \end{vmatrix} \tag{12}$$

dezvoltat după regula lui Laplace după primele două linii, determinanţii minori de ordinul doi avînd valoarea dată de (11).

În consecinţa produsului formelor δ_1, δ_2 se asociază matricea dreptunghiulară infinită

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \cdots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \cdots \end{matrix} \right\| \tag{13}$$

Coeficientul lui $x^{i_1} x^{i_2} x^{i_3} x^{i_4}$, $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ fiind determinantul de ordinul patru ce se obţine din (13) luînd coloanele i_1, i_2, i_3, i_4, determinant ce se dezvoltă ca şi (12) cu convenţia (11).

Pentru ca produsul $\delta_1 \delta_2$ să fie nul este necesar şi suficient ca toţi determinanţii (12) ce se pot forma din matricea (13) să fie nuli. Trebuie precizat de la început că fiind date două forme exterioare omogene de grad doi, putem scrie produsul lor prin intermediul matricei (13), însă matricea (13) nu are elementele deduse din coeficienţii celor două forme,

ea permițînd numai, cu ajutorul determinanților (12), ce se pot forma din ea, de a se obține coeficienții formei produs. Avantajul matricei (13) este că unifică criteriul de determinare al coeficienților formei produs, pentru forme omogene de orice grad.

În adevăr, dacă considerăm acum p forme omogene infinite de grad doi

$$\delta_k = a_{kij}\, x^i x^j \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

produsul exterior

$$\delta_1\, \delta_2 \ldots \delta_p$$

este nul dacă matricea $(2p \times \infty)$

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \ldots & a_{pn} & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \ldots & a_{pn} & \ldots \end{array} \right\| \tag{14}$$

are toți determinanții de ordinul $2p$ extrași din matricea $\mathfrak{M}$

$$D_{2p} = \left| \begin{array}{cccc} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \ldots & a_{1j_{2p}} \\ a_{1j_1} & a_{1j_2} & \ldots & a_{1j_{2p}} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \ldots & a_{2j_{2p}} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \ldots & a_{2j_{2p}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{pj_1} & a_{pj_2} & \ldots & a_{pj_{2p}} \\ a_{pj_1} & a_{pj_2} & \ldots & a_{pj_{2p}} \end{array} \right| \tag{15}$$

nuli. Determinanții D_{2p} se vor dezvolta după regula lui Laplace numai după perechile de linii egale și pentru determinanții de ordinul doi ce intervin în dezvoltare se va ține seamă de convenția (11).

Fie acum două forme δ_p și δ_q de grad p și q oarecare

$$\delta_p = a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_p}$$

$$\delta_q = b_{j_1 j_2 \ldots j_q}\, x^{j_1} x^{j_2} \ldots x^{j_q}$$

Să găsim condițiile ca produsul $\delta_p . \delta_q$ să fie nul. Avem

$$\delta_p . \delta_q = a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, b_{j_1 j_2 \ldots j_q}\, x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_p} x^{j_1} x^{j_2} \ldots x^{j_q}$$

Dacă detaşăm din expresia produsului monomul

$$x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_p} x^{i_{p+1}} \dots x^{i_{p+q}} \tag{16}$$

cu $i_1 < i_2 < \dots < i_{p+q}$, şi dacă păstrăm pe $i_1, i_2, \dots, i_p$, ficşi, coeficientul acestui monom va fi

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p} \sum_k (-1)^I b_{k_1 k_2 \dots k_q}$$

unde I este numărul de inversiuni ale permutării

$$\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} & \dots & i_{p+q} \\ k_1 & k_2 & \dots & k_q \end{pmatrix}$$

semnul $\sum$ întinzîndu-se la toate permutările lui $i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_{p+q}$ în număr de $q!$ Se vede imediat că dacă notăm

$$b_{k_1 k_2 \dots k_q} = b_{k_1} b_{k_2} \dots b_{k_q}$$

atunci cu această convenţie putem scrie

$$\sum (-1)^I b_{k_1 k_2 \dots k_q} = \begin{vmatrix} b_{i_{p+1}} b_{i_{p+2}} \dots b_{i_{p+q}} \\ b_{i_{p+1}} b_{i_{p+2}} \dots b_{i_{p+q}} \\ \dots\dots\dots \\ b_{i_{p+1}} b_{i_{p+2}} \dots b_{i_{p+q}} \end{vmatrix} \tag{17}$$

şi vom conveni aici să dăm determinantului (17) această sumă.

Dacă vom considera acum şi pe $i_1, i_2, \dots, i_p$ variabili iar $i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_{p+q}$ ficşi, coeficientul monomului (16) va fi dat de

$$b_{k_1 k_2 \dots k_q} \sum (-1)^{I'} a_{h_1 h_2 \dots h_p}$$

unde I' este numărul de inversiuni ale permutării

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ h_1 & h_2 & \dots & h_p \end{pmatrix}$$

$h_1, h_2, \dots h_p$ luînd toate valorile $i_1, i_2, \dots, i_p$. În mod analog, dacă punem

$$a_{h_1 h_2 \dots h_p} = a_{h_1} a_{h_2} \dots a_{h_p}$$

rezultă că putem scrie simbolic

$$\sum' (-1)^{I'} a_{h_1 h_2 \dots h_p} = \begin{vmatrix} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p} \\ a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p} \\ \dots\dots\dots \\ a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p} \end{vmatrix} \tag{18}$$

Dacă căutăm acum coeficientul monomului (16), el va fi o sumă de forma

$$\sum (-1)^I a_{h_1 h_2 \dots h_p} b_{k_1 k_2 \dots k_q}$$

unde I este numărul de inversiuni ale permutării

$$\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \dots i_p\ i_{p+1} \dots i_{p+q} \\ h_1\ h_2 \dots h_p\ k_1 \dots k_q \end{pmatrix}$$

Acest coeficient va fi egal cu valoarea determinantului de ordin $p+q$

$$\Delta_{p+q} = \left|\begin{array}{l} \left.\begin{array}{llll} a_{i_1} & a_{i_2} & a_{i_3} \dots & a_{i_{p+q}} \\ a_{i_1} & a_{i_2} & a_{i_3} \dots & a_{i_{p+q}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_1} & a_{i_2} & a_{i_3} \dots & a_{i_{p+q}} \end{array}\right\} p \text{ linii} \\ \left.\begin{array}{llll} b_{i_1} & b_{i_2} & b_{i_3} \dots & b_{i_{p+q}} \\ b_{i_1} & b_{i_2} & b_{i_3} \dots & b_{i_{p+q}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_1} & b_{i_2} & b_{i_3} \dots & b_{i_{p+q}} \end{array}\right\} q \text{ linii} \end{array}\right| \tag{19}$$

dezvoltat după regula lui Laplace, după primele p linii cu convenţia (17) şi (18).

Rezultă imediat că produsul $\delta_1\ \delta_2$ este nul dacă matricea $(p+q) \times \infty$

$$\mathfrak{M} = \left\|\begin{array}{l} \left.\begin{array}{llll} a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_n \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_n \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_n \dots \end{array}\right\} p \text{ linii} \\ \left.\begin{array}{llll} b_1 & b_2 & b_3 \dots & b_n \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 \dots & b_n \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 \dots & b_n \dots \end{array}\right\} q \text{ linii} \end{array}\right\| \tag{20}$$

are toţi determinanţii de ordin $p+q$ ce se obţin luînd $p+q$ coloane arbitrare, determinanţi dezvoltaţi după aceeaşi convenţie ca şi (19), nuli.

Urmează de aici că în produsul $\delta_p\ \delta_q$ coeficientul lui

$$x^{i_1}\ x^{i_2} \dots x^{i_{p+q}}$$

se obţine din matricea (20) luînd determinantul Δ_{p+q} cu coloanele $i_1, i_2, \dots, i_{p+q}$ şi dezvoltîndu-l după convenţia (17) şi (18).

Pentru un produs de s forme omogene infinite $\delta_1\ \delta_2 \dots \delta_s$ de grad $r_1, r_2, \dots, r_s$ respectiv se obţine pe aceeaşi cale un rezultat analog.

4. **Forme monome.** Să considerăm forma patratică infinită

$$\omega = a_{ij}\ x^i\ x^j\ , \quad a_{12} \neq 0, \tag{21}$$

Avem identic

$$\omega = \left(x^1 - \frac{a_{23}}{a_{12}} x^3 - \frac{a_{24}}{a_{12}} x^4 - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{12}} x^n - \ldots\right)(a_{12} x^2 + a_{13} x^3 + \ldots$$

$$\ldots + a_{1n} x^n + \ldots) + \psi$$

unde ψ este o formă pătratică care nu conține pe x^1, x^2. Deducem de aici că o formă patratică se poate scrie totdeauna sub forma următoare

$$\omega = u_1 u_2 + u_3 u_4 + \ldots + u_{2n-1} u_{2n} + \ldots$$

Să punem acum condiția ca ω să se scrie ca produs de două forme liniare

$$\omega = (b_i x^i)(c_j x^j) \tag{22}$$

Din (21) și (22) obținem sistemul infinit de legături

$$a_{ij} = b_i c_j - b_j c_i \tag{23}$$

Ca să obținem condițiile pe care trebuie să le îndeplinească a_{ij}, trebuie să eliminăm pe b_i, c_j din (23). Fie i, j, h, k, patru indici *fiși*, oarecari; în acest caz, legăturile (23) sînt

$$\begin{aligned} a_{ij} &= b_i c_j - b_j c_i, & a_{kh} &= b_k c_h - b_h c_k \\ a_{ik} &= b_i c_k - b_k c_i, & a_{jk} &= b_j c_k - b_k c_j \\ a_{ih} &= b_i c_h - b_h c_i, & a_{jh} &= b_j c_h - b_h c_j \end{aligned} \tag{24}$$

În (24), partea a doua este formată de cei 6 determinanți ce se pot forma din matricea

$$\left\| \begin{matrix} b_i & b_j & b_k & b_h \\ c_i & c_j & c_k & c_h \end{matrix} \right\|$$

în care avem totdeauna identitatea

$$\begin{vmatrix} b_i & b_j \\ c_i & c_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_k & b_h \\ c_k & c_h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_i & b_k \\ c_i & c_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_j & b_h \\ c_j & c_h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_i & b_h \\ c_i & c_h \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_j & b_k \\ c_j & c_k \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă că rezultatul eliminării din (23) este

$$a_{ij} a_{kh} - a_{ik} a_{jh} + a_{ih} a_{jk} = 0 \tag{25}$$

Se demonstrează [1] *) că aceste condiții sînt și suficiente. Ne propunem să generalizăm acest rezultat și anume să găsim condițiile pe care să le îndeplinească coeficienții formei exterioare infinite de grad p

$$\Phi = a_{i_1 i_2 \ldots i_p} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_p},$$

*) p. 19.

pentru ca să avem identic

$$\Phi = \psi_1 \cdot \psi_2 \dots \psi_p \tag{26}$$

$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$, fiind p forme liniare infinite

$$\psi_j = b_{jk}\, x^k \qquad (j = 1, 2, \dots, p)$$

Dacă înlocuim pe Φ și ψ_k în (26) urmează că trebuie să avem

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p}\, x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_p} = b_{1k_1} x^{k_1} b_{2k_2} x^{k_2} \dots b_{pk_p}\, x^{k_p} \tag{26'}$$

și dacă ținem seamă de legile de înmulțire ale produselor exterioare din (26') obținem

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p} = \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_p} \\ b_{2i_1} & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_p} \\ b_{pi_1} & b_{pi_2} & \dots & b_{pi_p} \end{vmatrix} \tag{27}$$

Ca să găsim condițiile căutate trebuie să eliminăm în (27) pe b_{si_k}. În acest scop să considerăm matricea $(p \times 2p)$

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_p} & b_{1i_{p+1}} & \dots & b_{1i_{2p}} \\ b_{2i_1} & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_p} & b_{2i_{p+1}} & \dots & b_{2i_{2p}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{pi_1} & b_{pi_2} & \dots & b_{pi_p} & b_{pi_{p+1}} & \dots & b_{pi_{2p}} \end{matrix} \right\|$$

extrasă din matricea $(p \times \infty)$ a coeficienților lui ψ_j luînd $2p$ coloane oarecare $i_1, i_2, \dots, i_{2p}$ și să observăm că avem între determinanții de ordinul p ce se pot forma din matricea $\mathfrak{M}$ următoarea relație:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} \dots b_{1i_{p-1}} & b_{1i_{p+k}} \\ b_{2i_1} & b_{2i_2} \dots b_{2i_{p-1}} & b_{2i_{p+k}} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{pi_1} & b_{pi_2} \dots b_{pi_{p-1}} & b_{pi_{p+k}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1i_p} & b_{1i_{p+1}} \dots b_{1i_{p+k-1}} & b_{1i_{p+k+1}} \dots b_{1i_{2p}} \\ b_{2i_p} & b_{2i_{p+1}} \dots b_{2i_{p+k-1}} & b_{2i_{p+k+1}} \dots b_{2i_{2p}} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{pi_p} & b_{pi_{p+1}} \dots b_{pi_{p+k-1}} & b_{pi_{p+k+1}} \dots b_{pi_{2p}} \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

Pentru demonstrație să găsim coeficientul produsului

$$b_{\alpha_1 i_1} b_{\alpha_2} \dots b_{\alpha_{p-1} i_{p-1}} \cdot b_{\alpha_p i_{p+h}} \cdot b_{\beta_1 i_p} b_{\beta_2 i_{p+1}} \dots b_{\beta_h i_{p+h-1}} b_{\beta_{h+1} i_{p+h+1}} \dots b_{\beta_p i_{2p}} \tag{29}$$

unde $(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_p)$ și $(\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_p)$ sînt două permutări oarecare ale indicilor $1, 2, \dots, p$.

În (28) sînt doi termeni (29) și anume unul cu coeficientul

$$(-1)^{I_1 + I_2 + h} \tag{30}$$

unde I_1 este numărul de inversiuni ale permutării

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}$$

iar I_2 este numărul de inversiuni ale permutării

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_p \end{pmatrix}$$

şi un al doilea ce se obţine în (29) înlocuind pe $b_{\alpha_p i_{p+h}}$ cu $b_{\beta_r i_{p+r}}$ unde $\alpha_p = \beta_r$ şi $r > h$, sau cu $b_{\beta_r i_{p+r-1}}$ unde $\alpha_p = \beta_r$ şi $r > h$.

Acest al doilea termen are dacă $r > h$, coeficientul

$$(-1)^{I_1+I_2+r+r-h-1} \tag{31}$$

iar dacă $r < h$, coeficientul

$$(-1)^{I_1+I_2+r+h-r-1} \tag{31'}$$

adică acelaşi, însă de semn contrar lui (30). Prin urmare coeficientul lui (29) este zero şi astfel relaţia (28) este demonstrată.

Dacă în (28) ţinem seamă de (27), urmează că între coeficienţii formei Φ, trebuie să avem legăturile

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} i_{p+k}} a_{i_p i_{p+1} \dots i_{p+k-1} i_{p+k+1} \dots i_{2p}} = 0 \tag{32}$$

oricare ar fi indicii $i_1 < i_2 < \dots < i_{2p}$.

Din demonstraţia dată rezultă că condiţiile (32) sînt necesare. Suficienţa lor se poate arăta în mod analog ca în [1] *) folosind sistemul asociat unei forme date.

Prin urmare dacă condiţiile (32) sînt îndeplinite, forma Φ este transformata unei forme monome

$$\widetilde{\Phi} = \psi_1 \cdot \psi_2 \dots \psi_p \tag{33}$$

unde ψ_i sînt formele liniare infinite

$$\psi_i = b_{ik}\, x^k$$

Dacă $\widetilde{\Phi}$ este de forma (33), rezultă cu necesitate că

$$\widetilde{\Phi} \cdot \widetilde{\Phi} = 0$$

Coeficienţii formei $\widetilde{\Phi} \cdot \widetilde{\Phi}$ sînt daţi însă de matricea (20). Dacă condiţiile (32) sînt îndeplinite atunci şi coeficienţii căutaţi sînt nuli ca o consecinţă imediată a relaţiilor (32).

5. Forma adjunctă unei forme date. Să notăm cu ω_∞ forma monomă exterioară infinită

$$\omega_\infty = x^1 x^2 x^3 \dots x^n \dots \tag{34}$$

iar cu $\omega_{\infty-p}$ forma infinită

$$\omega_{\infty-p} = x^{i_{p+1}} x^{i_{p+2}} \dots x^{i_n} x^{n+1} x^{n+2} \dots$$

*) p. 18.

cu

$$i_{p+k} \leqslant n, \quad k = 1, 2, \ldots, n - p$$

bineînţeles sînt o infinitate de forme $\omega_{\infty - p}$, pe care le vom numi forme de grad $\infty - p$.

Vom numi adjunctul la stînga a unei forme exterioare monome date τ cu coeficient unitate, forma monomă ${}^*\tau$, astfel încît să avem

$${}^*\tau \cdot \tau = \omega_\infty \tag{35}$$

iar adjunctul la dreapta τ^*, forma monomă care verifică relaţia

$$\tau \cdot \tau^* = \omega_\infty \tag{35'}$$

Din definiţie rezultă că

$${}^* \omega_\infty = 1$$

precum şi următoarele consecinţe

a) O formă exterioară de grad finit are adjunct la dreapta bine determinat în schimb adjunctul la stînga este determinat în afară de semn.

b) O formă exterioară de grad $\infty - p$ are adjunct la stînga bine determinat în schimb adjunctul la dreapta este determinat în afară de semn.

Putem construi cu uşurinţă forme exterioare de grad ∞ care nu au adjunct complet determinat nici la dreapta nici la stînga. Astfel

$$\lambda = x^1 x^3 x^5 \ldots x^{2n+1} \ldots$$

are adjunct la dreapta şi la stînga pe

$$\bar{\lambda} = \pm x^2 x^4 \ldots x^{2n} \ldots$$

însă semnul nu poate fi precizat.

Se vede cu uşurinţă că

$${}^*(\omega_p^*) = \omega_p, \quad ({}^*\omega_{\infty - p})^* = \omega_{\infty - p}.$$

Dacă ω este o formă monomă de grad p (sau $\infty - p$) şi $a \in C$ atunci prin definiţie

$$(a\omega)^* = \bar{a}\omega^*, \quad [\text{sau}^* \ (a\omega) = \bar{a}^*\omega]$$

încît pentru o formă Φ de grad p (sau $\infty - p$) cu coeficienţi în (C) avem

$$\Phi \cdot \Phi^* = \alpha \cdot \omega_\infty$$

sau

$${}^* \Phi \cdot \Phi = \alpha \cdot \omega_\infty$$

unde α este o formă de grad zero pozitiv definită. Mai general, dacă Φ şi Ψ sînt două forme de acelaşi grad p (sau $\infty - p$), cu coeficienţii c_i, γ_i respectiv, atunci

$$\Phi \cdot \Psi^* = \overline{\Psi \cdot \Phi^*} = (\Sigma\, c_i \cdot \bar{\gamma}_i)\, \omega_\infty = (\Sigma\, \bar{\gamma}_i \cdot c_i)\, \omega_\infty \tag{36}$$

sau

$$^{*}\Phi \cdot \Psi = \overline{^{*}\Psi \cdot \Phi} = (\Sigma\, \bar{c}_i \cdot \gamma_i)\ \omega_\infty = \overline{(\Sigma\, c_i\ \bar{\gamma}_i)}\ \omega_\infty \tag{36'}$$

Dacă

$$\Phi = a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, x^{i_1}\, x^{i_2} \ldots x^{i_p}, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_p$$

atunci

$$\Phi^{*} = (-1)^{i_1 + \ldots + i_p - \frac{p(p+1)}{2}}\, \bar{a}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, x^{j_1} x^{j_2} \ldots x^{j_p} \ldots$$

cu $j_h < j_k$ cînd $h < k$ și $j_\alpha \neq i_\beta$.

Ne propunem să arătăm acum că dacă Φ și Ψ sînt două forme omogene infinite de grad p și q respectiv atunci se pot găsi doi operatori diferențiali Δ_p sau Δ_q încît să avem

$$(\Phi \cdot \Psi)^{*} = \Delta_p (\Psi^{*}) = \Delta_q (\Phi^{*}) \tag{37}$$

Dacă

$$\Phi = a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, x^{i_1}\, x^{i_2} \ldots x^{i_p}$$

$$\Psi = b_{j_1 j_2 \ldots j_q}\, x^{j_1}\, x^{j_2} \ldots x^{i_q}$$

să arătăm că

$$\Delta_q = \varepsilon \bar{b}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial}{\partial x^{j_2}} \ldots \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \text{ cu } \varepsilon = \pm 1$$

Vom demonstra pentru formele particulare

$$\Psi = x^{j_1}\, x^{j_2} \ldots x^{j_q} \text{ și } \Phi = x^{i}$$

din care dealtfel se poate deduce cazul general. Avem prin ipoteză

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_q, \quad j_k < i < j_{k+1}$$

deci

$$x^i\, x^{j_1}\, x^{j_2} \ldots x^{j_q} = (-1)^k\, x^{j_1}\, x^{j_2} \ldots x^{j_k}\, x^i\, x^{j_{k+1}} \ldots x^{j_k}$$

și

$$(x^i\, x^{j_1}\, x^{j_2} \ldots x^{j_q})^{*} = (-1)^{k + j_1 + j_2 + \ldots + j_q + i - \frac{(p+1)(p+2)}{2}}\, x^{\alpha_1} x^{\alpha^2} \ldots$$

cu $\alpha_s \neq 1, j_r$,

$$(x^{j_1} x^{j_2} \ldots x^{j_q})^{*} = (-1)^{j_1 + j_2 + \ldots + j_q - \frac{p(p+1)}{2}} (-1)^{i-1-k}\, x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots$$

însă

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (x^{j_1} x^{j_2} \ldots x^{j_q})^{*} = (-1)^{j_1 + j_2 + \ldots + j_q - \frac{p(p+1)}{2}} (-1)^{i-k-1} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \ldots$$

deoarece pentru a aduce pe x^1 în primul loc sînt necesare

$$i - 1 - k$$

schimbări de semn; de unde rezultă de aici că

$$(x^i\, x^{j_1} x^{j_2} \dots x^{j_q})^* = (-1)^{p^2} \frac{\partial}{\partial x^i}\, x^{j_1} x^{j_2} \dots x^{j_q})^*$$

și se vede că exponentul nu depinde decît de p, fiind independent de i, k, j. Prin urmare dacă

$$\Phi = a_i\, x^i$$

avem

$$(\Phi \cdot \Psi)^* = (-1)^{p^2} \left(\overline{a}_i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \Psi^* \tag{38}$$

și cum operația * este distributivă față de adunare, putem înlocui pe Ψ cu o formă omogenă infinită de grad oarecare q.

6. **Produse infinite de forme exterioare liniare infinite.** Fie $\Psi_1, \Psi_2, \dots$ o infinitate de forme liniare infinite

$$\Psi_i = a_{ik}\, x^k \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

Cu ajutorul lor să formăm forma exterioară infinită de grad infinit

$$\Phi = \Psi_1 \cdot \Psi_2 \dots \Psi_n \dots \tag{39}$$

Dacă facem calculele în (39) obținem

$$\Phi = \Phi_\infty + \Phi_{\infty-1} + \Phi_{\infty-2} + \dots + \Phi_{\infty-p} + \dots$$

unde de astă dată $\Phi_{\infty-p}$ este mulțimea formelor de grad $\infty - p$

$$\Phi_{\infty-p} = \sum_I b_{k_1 k_2 \dots k_p}\, x^{i_1}\, x^{i_2} \dots x^{i_p} \dots I(i_1, i_2, \dots)$$

cu

$$I = N - K$$

dacă notăm cu N mulțimea numerelor naturale $1, 2, \dots, n, \dots$ iar K reprezintă mulțimea a p numere naturale oarecare. Coeficienții $b_{k_1 k_2 \dots k_p}$ se obțin din matricea infinită

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| \tag{40}$$

şi anume b_0 coeficientul lui $x^1x^2 \ldots x^n \ldots$este determinantul matricei $\mathfrak{M}$, deci

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Coeficientul b_k al produsului exterior $x^1x^2 \ldots x^{k-1}\, x^{k+1} \ldots x^n \ldots$ este determinantul infinit

$$b_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

ce se obţine din matricea $\mathfrak{M}$ suprimînd coloana k. În general coeficientul $b_{k_1k_2\ldots k_p}$este determinantul infinit ce se obţine din matricea $\mathfrak{M}$ suprimînd coloanele $k_1, k_2, \ldots k_p$.

Prin urmare produsul (39) are sens dacă matricea $\mathfrak{M}$ are toţi determinanţii ce se obţin suprimînd 0, 1, 2, ... coloane, oarecare, convergenţi.

Ca să putem permuta în (39) o infinitate de termeni ai produsului, trebuie ca toţi determinanţii astfel formaţi să fie absolut convergenţi.

De exemplu, produsul

$$\Phi = (x^1 + x^2)(x^2 + x^3) \ldots (x^{n-1} + x^n)(x^n + x^{n+1}) \ldots$$

se scrie dezvoltat

$$\Phi = x^1x^2x^3 \ldots x^n \ldots + \sum_{i=0}^{\infty} x^1x^2 \ldots x^i\, x^{i+2} \ldots x^n \ldots (x^\circ = 1)$$

deoarece matricea

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

are determinantul său egal cu unitatea la fel că şi determinanţii ce se obţin suprimînd o coloană oarecare. În schimb toţi determinanţii ce se obţin suprimînd cel puţin două coloane sînt nuli.

Produsele

$$\Phi = \prod_{1}^{\infty} (a_{kk}\, x^k + a_{k,k+1}\, x^{k+1} + \ldots + a_{k,k+p}\, x^{k+p})$$

se scriu dezvoltat astfel

$$\Phi = \Phi_\infty + \Phi_{\infty-1} + \ldots + \Phi_{\infty-M}$$

dacă p este mărginit $p \leqslant M$, deoarece toți determinanții ce se obțin suprimînd mai mult de M coloane sînt nuli. În general, produse infinite de forme liniare cu un număr finit de termeni se scriu ca o sumă finită de forma

$$\Phi_\alpha + \Phi_{\alpha-1} + \ldots + \Phi_{\alpha-m}$$

7. **Produs scalar.** Fie Φ și Ψ două forme infinite exterioare de grad p Φ^* și Ψ^* adjunctele lor la dreapta; avem

$$\Phi\Psi^* = \overline{\Psi\Phi^*}$$

Vom numi produsul scalar al formelor Φ și Ψ, scalarul

$$< \Phi, \Psi > = {}^*(\Phi\, \Psi^*) = {}^*(\overline{\Psi \cdot \Phi^*}) \tag{41}$$

Dacă α_i și β_i sînt coeficienții lui Φ și Ψ respectiv, atunci

$$\Phi\, \Psi^* = (\Sigma\, \alpha_i \overline{\beta_i})\, \omega_\infty$$

și prin urmare

$$< \Phi, \Psi > = \Sigma\, \alpha_i\, \overline{\beta_i}$$

cu condiția ce se impune imediat

$$\sum_{i=1}^{\infty} | \alpha_i\, \overline{\beta_i} | < \infty$$

Dacă x^i sînt înlocuite cu diferențialele dx^i, produsul scalar mai poate fi definit și prin expresia

$$< \Phi, \Psi > = \int_{V_\infty} \Phi\, \Psi^* = \int_{V_\infty} \overline{\Psi\Phi^*} = (\Sigma\, \alpha_i\, \overline{\beta_i}) \int_{V_\infty} dx^1 dx^2 \ldots dx^n \ldots$$

cu condiția ca

$$\int_{V_\infty} dx_1\, dx_2 \ldots = 1$$

Dacă V_∞ este dat de

$$a_i < x^i < b_i' \qquad (a_i, b_i \in R), \quad i = 1, 2, \ldots$$

rezultă că trebuie să avem

$$\prod_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = 1$$

Dacă cerem ca produsul să fie absolut convergent, trebuie mai întîi ca seria

$$\sum_{i=1}^{\infty} | b_i - a_i - 1 |$$

să fie convergentă. Cum putem lua, pentru simplificare $b_i = 1$, rezultă că dacă

$$\sum_{i=1}^{\infty} | a_i | < \infty \tag{42}$$

atunci integrala

$$\int_{a_1}^{1} dx_1 \int_{a_2}^{1} dx_2 \ldots < \infty ,$$

oricare ar fi ordinea de integrare. În această situație avem

$$< \Phi, \Psi > = (\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \bar{\beta}_i) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - a_j)$$

și pentru ca cele două definiții să coincidă trebuie ca

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - a_j) = 1$$

în ipoteza, bineînțeles, ca

$$\sum_{i=1}^{\infty} | \alpha_i \bar{\beta}_i | < \infty$$

Pentru ca produsul scalar să fie comutativ, trebuie să înlocuim pe (C) cu (R).

Dacă a, $b \in (C)$, se observă că avem

$$< a\Phi + b\Psi, \theta > = a < \Phi, \Theta > + b < \Psi, \Theta >$$
$$< \Theta, a\Phi + b\Psi > = \bar{a} < \Theta, \Phi > + \bar{b} < \Theta, \Psi >$$

Θ, Φ, Ψ fiind trei forme de grad p.

În particular, dacă $\Phi \equiv \Psi$ atunci

$$< \Phi, \Phi > = {}^{*}(\Phi \cdot \Phi^{*}) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \bar{\alpha}_i > 0$$

iar numărul real și pozitiv

$$N(\Phi) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \bar{\alpha}_i \right]^{\frac{1}{2}} \tag{43}$$

se numește norma formei infinite Φ, deoarece se bucură de toate proprietățile normei. În adevăr, dacă Φ și Ψ sînt două forme infinite de același grad p, atunci

$$a)\ N(\Phi + \Psi) \leqslant N(\Phi) + N(\Psi)$$

$$b)\ N(\lambda\ \Phi) = |\lambda| \cdot N(\Phi), \qquad \lambda \in (C)$$

și

$$c)\ N(\Phi) = 0$$

numai dacă $\Phi \equiv 0$.

Toate definițiile și proprietățile de mai sus au fost enunțate în ipoteza că formele Φ, Ψ sînt de grad p. Rezultatul este același dacă Φ, Ψ sînt de grad $\infty - p$, produsul scalar fiind definit de astă dată de

$$<\Phi, \Psi> = {}^*(^*\Phi \cdot \Psi) = {}^*(\overline{{}^*\Psi \cdot \Phi}).$$

Norma unei forme Φ, dată de (43), nu este legată de adjunctul la stînga sau la dreapta, deci poate fi asociată și formelor care nu au adjunct la stînga sau la dreapta bine determinat.

8. **Proprietățile normei.** *a*) Dacă ω_p și τ_p sînt două forme infinite de grad p avem

$$0 \leqslant N^2(\omega_p - \tau_p) = N^2(\omega_p) + N^2(\tau_p) - <\omega_p, \tau_p> - <\tau_p, \omega_p>$$

și

$$0 \leqslant N^2(\omega_p + \tau_p) = N^2(\omega_p) + N^2(\tau_p) + <\omega_p, \tau_p> + <\tau_p, \omega_p>$$

Cum

$$<\omega_p, \tau_p> = <\overline{\tau_p, \omega_p}>$$

rezultă că

$$<\omega_p, \tau_p> + <\tau_p, \omega_p> = 2\ \text{Real} <\omega_p, \tau_p>$$

ceea ce dă imediat

$$|\text{Real} <\omega_p, \tau_p>| \leqslant \frac{N^2(\omega_p) + N^2(\tau_p)}{2} \tag{44}$$

În particular dacă

$$<\omega_p, \tau_p> = <\tau_p, \omega_p>$$

atunci avem

$$|<\omega_p, \tau_p>| \leqslant \frac{N^2(\tau_p) + N^2(\omega_p)}{2} \tag{45}$$

iar din (44) rezultă și

$$\left|\text{Real} <\frac{\omega_p}{N(\omega_p)}, \frac{\tau_p}{N(\tau_p)}>\right| \leqslant 1$$

care dă

$$|\,\mathrm{Real} < \omega_p, \tau_p > |\leqslant N(\omega_p).\, N(\tau_q) \tag{46}$$

b) Putem arăta însă în anumite cazuri că avem chiar

$$N(\omega_p \cdot \tau_q) \leqslant N(\omega_p) \cdot N(\tau_q) \tag{47}$$

stabilind în prealabil niște egalități care generalizează pe cele ale lui Lagrange și Cauchy.

I. Fie

$$\omega = a_i\, x^i,\ \tau = b_i\, x^i \qquad a_i, b_i \in (R)$$

să arătăm că avem întotdeauna

$$N(\omega \cdot \tau) \leqslant N(\omega) \cdot N(\tau)$$

Avem

$$\omega \cdot \tau = (a_i\, b_j\ - a_j\, b_i)\, x^i\, x^j \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

Însă din formula lui Cauchy

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} (a_i\, b_j - a_j\, b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2\right) - \sum_{i=1}^{\infty} (a_i\, b_i\,)^2$$

rezultă egalitatea

$$N^2(\omega \cdot \tau) = N^2(\omega) \cdot N^2(\tau) - [< \omega,\ \tau >]^2 \tag{48}$$

precum și neegalitatea

$$N(\omega \cdot \tau) \leqslant N(\omega) \cdot N(\tau)$$

Egalitatea (48) arată că dacă

$$N(\omega) < \infty,\ \ N(\tau) < \infty$$

atunci și

$$N(\omega \cdot \tau) < \infty,\ \ [< \omega,\ \tau >]^2 < \infty\,.$$

II. Fie acum

$$\omega = a_k x^k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$\tau = b'_{ij}\, x^i\, x^j \qquad j > i = 1, 2, \ldots.$$

Să ne situăm mai întîi în cazul finit, adică $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$
Avem

$$\omega \cdot \tau = \sum_{k>j>i=1}^{n} (a_i b_{jk} - a_j b_{ik} + a_k b_{ij})\, x^i x^j x^k$$

să arătăm acum că avem egalitatea

$$\sum_{k>j>i=1}^{n} (a_i b_{jk} - a_j b_{ik} + a_k b_{ij})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{j>i=1}^{n} b_{ij}^2\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \varepsilon_{iik}\, a_i\, b_{ik}\right)^2 \quad (49)$$

unde în b_{ik} (din termenul al doilea din partea a doua) $i < k$ şi în caz contrar b_{ik} se scrie b_{ki}, iar $\varepsilon_{iik} = \pm 1$ după cum permutarea

$$(i\ i\ k), \qquad i < k$$

sau permutarea

$$(i\ k\ i), \qquad i > k$$

are un număr par sau impar de inversiuni. Astfel avem pentru $i < k$, $\varepsilon_{iik} = +1$ şi pentru $i > k$, $\varepsilon_{iki} = -1$.

Să notăm

$$A = \sum_{k>j>i=1}^{n} (a_i b_{jk} - a_j b_{ik} + a_k b_{ij})^2$$

$$B = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{j>i=1}^{n} b_{ij}^2\right)$$

$$C = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \varepsilon_{iik}\, a_i\, b_{ik}\right)^2.$$

Pentru demonstraţia egalităţii (49) observăm că numărul termenilor patratici (monoame la patrat) din A şi C este egal cu cel al lui B. În adevăr, în A acest număr este $3\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$, în C acest număr este $n(n-1)$, suma acestor numere este $\frac{1}{2}\,n^2(n-1)$ şi coincide cu numărul de termeni patratici din B. În acelaşi timp se verifică imediat că termenii patratici din A sînt distincţi de cei din C deoarece

$$(a_i b_{jk})^2 \neq (a_i b_{ik})^2, \qquad (i \neq j)$$

şi toţi aceşti termeni se găsesc în B, epuizîndu-l.

Rămîne să mai arătăm că toţi termenii micşti (produs de două monoame neegale) din A se găsesc în C şi reciproc şi anume cu acelaşi semn, respectiv. Numărul termenilor micşti din A este

$$6.\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

în timp ce numărul termenilor micşti din C este

$$n\,[(n-1)^2 - (n-1)] = n(n-1)(n-2)$$

adică egal cu cel din A. Fie acum un termen mixt oarecare al lui A

$$-2\,a_i\,a_j\,b_{jk}\,b_{ik} = -2\,a_i\,b_{ik}\cdot a_j\,b_{jk} \qquad (i < j < k)$$

termenul se găseşte în C şi anume este

$$2\ \varepsilon_{iik}\, a_i\, b_{ik} \cdot 2\ \varepsilon_{jjk}\, a_j\, b_{jk}$$

şi cum $\varepsilon_{iik} = \varepsilon_{jjk} = +1$ iar C este luat cu semnul minus, urmează că termenii sînt egali şi ca semn. În mod analog se arată egalitatea, pentru orice combinaţie de indici i, j, k.

În fine să mai observăm că numărul termenilor din C este inferior dublului termenilor din B deoarece

$$n(n-1)^2 < 2\,\frac{1}{2}\,n^2(n-1), \qquad n > 1$$

Să trecem acum la cazul cînd $n \longrightarrow \infty$. Prin ipoteză avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\,, \qquad \sum_{k>j=1}^{\infty} b_{jk}^2 < \infty\,.$$

Din egalitatea

$$A = B - C$$

valabilă pentru orice n, cum $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ şi $B \leqslant M$, rezultă că A şi C sînt convergente, deci

$$A \leqslant B < \infty$$

sau

$$N(\omega \cdot \tau) \leqslant N(\omega) \cdot N(\tau)$$

III. Acest rezultat poate fi generalizat. Fie

$$\omega = a_i x^i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$\tau = b_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_p} \qquad (i_1 < i_2 < \ldots < i_p = 1, 2, \ldots)$$

deci

$$\omega \cdot \tau = [a_1 b_{23 \ldots p+1} - a_2 b_{134 \ldots p+1} + \ldots + (-1)^p a_{p+1} b_{12 \ldots p}]\, x^1 x^2 \ldots$$

$$\ldots x^{i_{p+1}} + \ldots + [a_{i_1} b_{i_2 i_3 \ldots i_{p+1}} - a_{i_2} b_{i_1 i_3 \ldots i_{p+1}} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^p a_{i_{p+1}} b_{i_1 i_2 \ldots i_p}]\, x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_{p+1}} + \ldots$$

cu $i_1 < i_2 < \ldots < i_{p+1}$.

Vom considera mai întîi cazul formelor exterioare cu bază finită deci i, $i_k \leqslant s$. Să arătăm că avem egalitatea

$$\sum_{\substack{1 \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_{p+1}}}^{s} [a_{i_1} b_{i_2 i_3 \ldots i_{p+1}} - a_{i_2} b_{i_1 i_3 \ldots i_{p+1}} + \ldots + (-1)^p a_{i_{p+1}} b_{i_1 i_2 \ldots i_p}]^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} a_i^2\right) \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \left(\sum_{1}^{s} b_{i_1 i_2 \ldots i_p}^2\right) - \tag{50}$$

$$- \sum_{\substack{1 \\ k_1 < k_2 < \ldots < k_{p-1}}}^{s} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq kj}}^{s} \varepsilon_{iik_1 k_2 \ldots k_{p-1}}\, a_i b_{ik_1 k_2 \ldots k_{p-1}}\right)^2$$

cu precizările următoare. Coeficientul $b_{ik_1k_2\ldots k_{p-1}}$ va avea indicii în ordinea crescătoare, deci dacă $k_\alpha < i < k_{\alpha+1}$, atunci $b_{ik_1k_2\ldots k_{p-1}}$ se înlocuiește cu $b_{k_1k_2\ldots k_\alpha ik_{\alpha+1}\ldots k_{p-1}}$. Coeficientul $\varepsilon_{iik_1k_2\ldots k_{p-1}}$ va fi egal cu $+1$ sau -1 după cum permutarea

$$(i\, k_1k_2 \ldots k_\alpha\, i\, k_{\alpha+1} \ldots k_{p-1})$$

este pară sau impară. Dacă notăm acum cu A, B, C termenii din (50), rezultă că A are

$$(p+1)\cdot \frac{s!}{(p+1)!\,(s-p-1)!}$$

termeni, monoame la patrat, precum și

$$p\,(p+1)\frac{s!}{(p+1)!\,(s-p-1)!}$$

termeni micști. Termenul B are

$$s.\frac{s!}{p!\,(s-p)!}$$

termeni monoame la patrat iar C are

$$(s-p+1)\frac{s!}{(p-1)!\,(s-p+1)!}$$

termeni, monoame la patrat, și

$$(s-p+1)\,(s-p)\frac{s!}{(p-1)!\,(s-p+1)!}$$

termeni micști. Se vede imediat că numărul monoamelor la patrat din A și C este egal cu cel din B și cele din A și C epuizează pe cele din B.

Se vede de asemenea că numărul termenilor micști din A este același cu numărul termenilor micști din C și egali. Urmează că avem egalitatea

$$A = B - C$$

oricare ar fi n, de unde rezultă neegalitatea

$$A \leqslant B$$

sau

$$N(\omega\cdot\tau) \leqslant N(\omega)\cdot N(\tau) \tag{51}$$

oricare ar fi n.

Să facem acum pe n să tindă către infinit. Cu ipotezele

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$$

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots i_p=1}^{\infty} b^2_{i_1i_2\ldots i_p} < \infty$$

rezultă că $B \leqslant M$, şi din egalitatea

$$A = B - C$$

cum $A > 0$, $C > 0$ rezultă că $A < \infty$, $C < \infty$. Avem deci şi pentru $n \longrightarrow \infty$

$$A = B - C$$

şi

$$A \leqslant B$$

sau

$$N(\omega \cdot \tau) \leqslant N(\omega) \cdot N(\tau)$$

ceea ce trebuie să arătăm.

Dacă $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ sînt p forme liniare exterioare infinite, iar τ o formă exterioară infinită de grad q, avem

$$N(\omega_1 \cdot \omega_2 \ldots \omega_p \cdot \tau) \leqslant N(\omega_1) \cdot N(\omega_2) \ldots N(\omega_p) \cdot N(\tau) \qquad (51')$$

fapt ce se deduce din (51) din aproape în aproape.

Folosind relaţiile (48) şi (50) putem obţine noi egalităţi, înlocuind pe τ cu un produs de forme liniare.

În particular dacă ω_1, ω_2, ω_3 sînt trei forme liniare infinite

$$\omega_1 = a_i x^i, \quad \omega_2 = b_i x^i, \quad \omega_3 = c_i x^i$$

avem egalitatea

$$\sum_{k>j>i=1}^{\infty} (\Delta_{ijk})^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i c_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right)^2 \qquad (51'')$$

unde Δ_{ijk} sînt toţi determinanţii, distincţi, ce se pot forma din matricea

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & \ldots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n & \ldots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_n & \ldots \end{matrix} \right\|$$

Din (51'') rezultă de asemenea

$$\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m = 1}^{\infty} (\Delta_{i_1, i_2, \ldots, i_m})^2 \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^2\right)$$

suma din partea întîia întinzîndu-se la toţi determinanţii de ordinul m, distincţi, ce se pot forma din matricea $(m \times \infty)$, $\| a_{ik} \|$.

9. **Transformări liniare.** Fie ω_p o formă exterioară infinită de grad p

$$\omega_p = a_{i_1 i_2 \ldots i_p} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_p} \qquad (52)$$

și

$$x^i = b^i_j \, \bar{x}^j \tag{53}$$

o transformare liniară. Ne propunem să găsim transformata lui ω_p.

Vom considera mai întîi cazul $p = 1$.

Pentru

$$\omega_1 = a_i \, x^i$$

dacă notăm cu $\bar{\omega}_1$ transformata lui ω_1 avem

$$\bar{\omega}_1 = a_i \, b^i_j \, \bar{x}^j$$

Să observăm însă că $a_i \, b^i_j$ este produsul scalar

$$< \omega_1, \, x_i >$$

unde

$$x_i = b^j_i \, \bar{x}^j$$

Cu această observație transformata $\bar{\omega}_1$ se scrie

$$\bar{\omega}_1 = < \omega_1, \; x_k > \bar{x}^k \tag{54}$$

Pentru $p = 2$ avem

$$\omega_2 = a_{ij} \, x^i \, x^j$$

și pentru

$$x^i = b^i_j \, \bar{x}^j$$

obținem

$$\bar{\omega}_2 = a_{ij} \, b^i_h \, b^j_k \, \bar{x}^h \, \bar{x}^k$$

La fel punînd

$$x_i = b^h_i \, \bar{x}^h$$

și considerînd produsul exterior

$$x_i \, x_j = b^h_i \, b^k_j \; \bar{x}^h \, \bar{x}^k$$

rezultă că coeficientul lui $\bar{x}^h \, \bar{x}^k$ din $\bar{\omega}_2$ se scrie

$$a_{ij} \, b^i{}_h \, b^j{}_k = < \omega_2, \, x_h \, x_k >$$

deci

$$\bar{\omega}_2 = < \omega_2, \; x_h \, x_k > \bar{x}^h \, \bar{x}^k \tag{55}$$

Acest rezultat este general. Pentru

$$\omega_p = a_{i_1 i_2 \ldots i_p} \, x^{i_1} \, x^{i_2} \ldots \, x^{i_p}$$

transformata $\bar{\omega}_p$ prin

$$x^i = b^i_j \, \bar{x}^j$$

se scrie

$$\overline{\omega}_p = < \omega_p, \; x_{i_1} \, x_{i_2} \ldots x_{i_p} > \overline{x}^{i_1} \overline{x}^{i_2} \ldots \overline{x}^{i_p} \tag{56}$$

avînd

$$x_{\cdot k} = b^s_{i_k} \overline{x}^s$$

şi unde

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$$

este forma exterioară infinită de grad p, produsul exterior al formelor exterioare $x_{i_1} x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}$ luate în această ordine.

Dacă însă în ω_p facem transformarea

$$x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_p} = b^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p} \overline{x}^{j_1} \overline{x}^{j_2} \ldots \overline{x}^{j_p} \tag{57}$$

obţinem transformata $\tilde{\omega}_p$

$$\tilde{\omega}_p = < \omega_p, \; x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} > \overline{x}^{i_1} \overline{x}^{i_2} \ldots . \; \overline{x}^{i_p} \tag{57'}$$

unde de astă dată

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} = b^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \overline{x}^{j_1} \overline{x}^{j_2} \ldots \overline{x}^{j_p}$$

Se vede că în toate cazurile, coeficienţii formei transformate se exprimă cu ajutorul produselor scalare.

În cazul formelor exterioare cu bază finită există o legătură strînsă între matricele care realizează cele două transformări. Fie, pentru aceasta *sistemul* de forme exterioare de grad p

$$\omega^s_p = a^s_{i_1 i_2 \ldots i_p} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_p}, \quad s = 1, 2, \ldots, C^p_r$$

cu baza finită $x^1, x^2, \ldots, x^s$

Prin transformarea liniară

$$x^i = b^i_k \overline{x}^k$$

sistemul se transformă în

$$\overline{\omega}^s_p = \overline{a}^s_{i_1 i_2 \ldots i_p} \overline{x}^{i_1} \overline{x}^{i_2} \ldots \overline{x}^{i_p} \tag{α}$$

cu $\overline{a}^s_{i_1, i_2 \ldots i_p}$ dat de (56). Putem ajunge direct la (α) prin transformarea de tipul (57).

$$x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_p} = \Delta^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p} x^{-j_1} x^{-j_2} \ldots x^{-j_p}, \quad \left(\begin{matrix} i_1 < i_2 < \ldots < i_p \\ j_1 < j_2 < \ldots < j_p \end{matrix}\right) \tag{β}$$

unde $\Delta^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ este minorul de ordinul p ce se obţine din matricea $T = \| b^i_k \|$, cu liniile $i_1, i_2, \ldots, i_p$ şi coloanele $j_1, j_2, \ldots j_p$.

Fie matricea $\mathfrak{T}$ determinată de (β):

$$\mathfrak{T} = \left|\left| \Delta_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} \right|\right|, \; i_1 < i_2 \dots < i_p, \quad j_1 < j_2 < \dots < j_p,$$

Se vede imediat, ținînd seamă de proprietățile minorilor de ordinul p ai matricei T, că

$$| \mathfrak{T} | = | T |^{\lambda} \tag{γ}$$

cu

$$\lambda = {}_r^p C_r^p = C_{r-1}^{p-1},$$

deoarece produsul

$$\left|\left| \Delta_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} \right|\right| \cdot \left|\left| \Delta_{i_{p+1} i_{p+1} \dots i_t}^{i_{p+1} i_{p+1} \dots i_t} \right|\right|, \; t = C_r^p,$$

este o matrice patrată cu C_r^p linii și coloane avînd elementele nule, cu excepția celor de pe diagonală principală, care sînt egale cu T.

Rezultă de aici că transformările T și τ sînt simultan singulare sau nu, între determinanții celor două matrice existînd legătura (γ). În particular, dacă $p = 2$ sau $p = r - 1$ atunci

$$| \mathfrak{T} | = | T |^{r-1}$$

10. **Baze ortonormale.** Mulțimea formelor liniare, infinite, Ω_∞^1,

$$\omega_k = a_i^k x^i, \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

formează un spațiu vectorial cu norma

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^k)^2 < \infty$$

iar mulțimea elementelor hipercomplexe x^i formează o bază ortonormală în acest spațiu deoarece avem

$$< x^i, \; x^j > = \delta_{ij}$$

și în plus condiția

$$< x^n, \; y > = 0, \qquad y \in \Omega_\infty^1$$

pentru orice n, implică $y = 0$.

Problema determinării de baze ortonormale în spațiul Ω_∞^1 este legată de determinarea subspațiilor ortogonale. Dacă O_1^1 este mulțimea formată de un singur element x^1, spațiul $O_1^1 \; \Theta \; \Omega_\infty^1$ ortogonal lui O_1^1 este format de mulțimea elementelor

$$\omega = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

În general dacă $O_{i_1 i_2 \dots i_p}^1$ este mulțimea formelor exterioare

$$\tau = b_1 x^{i_1} + b_2 x^{i_2} + \dots + b_p x^{i_p}$$

atunci subspațiul ortogonal lui $O^1_{i_1 i_2 \dots i_p}$ pe care îl notăm cu

$$O^1_{i_1 i_2 \dots i_p} \Theta\, \Omega^1_\infty \tag{58}$$

este mulțimea formelor exterioare

$$\omega = a_1 x^{j_1} + a_2 x^{j_2} + \dots + a_n x^{j_n} + \dots$$

cu $j_k \neq i_s$.

Oricare ar fi p avem

$$O^1_{i_1 i_2 \dots i_p} \cup (O^1_{i_1 i_2 \dots i_p} \Theta\, \Omega^1_\infty) = \Omega^1_\infty$$

și

$$O^1_{i_1 i_2 \dots i_p} \cap (O^1_{i_1 i_2 \dots i_p} \Theta\, \Omega^1_\infty) = 0$$

și cum orice număr z din Ω^1_∞ se scrie

$$z = u + v, \quad u \in O^1_{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad v \in O^1_{i_1 i_2 \dots i_p} \Theta\, \Omega^1_\infty$$

rezultă că o bază ortonormală în Ω^1_∞ este reuniunea bazelor ortonormale din cele două subspații ortogonale disjuncte. Operația poate fi continuată și asupra spațiului

$$O^1_{i_1 i_2 \dots i_p} \Theta\, \Omega^1_\infty$$

obținînd astfel o partițiune a lui Ω^1_∞,

$$O^1_{\alpha_1}, \quad O^1_{\alpha_2}, \dots, \quad O^1_{\alpha_r}, \dots$$

Am notat pentru simplicitate $O^1_{i_1 i_2 \dots i_p}$ cu $O^1_{\alpha_1}$ etc.

Subspațiile $O^1_{\alpha_k}$ se bucură de proprietățile

a) $O^1_{\alpha_i} \cap O^1_{\alpha_j} = 0$

b) $O^1_{\alpha_1} \cup O^1_{\alpha_2} \cup \dots \cup O^1_{\alpha_r} \cup \dots = \Omega^1_\infty$

c) $O^1_{\alpha_i} \cup [O^1_{\alpha_i} \theta\, (O^1_{\alpha_i} \cup O^1_{\alpha_{i+1}} \cup \dots)] = O^1_{\alpha_i} \cup O^1_{\alpha_{i+1}} \cup \dots$

și

d) orice subspațiu $O^1_{\alpha_i}$ este ortogonal tuturor celorlalte subspații luate în parte sau reuniunii lor.

O bază ortonormală în spațiul Ω^1_∞ este deci o reuniune de baze ortonormale din spațiile cu bază finită (sau infinită) $O^1_{\alpha_1}, O^1_{\alpha_2}, \dots$.

De exemplu, dacă luăm pentru Ω^1_∞ partițiunea formată de subspațiile $O^1_{\alpha_i}$ ortogonale două cîte două, formate din elementele

$$O^1_{\alpha_i} = \{\, \omega \mid \omega = a x^{2i-1} + b x^{2i},\ a,\ b \in R \}$$

atunci o bază ortonormală a lui $\bar{\Omega}^1_\infty$ este dată de

$$\omega_{2p-1} = a_{1,2p-1}\, x^{2p-1} + a_{2,2p-1}\, x^{2p}$$

$$\omega'_{2p-1} = a'_{1,2p-1}\, x^{2p-1} + a'_{2,2p-1}\, x^{2p} \quad (p = 1, 2, 3 \ldots)$$

cu

$$(a_{1,2p-1})^2 + (a_{2,2p-1})^2 = 1 \tag{59}$$

$$(a'_{1,2p-1})^2 + (a'_{2,2p-1})^2 = 1$$

și

$$a_{1,2p-1}\, a'_{1,2p-1} + a_{2,2p-1}\, a'_{2,2p-1} = 0$$

Prin urmare dacă $\mathfrak{M}_{i_1}, \mathfrak{M}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_p}, \ldots$ este un șir infinit de matrici patrate ortonormale de ordin $i_1, i_2, \ldots, i_p, \ldots$ respectiv, iar $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_p}$. ... sînt matricile

$$v_{i_1} = \left\| \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{i_1} \end{matrix} \right\|, \quad v_{i_2} = \left\| \begin{matrix} x^{i_1+1} \\ x^{i_1+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{i_2} \end{matrix} \right\|, \ldots, \quad v_{i_p} = \left\| \begin{matrix} x^{i_{p-1}+1} \\ x^{i_{p-1}+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{i_p} \end{matrix} \right\|, \ldots$$

atunci o bază ortogonală a spațiului Ω^1_∞ este dată de reuniunea

$$\mathfrak{M}_{i_1} \cdot v_{i_1} \cup \mathfrak{M}_{i_2} v_{i_2} \cup \ldots \cup \mathfrak{M}_{i_p} v_{i_p} \cup \ldots$$

fiecare produs $\mathfrak{M}_{i_p} \cdot v_{i_p}$ procurînd i_p elemente ale bazei căutate.

Dacă mulțimea matricilor $\mathfrak{M}_{i_p}$ se reduce la o singură matrice infinită, atunci matricea respectivă trebuie să fie ortonormală.

Prin urmare mulțimea formelor liniare

$$x^i = a_{ij}\, \bar{x}^j \qquad (\bar{x}^i\, \bar{x}^j + \bar{x}^j\, \bar{x}^i = 0)$$

formează o bază ortonormală dacă

$$a_{ij}\, a_{jk} = \delta_{ik}$$

În particular dacă $\mathfrak{M}_{i_p}$ sînt de ordinul întîi ele se reduc la scalarul 1 și obținem baza $x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.

Din cele de mai sus rezultă imediat și următorul rezultat:

Componentele vectorului

$$\mathfrak{M} \cdot v$$

unde $\mathfrak{M}$ este matricea infinită în două direcții

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{M}_{i_1} & & & \\ & \mathfrak{M}_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathfrak{M}_{i_p} \\ & & & & \ddots \end{matrix} \right\| \tag{60}$$

cu $\mathfrak{M}_{i_1}$, $\mathfrak{M}_{i_2}$ ... așezate pe diagonala principală, iar celelalte elemente zero, iar v matricea

$$v = \left\| \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^m \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\|$$

formează o bază ortonormală în Ω_∞^1.

Se observă că matricea $\mathfrak{M}$ verifică relația

$$\mathfrak{M}^2 = I \tag{61}$$

unde I este matricea unitate. Prin urmare, putem spune că o bază ortonormală a spațiului Ω_∞^1 este dată de componentele vectorului

$$\mathfrak{M} \cdot v$$

unde $\mathfrak{M}^2 = I$. Dacă $\mathfrak{M} = I$ obținem cea mai simplă bază $x^1, x^2, \ldots$

Rezultatul este același și pentru mulțimea formelor exterioare, infinite, Ω_∞^p de grad p. În adevăr, de ex. pentru $p = 2$, formele monome

$$x^1x^2,\ x^1x^3,\ x^2x^3,\ \ldots$$

formează o bază ortonormală. Dacă $O^2_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ este mulțimea formelor

$$\tau = a_{jk}\, x^j\, x^k\,, \qquad (j, k = i_1, i_2, \ldots, i_p)$$

atunci subspațiul ortogonal (în Ω_∞^2) lui $O^2_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$, pe care îl notăm cu

$$O^2_{i_1, i_2, \ldots, i_p}\, \Theta\, \Omega^2_\infty$$

este mulțimea formelor

$$\omega = C_{mn}\, x^m x^n$$

cu $m,\ n \neq i_1, i_2, \ldots, i_p$.

Fie acum $O^2_{\alpha_1}$, $O^2_{\alpha_2}$ ... o partiție a lui Ω^2_∞ ; o bază ortonormală în Ω^2_∞ este reuniunea bazelor ortonormale din $O^2_{\alpha_1}$, $O^2_{\alpha_2}$, ... Dacă în (2) păstrăm numai termenii $x^i\ x^j$ și suprimăm pe toți ceilalți, fiecărui termen $x^i\ x^j$ îi corespunde un număr natural.

În modul acesta, baza x^1x^2, x^1x^3, x^2x^3, ... se scrie

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \cdots$$

$$\gamma_1 = x^1x^2,\ \gamma_2 = x^1x^3,\ \gamma_3 = x^2x^3, \ldots$$

și bazele ortonormale în Ω^2_∞ se obțin în mod identic ca în cazul precedent.

11. **Operatori.** Fie ω o formă liniară, infinită

$$\omega = a_i\, x^i$$

asupra căreia efectuăm transformarea liniară

$$x^i = b_{ij}\, \bar{x}^j$$

Dacă notăm

$$x_i = b_{ji}\, \bar{x}^j$$

după cum am văzut (alin. 9) transformata $\bar{\omega}$ a lui ω se scrie

$$\bar{\omega} = < \omega, x_i > \bar{x}^i$$

Cu ajutorul matricelor

$$T = \| b_{ij} \|$$

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \end{matrix} \right\|, \qquad \xi = \| x^1x^2 \ldots \|$$

forma $\bar{\omega}$ se poate scrie

$$\bar{\omega} = (T.A.)\ \xi = T(\omega)$$

sau

$$\bar{\omega} = T' \cdot \xi$$

cu

$$T' = \| a_i\, b_{ij} \|$$

Norma lui ω este dată de

$$N(\omega) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (a_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

iar norma lui $\bar{\omega}$, transformatul lui ω este

$$N(\bar{\omega}) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (< \omega,\ x_i >)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Se vede imediat că dacă

$$\sum_{i=1}^{\infty} N^2(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} (b_{ij})^2 < \infty \tag{62}$$

atunci avem și

$$N(\overline{\omega}) < \infty$$

Dacă condiția (62) este îndeplinită atunci operatorul T este continuu. Să arătăm acum că norma sa verifică neegalitatea

$$N(T) \leqslant \left[\sum_{i,j=1}^{\infty} (b_{ij})^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{63}$$

egalitatea fiind efectiv atinsă pentru o clasă particulară de operatori T.

Prin norma operatorului T înțelegem [2] *), cea mai mică constantă $\lambda > 0$, pentru care avem

$$| < T(x), \quad y > | \leqslant \lambda \cdot N(x) \cdot N(y) \tag{a}$$

$$N[T(x)] \leqslant \lambda \cdot N(x) \tag{b}$$

oricare ar fi $x, y \in \Omega_{\infty}^{1}$.

În adevăr pentru

$$T = \|b_{ij}\|, \quad x = a_i\, x^i$$

avem

$$N^2[T(x)] = \sum_{j=1}^{\infty} (a_i\, b_{ij})^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} b_{ij}^2\right)$$

prin urmare

$$\lambda = \left[\sum_{i,j=1}^{\infty} b_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Neegalitatea a) rezultă imediat din b). Norma este efectiv atinsă pentru

$$\frac{b_{ik}}{b_{jk}} = \frac{a_i}{a_j}$$

Putem micșora pe λ, însă în această situație restrîngem clasa operatorilor T. Ne propunem să tratăm un caz particular important.

Să considerăm mai întîi, formele exterioare liniare cu baza finită. Fie

$$x = a_1\, x^1 + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n$$

și

$$T = \left\| \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{vmatrix} \right\|$$

*) p. 67.

Să găsim numărul $\lambda > 0$ astfel încît să avem

$$(m_{11}a_1 + m_{21}a_2 + \ldots + m_{n1}a_n)^2 + (m_{12}a_1 + m_{22}a_2 + \ldots + m_{n2}a_n)^2 + \ldots$$
$$\ldots + (m_{1n}a_1 + m_{2n}a_2 + \ldots + m_{nn}a_n)^2 \leqslant \lambda^2 (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \quad (64)$$

oricare ar fi $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Din (64) rezultă

$$a_1^2 (\lambda^2 - m_{11}^2 - m_{12}^2 - \ldots - m_{1n}^2) + \ldots + a_n^2 (\lambda^2 - m_{n1}^2 - m_{n2}^2 - \ldots -$$
$$- m_{nn}^2) - 2a_1 a_2 (m_{11} m_{21} + m_{12} m_{22} + \ldots + m_{1n} m_{2n}) - \ldots$$
$$\ldots 2a_{n-1} a_n (m_{n-1,1} m_{n,1} + \ldots + m_{n-1,n} m_{nn}) \geqslant 0 \quad (64')$$

Să luăm acum pe λ dat de

$$\lambda = \left[\frac{\sum_{i,j=1}^{n} (m_{ij})^2}{n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (65)$$

iar dacă îl înlocuim în (64') şi facem calculele rezultă că

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} (a_i m_{jk} - a_j m_{ik})^2 - (n-1) \sum_{i,j,k=1}^{n} (a_i m_{ik} + a_j m_{jk})^2 \geqslant 0 \quad (66)$$

Numărul termenilor ce intervin în ambele însumări este acelaşi şi anume $2 \cdot n^2 (n-1)$. Toţi operatorii T care îndeplinesc neegalitatea (66) au norma dată de (65).

În particular să presupunem că avem

$$\sum_{k=1}^{n} (a_i m_{jk} - a_j m_{ik})^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_i m_{ik} + a_j m_{jk})^2 \quad (67)$$

oricare ar fi a_i, a_j; atunci avem şi

$$m_{ik} m_{jk} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} (m_{ik})^2 = \sum_{k=1}^{n} (m_{jk})^2$$

de unde se deduce că operatorul T este ortogonal şi norma sa este

$$N(T) = \left[\sum_{k=1}^{n} (m_{ik})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Rezultatul este acelaşi dacă T este o matrice infinită în două direcţii, adică sîntem în cazul spaţiului Ω_∞^1. În această situaţie suma

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (m_{ij})^2$$

poate fi divergentă, însă trebuie să avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} (m_{ij})^2 = \sum_{i=k}^{\infty} (m_{ik})^2 < \infty$$

În particular dacă

$$m_{ik}\, m_{jk} = \delta_{ij} \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots)$$

atunci norma este egală cu unitatea.

Rezultatele obținute mai sus se extind la spațiul Ω_{∞}^{p}. Vom face calculele pentru $p = 2$. Fie

$$\omega = a_{ij}\, x^i\, x^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots)$$

și să facem transformarea

$$x^i x^j = b_{ij,hk}\, \overline{x}^h\, \overline{x}^k , \tag{68}$$

Acestei transformări îi corespunde matricea infinită

$$\mathfrak{T} = \| b_{ij,hk} \|$$

unde termenul $b_{ij,hk}$ se găsește pe linia $m \to ij$ (și coloana $n \to hk$) înțelegînd prin m, rangul lui $x^i\, x^j$ din șirul (2), după ce am suprimat toți termenii x^i, $x^i\, x^j\, x^k$, ... păstrînd numai pe cei binari.

Prin transformarea (68) ω devine

$$\tilde{\omega} = a_{ij}\, b_{ij,hk}\, \overline{x}^h\, \overline{x}^k .$$

Vom presupune

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} (a_{ij})^2 < \infty$$

$$\sum_{i,j,h,k} (b_{ij,hk})^2 < \infty$$

iar

$$N(\tau) \leqslant [\, \sum (b_{ij,hk})^2]^{\frac{1}{2}} \tag{69}$$

Să considerăm acum aceeași formă exterioară

$$\omega = a_{ij}\, x^i\, x^j$$

și tranformarea liniară

$$x^i = b_{ij}\, \overline{x}^j$$

care ne conduce la

$$\overline{\omega} = a_{ij}\, (b_{ih}\, b_{jk} - b_{ik}\, b_{jh})\, \overline{x}^h\, \overline{x}^k$$

Dacă notăm

$$b_{ih}\, b_{jk} - b_{ik}\, b_{jh} = \Delta_{ij,h,k}$$

și ținem seamă de rezultatul (69) rezultă că o majorantă a normei operatorului $\mathfrak{T}$, care ne duce de la ω la $\overline{\omega}$

$$\mathfrak{T}(\omega) = \overline{\omega}$$

este dată de

$$\left[\sum_{i,j,h,k} (\Delta_{ij,hk})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

și se obține din matricea inițială

$$T = \| b_{ij} \|$$

însumînd patratele tuturor determinanților de ordinul doi, distincți ce se pot forma, grupînd liniile sau coloanele, două cîte două din T, în toate modurile posibile.

Pentru p, oarecare, în acest ultim caz al transformării liniare, o majorantă a normei operatorului $\mathfrak{T}$ care conduce de la ω_p la $\overline{\omega}_p$

$$\mathfrak{T}(\omega)_p = \overline{\omega}_p$$

este dată de suma

$$\left[\sum_{i,j} (\Delta_{i_1 i_2 \dots i_p, j_1, j_2 \dots j_p})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

unde $\Delta_{i_1, i_2 \dots i_p, j_1, j_2 \dots j_p}$ este determinantul de ordinul p ce se formează cu liniile $i_1, i_2, \dots, i_p$ și coloanele $j_1, j_2, \dots, j_p$ ale matricei T, iar suma $\sum_{i,j}$ se întinde la toți determinanții de ordinul p, distincți ce se pot forma din matricea T. Este evident că avem

$$N(\mathfrak{T}) \leqslant N^P(T)$$

deoarece oricare ar fi mulțimea indicilor i, j (finiți), numărul termenilor — monoame — ce intervin în partea întîia este mai mic decît cel din partea a doua. Rezultă de aici, că, dacă

$$\sum_{i,j} (b_{ij})^2 < \infty$$

atunci

$$N(\mathfrak{T}) < \infty$$

și $\mathfrak{T}$ este un operator continuu.

12. **Proiectori.** Fie T o matrice infinită în două direcții cu toate elementele (reale) zero, cu excepția celor care se găsesc simultan pe liniile $i_1, i_2, \dots, i_p$ și coloanele $j_1, j_2, \dots, j_r$, iar ω un element din Ω^1_∞. Transformarea

$$T(\omega)$$

ne duce la subspațiul Ω^1_r de elemente ale bazei $x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_r}$. Pentru ca T să fie un proiector trebuie ca

$$T^2 = T$$

ceea ce este echivalent cu

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}$$

unde $\mathfrak{M}$ este matricea patrată $(l - k + 1) \times (l - k + 1)$ ce se formează din T, cu ajutorul liniilor și coloanelor $k, k + 1, \ldots, l$ cu

$$k = \min (i_1, j_1)$$

$$l = \max (i_p, j_r)$$

Din această cauză se poate considera T, ca matricea infinită

$$T = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \mathfrak{M} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

cu $\mathfrak{M}$ matrice patrată, cu diagonala principală pe diagonala principală a lui T, și în plus $\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}$.

Avem

$$T + T' = T''$$

dacă

$$T . T' = 0$$

Forma generală a unui proiector este deci

$$T = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{M}_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \mathfrak{M}_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \mathfrak{M}_3 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

cu

$$\mathfrak{M}_i^2 = \mathfrak{M}_i$$

Pentru Ω_∞^p rezultatul este asemănător.

ВНЕШНИЕ ФОРМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ БАЗИСОМ

РЕЗЮМЕ

Предметом настоящей работы является исследование внешних форм с бесконечным базисом, т. е. ассоциативной и антикоммутативной алгебры с базисными элементами x^i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ и с законами умножения

$$x^i x^j + x^j x^i = 0 \qquad i \neq j$$

$$(x^i)^2 = 0.$$

В первой главе доказывается, что эта алгебра является произведением бесконечного числа нильпотентных алгебр $A_1\ (x_i)$ индекса 2 с базисными элементами 1, x^i. В 3 главе находятся условия, при которых произведение q однородных форм произвольной степени равно нулю. Условия выражаются при помощи матрицы (14), а именно необходимо и достаточно, чтобы все определители (15), получаемые из этой матрицы, разложенной согласно определенному правилу (17), были равны нулю.

В 4 главе исследуются условия, при которых бесконечная внешняя форма степени p является одночленной формой. Условия эти выражаются (32) и в случае внешних форм с конечным базисом, совпадает с необходимыми и достаточными условиями, данными Э. Картаном [1] для $p = 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

В 6 главе изучается бесконечное произведение бесконечных линейных внешних форм,

$$\Phi = \Psi_1 \cdot \Psi_2 \cdot \Psi_3 \ldots$$

$$\Psi_k = a_{ik}\, x^k$$

и доказывается, что эта операция имеет смысл, если определить матрицы $\| a_{ik} \|$, а также и все определители, получаемые вычеркиванием 1, 2, 3,... произвольных столбцов, сходятся, причем определяются коэффициенты полученного разложения.

В главах 5 и 7 определяется форма, сопряженная к бесконечной внешней форме степени p или $\infty - p$ и доказывается, что формы степени p обладают только правой сопряженной формой, а формы степени $\infty - p$ — только левой сопряженной формой.

Определяется: скалярное произведение двух однородных форм одинаковой степени и норма однородной бесконечной формы. Исследуются свойства нормы.

При $\omega = a_k\, x^k$, $\tau = b_i\, x^i$ имеем

$$N^2(\omega \cdot \tau) = N^2(\omega) \cdot N^2(\tau) - [< \omega,\ \tau >]^2,$$

что равносильно общеизвестному равенству Коши.

Заменяя τ на однородную бесконечную форму второй степени

$$\tau = b_{ij}\, x^i\, x^j \qquad (i < j),$$

получаем равенство

$$\sum_{k>j>i=1}^{\infty} (a_i\, b_{ik} - a_j\, b_{ik} + a_k\, b_{ij})^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)\left(\sum_{j>i=1}^{\infty} b_{ij}^2\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{\infty} \varepsilon_{iik}\, a_i\, b_{ik}\right)^2.$$

($\varepsilon_{iik} = \pm 1$, смотря по тому имеем ли мы $i < k$ или же $i > k$), откуда следует непосредственно неравенство

$$N(\omega \cdot \tau) \leqslant N(\omega) \cdot N(\tau).$$

Результат этот обобщается на случай, когда τ является однородной бесконечной формой произвольного порядка, но ω остается бесконечной линейной формой.

Таким образом, получаются равенства типа (50) с конечным или бесконечным s.

В главах 9 и 10 изучаются линейные преобразования и отыскиваются ортонормированные базисы векторного пространства Ω_∞^p, образованного множеством бесконечных внешних форм степени p.

Любой ортонормированный базис состоит, например, при ∞_∞^1 из компонентов вектора

$$\mathfrak{M}v,$$

где $\mathfrak{M}$ — бесконечная в обе стороны матрица, удовлетворяющая соотношению

$$\mathfrak{M}^2 = I,$$

а v — бесконечная матрица с одним столбцом $\| x_i \|$.

В последней части изучаются операторы и проектирующие операторы в Ω_∞^1.

FORMES EXTÉRIEURES À BASE INFINIE

RÉSUMÉ

L'objet de ce travail est l'étude des formes extérieures à base infinie, c'est-à-dire de l'algèbre associative et anticommutative d'éléments de la base x^i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) dont les lois de multiplication sont données par

$$x^i x^j + x^j x^i = 0, \qquad i \neq j$$

$$(x^i)^2 = 0.$$

Il montre, aux premiers chapitres, que cette algèbre est le produit d'une infinité d'algèbres nilpotentes, d'index 2, $A_1(x_i)$, d'éléments de la base 1, x^i. Au chapitre 3, figurent les conditions pour que le produit à q formes homogènes, d'un degré quelconque, soit nul. Ces conditions sont obtenues par l'intermédiaire d'une matrice (14), car il est nécessaire et suffisant que tous les déterminants (15), obtenus à partir de la matrice (14), développés selon une certaine règle (17), soient nuls.

Le chapitre 4 étudie les conditions pour qu'une forme extérieure infinie, de degré p, soit une forme monome. Ces conditions sont fournies par (32) et, dans le cas des formes extérieures à base finie, elles coïncident avec les conditions nécessaires et suffisantes données par E. Cartan [1] pour $p = 2, 3, 4, 5$.

Au chapitre 6 il est question du produit infini, de formes extérieures, linéaires et infinies,

$$\Phi = \Psi_1 . \Psi_2 . \Psi_3 \ldots$$

$$\Psi_k = a_{ik} x^k$$

et on y montre que l'opération a un sens si le déterminant de la matrice $\| a_{ik} \|$ ainsi que tous les déterminants que l'on obtient en supprimant 1, 2, 3, ... colonnes quelconques, sont convergents ; on y détermine aussi les coefficients du développement obtenu.

Aux chapitres 5 et 7, on définit la forme adjointe à une forme extérieure infinie, de degré p ou $\infty - p$, et on montre que les formes de degré p n'ont d'adjoint bien déterminé qu'à droite, et celles de degré $\infty - p$, qu'à gauche.

On définit le produit scalaire de deux formes homogènes du même degré, et la norme d'une forme infinie homogène. On étudie les propriétés de cette norme.

Pour $\omega = a_k \, x^k$, $\tau = b_i \, x^i$, nous avons

$$N^2 (\omega . \tau) = N^2 (\omega) . N^2 (\tau) - [< \omega, \ \tau >]^2$$

ce qui équivaut à l'égalité connue de Cauchy.

Si l'on remplace τ par une forme homogène, infinie, de degré deux

$$\tau = b_{ij} \, x^i \, x^j \qquad (i < j)$$

on obtient l'égalité

$$\sum_{k>j>i=1}^{\infty} (a_i \, b_{jk} - a_j \, b_{ik} + a_k b_{ij})^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \right) \left(\sum_{j>i=1}^{\infty} b_{ij}^2 \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} \varepsilon_{iik} \, a_i \, b_{ik} \right)^2$$

($\varepsilon_{iik} = \pm 1$, selon que $i < k$ ou $i > k$), dont résulte immédiatement la non-égalité

$$N (\omega . \tau) \leqslant N (\omega) . N (\tau).$$

Le résultat est étendu pour τ à une forme homogène infinie, d'un degré quelconque, ω restant cependant une forme linéaire infinie.

On obtient ainsi des égalités du type (50), à s fini ou infini.

Les chapitres 9 et 10 traitent des transformations linéaires, et cherchent les bases orthonormales de l'espace vectoriel Ω_∞^p formé par l'ensemble des formes extérieures infinies, homogènes et de degré p.

Toute base orthonormale est formée, par exemple pour Ω_∞^1, par les composantes du vecteur

$$\mathfrak{M} . V,$$

où $\mathfrak{M}$ est une matrice infinie dans deux directions, qui vérifie la relation

$$\mathfrak{M}^2 = I$$

et V la matrice infinie, à une seule colonne $\| x_i \|$.

Dans la dernière partie sont étudiés les opérateurs et les projecteurs dans Ω_∞^1.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* Paris, 1945.
2. C. T. IONESCU TULCEA, *Spaţii Hilbert.* Ed. Acad. R.P.R., 1956.

GRUPURILE DE MIȘCARE CU 4 PARAMETRI ALE SPAȚIILOR OMOGENE A_3

DE

VIOREL DUMITRAȘ

În continuarea clasificării spațiilor cu conexiune afină cu 3 dimensiuni care au un grup tranzitiv de mișcări, vom căuta să determinăm spațiile A_3 cu grup G_4.

Grupurile tranzitive cu 4 parametri în 3 variabile, au drept subgrup de stabilitate al originii (într-un sistem convenabil de coordonate), un grup liniar omogen cu un parametru. Grupurile liniare omogene neasemenea cu un parametru au fost determinate de Sophus Lie [1]; transformările lor infinitezimale sînt *)

$$
\begin{aligned}
&x^1p_1 + aU,\ x^1p_1 + cx^2p_2 + aU \qquad (c \neq 0,1)\\
&x^3p_1 + x^2p_2 + aU,\ x^3p_2 + x^2p_1,\ x^1p_2 \qquad (1)\\
&x^3p_2 + U,\ x^3p_1 + x^1p_2 + U,\ U\\
&(a,\ c = \text{const})
\end{aligned}
$$

Dacă grupul de stabilitate are una din ultimele 3 transformări infinitezimale (1) atunci spațiul este local euclidian, fapt care a rezultat din cîteva teoreme privind grupul de stabilitate al unui spațiu A_n, teoreme demonstrate de Academicianul G. Vrănceanu [2] și de autor [3] [4].

Pentru a vedea care dintre celelalte grupuri date de transformările infinitezimale (1), sînt grupuri totale de stabilitate al unui spațiu A_3,

---

*) Avem conform notațiilor uzuale

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},\ U = x^1p_1 + x^2p_2 + x^3p_3.$$

vom reaminti că dată o transformare $X = a_k^j x^k p_j$ a grupului de stabilitate, avem relațiile

$$\begin{aligned} &T_{sk}^i a_j^s + T_{js}^i a_k^s - T_{jk}^s a_s^i = 0 \\ &\Gamma_{skl}^i a_j^s + \Gamma_{jsl}^i a_k^s + \Gamma_{jks}^i a_l^s - \Gamma_{jkl}^s a_s^i = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

unde T_{jk}^i și Γ_{jkl}^i sînt componentele tensorului de torsiune, respectiv ale tensorului de curbură, calculate în origine. În formulele (2) cît și în celelalte formule care urmează indicii notați cu litere latine, iau valorile 1, 2, 3.

CAPITOLUL I

DETERMINAREA GRUPURILOR DE STABILITATE ALE SPAȚIILOR OMOGENE A_3 CU GRUP G_4

§ 1. Spațiile A_3 având o transformare de stabilitate de forma $x^3 p_1 + x^2 p_2 + aU$

Scriind ecuațiile (2) pentru transformările de stabilitate date, avem

$$\begin{aligned} &T_{1k}^i \delta_j^3 + T_{j1}^i \delta_k^3 - T_{jk}^3 \delta_1^i + a(\tau_1 + \tau_3) + (1 + a)\,\tau_2 = 0 \\ &\Gamma_{1kl}^i \delta_j^3 + \Gamma_{j1l}^i \delta_k^3 + \Gamma_{jk1}^i \delta_l^3 - \Gamma_{jkl}^3 \delta_1^i + a(\Sigma_1 + \Sigma_3) + (1 + a)\,\Sigma_2 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

unde am folosit notațiile:

$$\begin{aligned} \tau_m &= T_{mk}^i \delta_j^m + T_{jm}^i \delta_k^m - T_{jk}^m \delta_m^i \\ \Sigma_m &= \Gamma_{mkl}^i \delta_j^m + \Gamma_{jml}^i \delta_k^m + \Gamma_{jkm}^i \delta_l^m - \Gamma_{jkl}^m \delta_m^i \end{aligned} \tag{4}$$

m fiind un indice fix care ia valorile 1, 2, 3.

Din ecuațiile (3) rezultă că dacă $a \neq 0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ toate componentele tensorului de torsiune și ale tensorului de curbură sînt nule în origine prin urmare spațiul este local euclidian. Dacă $a = 1$, tensorul de curbură are toate componentele nule, tensorul de torsiune are o singură componentă nenulă, anume T_{13}^2 *), iar tensorul derivat al tensorului de torsiune este nul; spațiul este în acest caz un spațiu A_3 cu conexiune nesimetrică generală cu grup maxim G_9 [4]. Dacă $a = \frac{1}{2}$, tensorul de torsiune este nul, tensorul de curbură are o singură componentă nenulă, anume Γ_{331}^2 iar tensorul derivat al tensorului de curbură este nul, spațiul este în acest caz un spațiu A_3 neproiectiv euclidian cu grup maxim G_8 [5].

*) Cînd o componentă T_{jk}^i a tensorului de torsiune este nulă sau nenulă, aceeași proprietate o are și componenta T_{kj}^i; la fel cînd o componentă Γ_{jkl}^i a tensorului de curbură este nulă sau nenulă, aceeași proprietate o are și componenta Γ_{jlk}^i.

Dacă $a = 1$, singurele componente nenule ale tensorului de torsiune sînt, T^1_{23}, $T^1_{21} = T^3_{23}$, iar singurele componente nenule ale tensorului de curbură sînt Γ^1_{223}, $\Gamma^1_{221} = \Gamma^3_{223}$, regăsim o categorie de spații A_3 cu grup G_7 [6] *). Să presupunem acum că $a = -\frac{1}{2}$ deci că transformarea de stabilitate a grupului se scrie

$$X_4 = x^3 p_1 - \frac{1}{2} x^1 p_1 + \frac{1}{2} x^2 p_2 - \frac{1}{2} x^3 p_3$$

Alegînd convenabil operatorii principali X_i și considerînd identitățile $(X_i X_j X_4) = 0$, $(X_1 X_2 X_3) = 0$, rezultă că ecuațiile de structură ale grupului de mișcări se vor scrie

$$(X_1 X_4) = -\frac{1}{2} X_1, \; (X_2 X_4) = \frac{1}{2} X_2, \; (X_3 X_4) = X_1 - \frac{1}{2} X_3, \; (X_i X_j) = 0$$

și putem satisface la această structură luînd $X_i = p_i$. Pentru determinarea conexiunii vom folosi ecuațiile transformărilor infinitezimale ale spațiului

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^s} \xi^s + \Gamma^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Gamma^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \tag{5}$$

și scriind aceste ecuații relativ la transformările X_i rezultă că Γ^i_{jk} sînt constante. Scriind apoi ecuațiile (5), relativ la transformarea X_4 rezultă că toate aceste constante sînt egale cu zero, spațiul este deci local euclidian.

Să considerăm acum și cazul $a = 0$, deci $X_4 = x^3 p_1 + x^2 p_2$. Procedînd la fel ca și mai sus găsim

$$(X_1 X_4) = 0, \quad (X_2 X_4) = X_2, \quad (X_3 X_4) = X_1$$
$$(X_1 X_2) = 0, \quad (X_2 X_3) = 0, \quad (X_1 X_3) = \rho X_1$$

și putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1, \; X_2 = p_2, \; X_3 = p_3 + \rho x^1 p_1 + \rho x^3 p_3$$

Scriind ecuațiile (5) relativ la transformările X_1 și X_2 rezultă că Γ^i_{jk} nu depind de variabilele x^1 și x^2. Ținînd seama de aceste proprietăți, ecuațiile (5) scrise relativ la transformarea X_4 ne vor da relațiile :

$$\Gamma^i_{1k} \delta^3_j + \Gamma^i_{j1} \delta^3_k - \Gamma^3_{jk} \delta^i_1 + \Gamma^i_{2k} \delta^2_j + \Gamma^i_{j2} \delta^2_k - \Gamma^2_{jk} \delta^i_2 = 0$$

din care rezultă că toate componentele Γ^i_{jk} ale conexiunii sînt nule în afară de

$$\Gamma^1_{13}, \; \Gamma^1_{31}, \; \Gamma^2_{23}, \; \Gamma^2_{32}, \; \Gamma^1_{33}, \; \Gamma^2_{33}$$

*) p. 218.

avînd relaţia

$$\Gamma^3_{33} = \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{31}$$

Scriind în sfîrşit ecuaţiile (5) relativ la transformarea X_3, obţinem şi expresiile componentelor nenule, anume

$$\Gamma^1_{13} = \frac{\alpha + \beta}{1 + \rho x^3}, \quad \Gamma^1_{31} = \frac{\alpha - \beta}{1 + \rho x^3}, \quad \Gamma^3_{33} = \frac{2\alpha}{1 + \rho x^3}$$
$$\Gamma^2_{23} = \frac{\gamma + \delta}{1 + \rho x^3}, \quad \Gamma^2_{32} = \frac{\gamma - \delta}{1 + \rho x^3}, \quad \Gamma^1_{33} = \frac{\eta}{1 + \rho x^3} \tag{6}$$

Spaţiile avînd conexiunea dată de formulele (6) sînt însă spaţii A_3 cu grup tranzitiv G_7 [6] *). Putem enunţa

L e m a 1. *Spaţiile omogene A_3, avînd transformarea de stabilitate de forma $x^3p_1 + x^2p_2 + aU$, sînt spaţii care au un grup de mişcări $G_r (r \geqslant 7)$.*

§ 2. Spaţiile A_3 avînd o transformare de stabilitate de forma $x^1p_1 + cx^2p_2 + aU\,(c \neq 1)$

Scriind ecuaţiile (2), pentru transformările de stabilitate considerate, avem

$$(1 + a)\tau_1 + (c + a)\tau_2 + a\tau_3 = 0$$
$$(1 + a)\Sigma_1 + (c + a)\Sigma_2 + a\Sigma_3 = 0 \tag{7}$$

Din aceste relaţii rezultă că dacă sînt îndeplinite condiţiile

$$a \neq 0, -1, -\frac{1}{2}, \; c + a \neq 0, -1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$
$$c - 2a \neq 1, 2, \qquad c + 2a \neq 0, 1 - 1, -2 \tag{8}$$

atunci toate componentele tensorilor de torsiune şi curbură sînt nule deci spaţiul este euclidian.

Presupunînd apoi că numai una din condiţiile (8) nu este satisfăcută rezultă :

1°. Dacă $c + a = 1$ sau -1, sau $c - a = 1$ atunci avem spaţii cu conexiune nesimetrică generală cu grup maxim G_9.

2°. Dacă este valabilă una din relaţiile

$$c + a = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \; c + 2a = 1, -2; \; c - 2a = 1, 2$$

atunci avem spaţii neproiectiv euclidiene cu grup maxim G_8.

*) p. 203, formulele (4.11).

3°. Dacă $a = -\frac{1}{2}$ spațiul este euclidian.

4°. Dacă are loc una din relațiile

$$c + a = 0,\ c + 2a = 0,\ c + 2a = -1,\ a = -1$$

atunci avem spații A_3 cu grup G_7.

Presupunînd acum că două din condițiile (8) nu sînt satisfăcute, găsim că transformarea de stabilitate are una din expresiile

$$\begin{array}{lll} x^1p_1 - x^2p_2 - x^3p_3, & x^1p_1 - 3x^2p_2 - 5x^3p_3, & 3x^1p_1 - x^2p_2 + x^3p_3 \\ x^1p_1 + 2x^2p_2 - x^3p_3, & x^1p_1 + x^2p_2, & x^1p_1 + 2x^2p_2 \\ x^1p_1 - 2x^2p_2, & x^1p_1 - x^2p_2, & x^1p_1 \end{array} \tag{9}$$

Se poate arăta prin același procedeu folosit în paragraful precedent că dacă transformarea de stabilitate este una din primele 3 transformări (9) atunci spațiul este euclidian; dacă transformarea de stabilitate este $x^1p_1 + x^2p_2$, avem spații A_3 cu grup G_6 [7]*; dacă transformarea de stabilitate este $x^1p_1 + 2x^2p_2 - x^3p_3$ sau $x^1p_1 + 2x^2p_2$ avem spații A_3 cu grup G_5 [8]**).

În sfîrșit dacă transformarea de stabilitate este $x^1p_1 - 2x^2p_2$ vom avea spații cu grup G_7 [6]***). Rezultă:

Lema 2. *Spațiile omogene A_3 avînd transformarea de stabilitate de forma $X_4 = x^1p_1 + cx^2p_2 + aU$ sînt spații care au un grup de mișcări $G_r (r > 4)$ dacă excludem cazurile, cînd $X_4 = x^1p_1 - x^2p_2$ sau $X_4 = x^1p_1$.*

★

Cele două leme demonstrate ne arată că există doar 4 grupuri cu un parametru care pot fi grupuri totale de stabilitate ale unui spațiu omogen A_3. Transformările infinitezimale ale acestor grupuri sînt

$$x^1p_1 - x^2p_2,\quad x^1p_1,\quad x^3p_1 + x^1p_2,\quad x^1p_2 \tag{10}$$

Vom arăta în capitolul care urmează că există spații A_3 avînd unul din grupurile (10), drept grup total de stabilitate.

CAPITOLUL II

DETERMINAREA SPAȚIILOR A_3 CU GRUP G_4

§ 1. Spațiile A_3 cu transformarea de stabilitate $x^1p_1 - x^2p_2$

Ecuațiile de structură ale grupului de mișcări se vor scrie

$$\begin{array}{l} (X_1X_4) = X_1 + c^4_{14}X_4,\ (X_2X_4) = -X_2 + c^4_{24}X_4,\ (X_3X_4) = c^4_{34}X_4 \\ (X_jX_k) = c^s_{jk}X_s \qquad (s, j, k = 1, 2, 3) \end{array} \tag{11}$$

*) p. 335, § 8.
**) p. 351, § 4.
***) p. 345, § 2.

și făcînd transformarea de operatori

$$\overline{X}_1 = X_1 + c_{14}^4 X_4,\ \overline{X}_2 = X_2 - c_{24}^4 X_4,\ \overline{X}_3 = X_3 + c_{23}^2 X_4$$

putem anula constantele c_{14}^4, c_{24}^4, c_{34}^4. Considerînd aceste constante de la început nule, identitățile lui Iacobi $(X_i X_j X_4) = 0$ se vor scrie

$$[(X_1X_2)\,X_4] = 0,\ [(X_1X_3)\,X_4] - (X_1X_3) - c_{34}^4 X_1 = 0$$
$$[(X_2X_3)\,X_4] + (X_2X_3) + c_{34}^4 X_2 = 0$$

și rezultă condițiile

$$c_{12}^1 = c_{12}^2 = c_{23}^1 = c_{23}^3 = c_{23}^4 = c_{13}^2 = c_{13}^3 = c_{13}^4 = 0.$$

Prin urmare ecuațiile (11) capătă forma

$$(X_1X_2) = 2\rho X_3 + 2\lambda X_4,\ (X_1X_3) = \nu X_1,\ (X_2X_3) = 0. \tag{11'}$$

Considerînd și identitatea $(X_1X_2X_3) = 0$, obținem condițiile

$$\rho\nu = 0, \quad \nu\lambda = 0$$

deci vom avea de considerat două cazuri după cum ν este egal cu zero sau diferit de zero.

1°. Dacă $\nu \neq 0$, atunci $\rho = \lambda = 0$

și putem satisface la structura corespunzătoare luînd

$$X_1 = p_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3 + \nu x^1 p_1 \tag{12}$$

Scriind ecuațiile (5) relativ la transformările X_1, X_2 și X_4 rezultă că singurele componente nenule ale conexiunii sînt

$$\Gamma_{13}^1,\ \Gamma_{31}^1,\ \Gamma_{23}^2,\ \Gamma_{32}^2,\ \Gamma_{33}^3,\ \Gamma_{12}^3,\ \Gamma_{21}^3$$

iar din aceleași ecuații scrise relativ la transformarea X_3 rezultă

$$\begin{aligned} &\Gamma_{13}^1 = \alpha_1 + \beta_1,\ \Gamma_{31}^1 = \alpha_1 - \beta_1,\ \Gamma_{23}^2 = \alpha_2 + \beta_2,\ \Gamma_{32}^2 = \alpha_2 - \beta_2 \\ &\Gamma_{12}^3 = (\gamma_1 + \gamma_2)\, e^{-\nu x^3},\ \Gamma_{21}^3 = (\gamma_1 - \gamma_2)\, e^{-\nu x^3}. \end{aligned} \tag{13}$$

Componentele nenule ale tensorului de torsiune sînt

$$T_{13}^1 = 2\,\beta_1,\ T_{23}^2 = 2\,\beta_2,\ T_{12}^3 = 2\gamma_2\, e^{-\nu x^3} \tag{14}$$

iar cele ale tensorului de curbură

$$\begin{aligned} &\Gamma_{313}^1 = (\alpha_1 - \beta_2)(2\,\alpha - \alpha_1 - \beta_1),\ \Gamma_{323}^2 = (\alpha_2 - \beta_2)(2\,\alpha - \alpha_2 - \beta_2) \\ &\Gamma_{123}^3 = (\gamma_1 + \gamma_2)(\alpha_1 + \beta_1 - 2\,\alpha - \nu)\, e^{-\nu x^3} \\ &\Gamma_{213}^3 = (\gamma_1 - \gamma_2)(\alpha_2 + \beta_2 - 2\,\alpha - \nu)\, e^{-\nu x^3} \\ &\Gamma_{312}^3 = \big(\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1 - \beta_2 + \beta_1) - \gamma_2(\alpha_2 + \alpha_1 - \beta_2 - \beta_1)\big)\, e^{-\nu x^3} \end{aligned} \tag{14'}$$

Tensorii contractați ai tensorului de curbură

$$\Gamma_{jl} = \Gamma^i_{jil}, \quad P_{kl} = \Gamma^i_{ijl} \tag{15}$$

au următoarele componente nenule

$$\Gamma_{12}=(\gamma_1+\gamma_2)(2\alpha+\nu-\alpha_1-\beta_1)e^{-\nu x^3}, \quad \Gamma_{21}=(\gamma_1-\gamma_2)(2\alpha+\nu-\alpha_2-\beta_2)\,e^{-\nu x^3}$$

$$\Gamma_{33} = (\alpha_1 - \beta_1)(2\alpha - \alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2)(2\alpha - \alpha_2 - \beta_2) \tag{16}$$

$$P_{12} = [\gamma_1(\alpha_2 - \alpha_1 - \beta_2 + \beta_1) - \gamma_2(\alpha_2 + \alpha_1 - \beta_2 - \beta_1)]\,e^{-\nu x^3}$$

Din legea de transformare a tensorului P_{jk}

$$\bar{P}_{rs}\,u^r_j\,u^s_k = P_{jk}\ ^*). \tag{17}$$

Avem dacă dăm pe rînd indicilor j, k valorile 3,1 ; 3,2 ; 1,2

$$\begin{gathered} u^1_1 u^2_3 - u^2_1 u^1_3 = 0, \quad u^1_2 u^2_3 - u^2_2 u^1_3 = 0 \\ u^1_1 u^2_2 - u^1_2 u^2_1 = e^{\nu(\bar{x}^3 - x^3)} \end{gathered} \tag{18}$$

Primele 2 ecuații (18) constituie un sistem liniar omogen în necunoscutele u^1_3 și u^2_3. Determinantul acestui sistem este diferit de zero, după cum rezultă din ultima ecuație (18) ; prin urmare avem condițiile

$$u^1_3 = u^2_3 = 0 \tag{18'}$$

Din legea de transformare a tensorului Γ_{jl}

$$\bar{\Gamma}_{rs}\,u^r_j\,u^s_l = \Gamma_{jl} \tag{19}$$

rezultă pentru $j = 1$, $l = 3$; $j = 2$, $l = 3$; $j = l = 3$, condițiile

$$u^3_1 = u^3_2 = 0, \qquad u^3_3 = 1. \tag{18''}$$

Ținînd seama de condițiile (18) (18'), în legea de transformare a tensorului de curbură

$$\bar{\Gamma}^i_{rst}\,u^r_j\,u^s_k\,u^t_l = \Gamma^r_{jkl}\,u^i_r \tag{20}$$

și dînd indicilor i, j, k, l pe rînd valorile 1, 3, 2, 3; 2, 3, 1, 3, rezultă

$$u^1_2 = u^2_1 = 0$$

În sfîrșit din legea de transformare a conexiunii

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j\,\partial x^k} = \bar{\Gamma}^i_{rs}\,u^r_j\,u^s_k - \Gamma^r_{jk}\,u^i_r \tag{21}$$

obținem pentru i, j, $k = 1, 2$

$$\frac{\partial^r \bar{x}^i}{\partial x^j\,\partial x^k} = 0 \qquad (i, j, k = 1,2)$$

*) Notăm $u^i_j = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$.

prin urmare ecuațiile grupului de mișcare ale spațiului se scriu

$$\bar{x}^1 = a_1^1 x^1 + a^1, \quad \bar{x}^2 = a_2^2 x^2 + a^2, \quad \bar{x}^3 = x^3 + a^3 \tag{22}$$

între constantele a_1^1 și a_2^2 existînd relația

$$a_1^1 a_2^2 = e^{\nu a^3} \tag{22'}$$

2°. Presupunem acum că $\nu = 0$. În acest caz ρ și λ sînt constante oarecare și putem satisface la structura corespunzătoare luînd

$$X_1 = p_1 + \lambda (x^2)^2 p_2 - \rho x^2 p_3, \quad X_2 = p_2 + \lambda (x^1)^2 p_1 + \rho x^1 p_3, \quad X_3 = p_3 \tag{12'}$$

Calculul conexiunii îl vom face punînd

$$\Gamma_{jk}^i = S_{jk}^i + \frac{1}{2} T_{jk}^i \tag{23}$$

în care S_{jk}^i sînt componentele conexiunii simetrice atașate spațiului, iar T_{jk}^i sînt componentele tensorului de torsiune. Funcțiile S_{jk}^i le putem determina din ecuațiile

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial S_{jk}^i}{\partial x^s} \xi^s + S_{sk}^i \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + S_{js}^i \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - S_{jk}^s \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \tag{24}$$

ecuații care rezultă imediat din formulele (5).

Scriind ecuațiile (5) relativ la transformarea X_3 rezultă că toate componentele Γ_{jk}^i ale conexiunii sînt funcții numai de variabilele x^1 și x^2.

Vom scrie acum ecuațiile (24) relativ la transformările X_1, X_2 și X_4. Făcînd $i = 1$, $j = k = 3$, avem

$$\frac{\partial S_{33}^1}{\partial x^1} + \lambda (x^2)^2 \frac{\partial S_{33}^1}{\partial x^2} = 0, \quad \lambda (x^1)^2 \frac{\partial S_{33}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial S_{33}^1}{\partial x^2} - 2\lambda x^1 S_{33}^1 = 0$$

$$\frac{\partial S_{33}^1}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial S_{33}^1}{\partial x^2} x^2 = S_{33}^1.$$

Înmulțind prima din aceste ecuații cu x^1, a doua cu $-x^2$ și ținînd seama de a treia rezultă

$$S_{33}^1 = 0. \tag{25}$$

În mod asemănător se arată că avem

$$S_{33}^2 = S_{23}^1 = S_{13}^2 = S_{22}^1 = S_{11}^2 = 0 \tag{25'}$$

Să facem acum $i = j = k = 3$; avem

$$\frac{\partial S_{33}^3}{\partial x^1} + \lambda (x^2)^2 \frac{\partial S_{33}^3}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial S_{33}^3}{\partial x^1} \lambda (x^1)^2 + \frac{\partial S_{33}^3}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial S_{33}^3}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial S_{33}^3}{\partial x^2} x^2 = 0$$

de unde rezultă că S^3_{33} este o constantă. La fel se arată că și componentele S^1_{13} și S^2_{23} sînt constante. Vom pune

$$S^1_{13} = \alpha_1, \quad S^2_{23} = \alpha_2, \quad S^3_{33} = 2\alpha. \tag{26}$$

Făcînd $i = j = k = 1$, avem

$$\frac{\partial S^1_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^1_{11}}{\partial x^2}\lambda (x^2)^2 = 0$$

$$\frac{\partial S^1_{11}}{\partial x^1}\lambda (x^1)^2 + \frac{\partial S^1_{11}}{\partial x^2} + 2\rho\alpha_1 + 2\lambda x^1 S^1_{11} = 2\lambda$$

$$\frac{\partial S^1_{11}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial S^1_{11}}{\partial x^2} x^2 + S^1_{11} = 0$$

de unde rezultă

$$S^1_{11} = \frac{2(\lambda - \rho x^2 \alpha_1)}{1 + \lambda x^1 x^2}. \tag{26'}$$

La fel obținem

$$S^2_{22} = \frac{2(\lambda + \rho x^1 \alpha_2)}{1 + \lambda x^1 x^2}. \tag{26''}$$

Pentru $i = j = 2$, $k = 1$ respectiv $i = j = 3$, $k = 1$, avem

$$\frac{\partial S^2_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^2_{21}}{\partial x^2}\lambda (x^2)^2 = 0, \quad \frac{\partial S^2_{21}}{\partial x^1}\lambda (x^1)^2 + \frac{\partial S^2_{21}}{\partial x^2} = -\rho\alpha_2$$

$$\frac{\partial S^2_{21}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial S^2_{21}}{\partial x^2} x^2 + S^2_{21} = 0$$

respectiv

$$\frac{\partial S^3_{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^3_{31}}{\partial x^2}\lambda (x^2)^2 = 0, \quad \frac{\partial S^3_{31}}{\partial x^1}\lambda (x^1)^2 + \frac{\partial S^3_{31}}{\partial x^2} + 2\lambda x^1 S^3_{31} = \rho(\alpha_1 - 2\alpha)$$

$$\frac{\partial S^3_{31}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial S^3_{31}}{\partial x^2} x^2 + S^3_{31} = 0$$

din care rezultă

$$S^2_{21} = \frac{\rho\alpha x^2}{1 + \lambda x^1 x^2}, \quad S^3_{31} = -\frac{(2\alpha - \alpha_1)\rho x^2}{1 + \lambda x^1 x^2}. \tag{26'''}$$

În mod similar avem

$$S^1_{12} = \frac{\rho\alpha_1 x^1}{1 + \lambda x^1 x^2}, \quad S^3_{32} = \frac{(2\alpha - \alpha_2)\rho x^1}{1 + \lambda x^1 x^2} \tag{26^{IV}}$$

Pentru $i = 3$, $j = k = 1$, avem

$$\frac{\partial S^3_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^3_{11}}{\partial x^2} \lambda (x^2)^2 = 0$$

$$\frac{\partial S^3_{11}}{\partial x^1} \lambda (x^1)^2 + \frac{\partial S^3_{11}}{\partial x^2} + 4 \lambda x^1 S^3_{11} + \rho (2 S^3_{13} - S^1_{11}) = 0$$

$$\frac{\partial S^3_{11}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial S^3_{11}}{\partial x^2} x^2 + 2 S^3_{11} = 0$$

şi rezultă

$$S^3_{11} = 2 \left(\frac{\rho x^2}{M} \right)^2 (\alpha - \alpha_1) + \frac{\lambda \rho x^2}{M^2}, \qquad (M = 1 + \lambda x^1 x^2) \qquad (26^{V})$$

La fel obţinem

$$S^3_{22} = 2 \left(\frac{\rho x^1}{M} \right)^2 (\alpha - \alpha_2) - \frac{\lambda \rho x^1}{M^2} \qquad (26^{VI})$$

În sfîrşit, pentru $i = 3$, $j = 1$, $k = 2$, avem

$$\frac{\partial S^3_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^3_{12}}{\partial x^2} \lambda (x^2)^2 + 2 \lambda x^2 S^3_{12} = \rho^2 \frac{2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2}{M} x^2$$

$$\frac{\partial S^3_{12}}{\partial x^1} \lambda (x^1)^2 + \frac{\partial S^3_{12}}{\partial x^2} + 2 \lambda x^1 S^3_{12} = \rho^2 \frac{2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2}{M} x^1 \qquad (27)$$

$$\frac{\partial S^3_{12}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial S^3_{12}}{\partial x^2} x^2 = 0.$$

şi ultima din ecuaţiile (27) ne arată că S^3_{12} este funcţie numai de produsul $x^1 x^2$. Punînd

$$u = x^1 x^2$$

primele două ecuaţii (27) se reduc la o singură ecuaţie diferenţială ordinară

$$\frac{dS^3_{12}}{du} (1 + \lambda u) + 2 \lambda S^3_{12} = \rho^2 \frac{2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2}{1 + \lambda u}$$

care integrată ne dă

$$S^3_{12} = \rho^2 \frac{(2\alpha - \alpha_1 - \alpha_2) x^1 x^2}{(1 + \lambda x^1 x^2)^2} \qquad (26^{VII})$$

Pentru determinarea componentelor T^i_{jk} ale tensorului de torsiune vom folosi ecuaţiile

$$\frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^s} \xi^s + T^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + T^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - T^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} = 0 \qquad (28)$$

care se deduc tot din formulele (5).

Prin calculele asemănătoare celor de mai sus găsim

$$T^1_{23} = T^2_{13} = 0, \quad T^1_{13} = 2\beta_1, \quad T^2_{23} = 2\beta_2$$

$$T^1_{12} = 2\rho\frac{\beta_1 x^1}{M}, \quad T^2_{12} = -2\rho\frac{\beta_2 x^2}{M}$$

$$T^3_{13} = 2\rho\frac{\beta_1 x^2}{M}, \quad T^3_{23} = -2\rho\frac{\beta_2 x^1}{M} \tag{29}$$

$$T^3_{12} = 2\rho^2\frac{(\beta_1+\beta_2)x^1x^2}{M^2}$$

Componentele conexiunii spațiului au deci expresiile următoare

$$\Gamma^1_{11} = \frac{2(\lambda - \rho x^2\alpha_1)}{M}, \qquad \Gamma^1_{12} = \rho\frac{(\alpha_1+\beta_1)x^1}{M}$$

$$\Gamma^2_{21} = -\rho\frac{(\alpha_2-\beta_2)x^2}{M}, \qquad \Gamma^1_{21} = \rho\frac{(\alpha_1-\beta_1)x^1}{M}$$

$$\Gamma^2_{12} = -\rho\frac{(\alpha_2+\beta_2)x^2}{M}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{2(\lambda+\rho x^1\alpha_2)}{M}$$

$$\Gamma^3_{31} = -\rho\frac{(2\alpha-\alpha_1+\beta_1)x^2}{M}, \qquad \Gamma^3_{32} = \rho\frac{(2\alpha-\alpha_2+\beta_2)x^1}{M} \tag{30}$$

$$\Gamma^3_{13} = -\rho\frac{(2\alpha-\alpha_1-\beta_1)x^2}{M}, \qquad \Gamma^3_{23} = \rho\frac{(2\alpha-\alpha_2-\beta_2)x^1}{M}$$

$$\Gamma^3_{12} = \rho^2\frac{(2\alpha-\alpha_1-\alpha_2+\beta_1+\beta_2)x^1x^2}{M^2}$$

$$\Gamma^3_{21} = \rho^2\frac{(2\alpha-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2)x^1x^2}{M^2}$$

$$\Gamma^1_{13} = \alpha_1+\beta_1, \quad \Gamma^1_{31} = \alpha_1-\beta_1, \quad \Gamma^2_{23} = \alpha_2+\beta_2, \quad \Gamma^2_{32} = \alpha_2-\beta_2$$

$$\Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{33} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{11} = 0$$

$$\Gamma^3_{33} = 2\alpha$$

Ecuațiile grupului de mișcări al acestui spațiu vor fi de forma

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1, x^2), \quad \bar{x}^2 = \bar{x}^2(x^1, x^2), \quad \bar{x}^3 = x^3 + a^3 \tag{31}$$

primele două ecuații reprezentînd transformarea proiectivă în 2 variabile care lasă invariantă conica $1 + \lambda x^1x^2 = 0$.

Putem enunța

Teorema 1. *Spațiile omogene A_3 avînd transformarea de stabilitate $x^1p_1 - x^2p_2$, sînt spațiile a căror conexiune este dată de formulele (13) sau (31). Aceste spații posedă grupuri de mișcări cu 4 parametri.*

§ 2. **Spaţiile A_3 cu transformarea de stabilitate $x^1 p_1$**

Ecuaţiile de structură ale grupului de mişcări al spaţiului vor fi de forma

$$\begin{gathered}(X_1X_4) = X_1 + c_{14}^4 X_4, \quad (X_2X_4) = c_{24}^2 X_4, \quad (X_3X_4) = c_{34}^4 X_4 \\ (X_jX_k) = c_{jk}^s X_s + c_{jk}^4 X_4 \qquad (s, j, k = 1, 2, 3)\end{gathered} \tag{32}$$

şi făcînd transformarea de operatori

$$\bar{X}_1 = X_1 + c_{14}^4 X_4, \quad \bar{X}_2 = X_2 - c_{12}^1 X_4, \quad \bar{X}_3 = X_3 - c_{13}^1 X_4$$

putem anula constantele c_{14}^4, c_{12}^1, c_{13}^1. Considerînd apoi identităţile $(X_j\, X_k\, X_4) = 0$, $(X_1\, X_2\, X_3) = 0$, ecuaţiile (32) devin

$$\begin{gathered}(X_1X_4) = X_1\,, \quad (X_2X_4) = 0\,, \quad (X_3X_4) = 0 \\ (X_1X_2) = 0\,, \quad (X_1X_3) = 0\,, \quad (X_2X_3) = \rho X_2 - \lambda X_3\end{gathered} \tag{32'}$$

şi putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2 + \lambda x^2 p_2 + \lambda x^3 p_3, \quad X_3 = p_3 + \rho x^2 p_2 + \rho x^3 p_3$$

Scriind ecuaţiile (5) relativ la transformarea X_1 rezultă că Γ_{jk}^i nu depind de x^1, iar apoi din aceleaşi ecuaţii scrise relativ la transformarea X_4, rezultă condiţiile

$$\begin{gathered}\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0 \\ \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = 0\end{gathered} \tag{33}$$

În sfîrşit din ecuaţiile (5) scrise relativ la transformările X_2 şi X_3 avem pentru componentele nenule ale conexiunii

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\alpha_{jk}^i}{1 + \rho x^3 + \lambda x^2} \qquad (\alpha_{jk}^i = \text{const}) \tag{33'}$$

Grupul de mişcări al acestor spaţii are ecuaţiile

$$\begin{aligned}\bar{x}^1 &= a_1^1 x^1 + a^1 \\ \bar{x}^2 &= (1 + \rho a^3 + \lambda a^2)\, x^2 + a^2 \\ \bar{x}^3 &= (1 + \rho a^3 + \lambda a^2)\, x^3 + a^3\end{aligned} \tag{34}$$

Putem enunţa

T e o r e m a 2. *Spaţiile omogene A_3 avînd transformarea de stabilitate $x^1 p_1$, sînt spaţiile care au conexiunea dată de formulele (32), (33') şi care au un grup de mişcări cu 4 parametri, avînd ecuaţiile (34).*

§ 3. Spațiile A_3 cu transformarea de stabilitate $x^3p_2 + x^2p_1$

Grupul de mișcări are ecuațiile de structură

$$\begin{aligned}&(X_1X_4) = c_{14}^4 X_4,\ (X_2X_4) = X_1 + c_{24}^4 X_4,\ (X_3X_4) = X_2 + c_{34}^4 X_4\\&(X_jX_k) = c_{jk}^s X_s + c_{jk}^4 X_4 \qquad\qquad (s, j, k = 1, 2, 3)\end{aligned} \tag{35}$$

și făcînd transformarea de operatori

$$\bar{X}_1 = X_1 + c_{24}^4 X_4,\ \bar{X}_2 = X_2 + c_{34}^4 X_4,\ \bar{X}_3 = X_3 - c_{23}^1 X_4$$

putem anula constantele c_{24}^4, c_{34}^4 și c_{23}^1. Identitățile lui Jacobi $(X_iX_jX_4) = 0$ se scriu

$$\begin{aligned}&[(X_1X_2)X_4] - c_{14}^4 X_1 = 0\\&[(X_2X_3)X_4] - (X_1X_3) = 0\\&[(X_1X_3)X_4] - (X_1X_2) + c_{12}^4 X_2\end{aligned}$$

și ne dau

$$\begin{aligned}&c_{12}^3 = c_{13}^3 = c_{12}^4 = c_{13}^4 = c_{14}^4 = c_{12}^2 = 0\\&c_{13}^1 = c_{23}^2,\ c_{12}^1 = c_{13}^2 = c_{23}^3\end{aligned}$$

Astfel ecuațiile (35) devin

$$\begin{aligned}&(X_1X_4) = 0,\ (X_2X_4) = X_1,\ (X_3X_4) = X_2\\&(X_1X_2) = \rho X_1,\ (X_2X_3) = \lambda X_2 + \rho X_3 + \mu X_4,\ (X_1X_3) = \lambda X_1 + \rho X_2\end{aligned} \tag{35'}$$

și identitatea $(X_1X_2X_3) = 0$ ne dă condiția $\lambda\rho = 0$. Există deci două posibilități după cum ρ este diferit de zero sau egal cu zero.

1°. Dacă $\rho = 0$ putem satisface la structura corespunzătoare luînd

$$X_1 = p_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3 + \lambda U + \mu\left(\frac{(x^2)^2}{2}p_1 + x^2x^3p_1 + (x^3)^2p_3\right) \tag{36}$$

Determinarea componentelor conexiunii o vom face tot folosind ecuațiile (5). Ținînd seama că spațiul admite transformările X_1 și X_2 rezultă că Γ_{jk}^i sînt funcții numai de variabila x^3; spațiul admițînd și transformarea X_4 avem

$$\Gamma_{j1}^i\delta_k^2 + \Gamma_{j2}^i\delta_k^3 + \Gamma_{1k}^i\delta_j^2 + \Gamma_{2k}^i\delta_j^3 - \Gamma_{jk}^2\delta_1^i - \Gamma_{jk}^3\delta_2^i = 0 \tag{37}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned}&\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = 0\\&\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{23}^3 = -\Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{31}^2 = -\Gamma_{32}^3\\&\Gamma_{13}^1 + \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{23}^2,\ \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{32}^2\\&\Gamma_{23}^2 + \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{33}^3,\ \Gamma_{23}^1 + \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{33}^2\end{aligned} \tag{38}$$

Scriind în sfîrșit ecuațiile (5) relativ la transformarea X_3 putem determina expresiile componentelor nenule ale conexiunii, găsim

$$\Gamma^1_{18} = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{N}, \quad \Gamma^1_{31} = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{N}, \quad \Gamma^1_{22} = \frac{\mu x^3 + \alpha_2}{N}$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{\mu x^3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1}{N}, \quad \Gamma^2_{32} = \frac{\mu x^3 + \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1}{N}$$

$$\Gamma^3_{33} = 2\frac{\mu x^3 + \alpha_1 + \alpha_2}{N}, \qquad \Gamma^1_{33} = \alpha_4 \exp\left\{-\int \frac{\lambda + 4\mu x^3}{N} dx^3\right\} \tag{39}$$

$$\Gamma^1_{23} = (\alpha_3 + \beta_3)\exp\left\{-\int \frac{\lambda + \mu x^3}{N} dx^3\right\}, \quad \Gamma^1_{32} = (\alpha_3 - \beta_3)\exp\left\{-\int \frac{\lambda + \mu x^3}{N} dx^3\right\}$$

$$\Gamma^2_{33} = 2\alpha_3 \exp\left\{-\int \frac{\lambda + \mu x^3}{N} dx^3\right\}$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^3_{23} = -\Gamma^1_{21} = -\Gamma^2_{31} = -\Gamma^3_{32} = \beta_4 \exp\left\{-\int \frac{\lambda + \mu x^3}{N} dx^3\right\}$$

în care α_1, α_2, α_3, α_4, β_1, β_2, β_3, β_4 sînt constante iar

$$N = 1 + \lambda x^3 + \mu (x^3)^2 \tag{39'}$$

Grupul de mișcări al acestui spațiu este grupul cu 4 parametri ale cărui transformări infinitezimale sînt transformările (36) și transformarea $x^3 p_2 + x^2 p_1$. Avem deci

T e o r e m a 3. *Spațiile A_3 avînd conexiunea dată de formulele (38), (39), (39') sînt spații care au un grup de mișcări cu 4 parametri care are transformarea de stabilitate $x^3 p_2 + x^2 p_1$*

2°. Dacă $\rho \neq 0$ atunci $\lambda = 0$ și făcînd transformarea de operatori

$$\overline{X}_1 = X_1, \quad \overline{X}_2 = X_2, \quad \overline{X}_3 = X_3 + \frac{\mu}{\rho} X_4$$

ecuațiile (35') capătă forma

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = 0, \quad (X_2 X_4) = X_1, \quad (X_3 X_4) = X_2 \\ &(X_1 X_2) = \rho X_1, \quad (X_2 X_3) = \rho X_3 + \nu X_1, \quad (X_1 X_3) = \rho X_2 \end{aligned} \tag{35'}$$

și prin urmare operatorii X_1, X_2, X_3 determină un subgrup simplu tranzitiv al grupului de mișcări. Există deci și în acest caz spații A_3 al căror grup de mișcări are ecuațiile de structură (35''').

§ 4. Spațiile A_3 cu transformarea de stabilitate $x^1 p_2$

Ținînd seama că $X_4 = x^1 p_2$, parantezele $(X_i X_4)$, $(X_i X_j)$ se vor scrie

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = X_2 + c^4_{14} X_4, \quad (X_2 X_4) = c^4_{24} X_4, \quad (X_3 X_4) = c^4_{34} X_4 \\ &(X_j X_k) = c^s_{jk} X_s + c^4_{jk} X_4 \end{aligned} \tag{40}$$

și făcînd transformarea de operatori

$$\overline{\overline{X}}_1 = X_1, \quad \overline{X}_2 = X_2 + c_{24}^4 X_4, \quad \overline{X}_3 = X_3 - c_{13}^2 X_4$$

ecuațiile (40) devin :

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = X_2\,, \quad (X_1X_2) = c_{12}^1 X_1 + c_{12}^2 X_2 + c_{12}^3 X_3 + c_{12}^4 X_4\\
&(X_2X_4) = c_{24}^4 X_4, \; (X_2X_3) = c_{23}^1 X_1 + c_{23}^2 X_2 + c_{23}^3 X_3 + c_{23}^4 X_4 \qquad (40')\\
&(X_3X_4) = c_{34}^4 X_4, \; (X_1X_3) = c_{13}^1 X_1 + c_{13}^3 X_3 + c_{13}^4 X_4
\end{aligned}$$

Identitățile $(X_iX_jX_4) = 0$ se scriu

$$\begin{aligned}
&[(X_1X_2)X_4] - c_{12}^4 X_2 = 0\\
&[(X_2X_3)X_4] = 0\\
&[(X_1X_3)X_4] - c_{34}^4 X_2 - (X_2X_3) = 0
\end{aligned}$$

și rezultă condițiile

$$\begin{aligned}
&c_{12}^1 = c_{24}^4, \; c_{23}^2 = c_{13}^1 - c_{34}^4, \; c_{12}^3 c_{34}^4 + c_{12}^2 c_{24}^4 = 0\\
&c_{23}^2 c_{24}^4 = 0, \; c_{23}^1 = c_{23}^3 = 0, \; c_{23}^4 = c_{13}^3 c_{34}^4
\end{aligned} \qquad (41)$$

Trebuie deci să considerăm mai multe cazuri, după cum constantele c_{24}^4 și c_{34}^4 sînt nule sau nu.

1°. Presupunem mai întîi că $c_{24}^4 = c_{34}^4 = 0$. Atunci ecuațiile de structură ale grupului se scriu

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = X_2, \quad (X_1X_2) = -\lambda X_2 - \mu X_3 - \nu X_4\\
&(X_2X_4) = 0, \quad (X_2X_3) = \rho X_2 \qquad (42)\\
&(X_3X_4) = 0, \quad (X_1X_3) = \rho X_1 - \sigma X_3 - \tau X_4
\end{aligned}$$

și identitatea $(X_1X_2X_3) = 0$ ne dă în plus condițiile :

$$\rho\mu = 0\,, \quad \rho(\sigma - \lambda) = 0\,, \quad \rho\nu = 0$$

Avem deci de considerat două subcazuri :

a) $\rho \neq 0$, deci $\mu = \nu = 0$, $\sigma = \lambda$, și ecuațiile (41′) devin

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = X_2\,, \qquad (X_2X_4) = 0\,, \quad (X_3X_4) = 0\\
&(X_1X_2) = -\lambda X_2, \; (X_2X_3) = \rho X_2, \; (X_1X_3) = \rho X_1 - \lambda X_3 - \tau X_4
\end{aligned} \qquad (42')$$

și luînd în locul operatorului X_1 combinația $X_1 - \frac{\tau}{\rho} X_4$, obținem

$$(X_1X_2) = -\lambda X_2, \quad (X_2X_3) = \rho X_2, \quad (X_1X_3) = \rho X_1 - \lambda X_3 \qquad (42'')$$

și putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1 + \lambda U\,, \quad X_2 = p_2\,, \quad X_3 = p_3 + \rho U.$$

Spațiul admițînd transformarea X_2 rezultă că toate componentele Γ^i_{jk} ale conexiunii sînt funcții numai de variabilele x^1 și x^3 ținînd seama și de transformarea X_4 avem

$$\Gamma^i_{j2}\delta^1_k + \Gamma^i_{2k}\delta^1_j - \Gamma^1_{ik}\delta^i_2 = 0 \tag{43}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{33} = 0 \\ &\Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = 0, \quad \Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{21} = 0 \\ &\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32}, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21} \end{aligned} \tag{44}$$

Ținînd seama și de transformările X_1 și X_3 rezultă pentru componentele nenule ale conexiunii expresii de forma

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\alpha^i_{jk}}{1 + \lambda x^1 + \rho x^3} \qquad (\alpha^i_{jk} = \text{const}) \tag{44'}$$

Grupul de mișcări al ace tor spații are ecuațiile

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= (1 + \lambda a^1 + \rho a^3)\, x^1 + a^1 \\ \bar{x}^2 &= x^2 + a^2_1 x^1 + a^2 \\ \bar{x}^3 &= (1 + \lambda a^1 + \rho a^3)\, x^3 + a^3 \end{aligned} \tag{45}$$

b) Dacă $\rho = 0$, avem

$$(X_1X_2) = -\lambda X_2 - \mu X_3 - \nu X_4, \quad (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_3) = -\sigma X_3 - \tau X_4 \tag{42'''}$$

și dacă $\mu = 0$, putem integra cu ușurință aceste ecuații. Avem

$$X_1 = p_1 + (\lambda + \nu x^1)(x^1 p_1 + x^2 p_2) + \sigma x^3 p_3 + \tau x^1 x^3 p_2, \quad X_2 = p_2, \; X_3 = p_3 \tag{45'}$$

iar componentele nenule ale conexiunii sînt

$$\Gamma^1_{11} = \frac{2\nu x^1 + 2\alpha_1}{N}, \quad \Gamma^3_{13} = \frac{\alpha_2 - \beta_2}{N}, \quad \Gamma^3_{31} = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{N}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{\nu x^1 + \alpha_1 - \beta_1 + \eta\tau \int x^1 \exp\left\{\int \frac{\varkappa - 4\nu x^1}{N}\, dx^1\right\} dx^1}{N}$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{\nu x^1 + \alpha_1 + \beta_1 + \eta\tau \int x^1 \exp\left\{\int \frac{\varkappa - 4\nu x^1}{N}\, dx^1\right\} dx^1}{N}$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = (\alpha_3 + \beta_3) \exp\left\{-\int \frac{\sigma dx^1}{N}\right., \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = (\alpha_3 - \beta_3) \exp\left\{-\int \frac{\sigma dx^1}{N}\right\}$$

$$\Gamma^3_{33} = \gamma \exp\left\{-\int \frac{\sigma dx^1}{N}\right\} \tag{46}$$

$$\Gamma^3_{12} = -\Gamma^3_{21} = \eta \exp\left\{\int \frac{\varkappa - 3\nu x^1}{N}\, dx^1\right\}, \qquad (\varkappa = \sigma - 2\lambda)$$

$$\Gamma_{11}^3 = \gamma_1 \exp\left\{\int \frac{\varkappa - 4\nu x^1}{N}\, dx^1\right\}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\tau\gamma_1 \int x^1 \exp\left\{\int \frac{\varkappa - 4\nu x^1}{N}\, dx^1\right\} dx^1 + \gamma_2}{N}$$

$$\Gamma_{33}^2 = \exp\left\{\int \frac{\nu x^1 + \lambda - 2\sigma}{N}\, dx^1\right\} \int \frac{\tau\gamma\, x^1 \exp\left\{\int \frac{\sigma - \lambda - \nu x^1}{N}\, dx^1\right\} + \omega}{N}$$

$$\Gamma_{13}^2 = m(x^1) \exp\left\{\int \frac{\nu x^1 + \tau}{N}\, dx^1\right\}, \qquad \Gamma_{31}^2 = n(x^1) \exp\left\{\int \frac{\nu x^1 + \tau}{N}\, dx^1\right\}$$

în care

$$N = 1 + \lambda x^1 + \nu (x^1)^2$$

$$m = \int \left[\left(\frac{\tau N - \nu x^1 + \alpha - \eta\tau \int x^1 \exp\left\{\int \frac{\varkappa - 3\nu x^1}{N}\, dx^1\right\} dx^1}{N^2} \right) \exp\left\{\int \frac{\nu x^1 + \tau}{N}\, dx^1\right\} \right] dx^1 + \gamma_1 \tag{46'}$$

$$n = \int \left[\left(\frac{\tau N - \nu x^1 + \beta + \eta\tau \int x^1 \exp\left\{\int \frac{\varkappa - 3\nu x^1}{N}\, dx^1\right\} dx^1}{N^2} \right) \exp\left\{\int \frac{\nu x^1 + \tau}{N}\, dx^1\right\} \right] dx^1 + \gamma_2$$

Aceste spații au un grup de mișcări cu 4 parametri avînd transformările infinitezimale (45′) și $x^1 p_2$.

Enunțăm deci :

Teorema 4. *Spațiile A_3 avînd conexiunile date de formulele (44), (44′) respectiv (44), (46), (46′) sînt spații care au grupuri de mișcări cu 4 parametri cu transformarea de stabilitate $x^1 p_2$.*

2°. Presupunem acum că $c_{34}^4 = 0$, $c_{24}^4 \neq 0$ și să punem $c_{24}^4 = 2\rho$. Din condițiile (41) rezultă

$$c_{12}^1 = 2\rho, \quad c_{12}^2 = c_{13}^1 = c_{23}^2 = c_{23}^4 = 0 \tag{41'}$$

Schimbînd operatorul X_1 cu $X_1 + \frac{1}{2\rho} c_{12}^4 X_4$ putem anula și constanta c_{12}^4. Considerînd apoi identitatea $(X_1 X_2 X_3) = 0$ rezultă că și constantele c_{13}^3 și c_{13}^4 sînt nule. Prin urmare ecuațiile de structură ale grupului sînt

$$(X_1 X_4) = X_2, \qquad (X_1 X_2) = 2\rho X_1 + 2\nu X_3,$$
$$(X_2 X_4) = 2\rho X_4, \qquad (X_2 X_3) = 0,$$
$$(X_3 X_4) = 0, \qquad (X_1 X_3) = 0.$$

și integrînd aceste ecuații obținem

$$X_1 = p_1 - \rho x^2 p_1 - \nu x^2 p_3, \quad X_2 = p_2 + \rho(x^1 p_1 - x^2 p_2) + \nu x^1 p_3, \quad X_3 = p_3 \tag{47}$$

Avînd acum expresiile operatorilor transformărilor infinitezimale putem determina conexiunea spațiului la fel ca și în aliniatele precedente. Găsim :

$$\Gamma^1_{11}=\frac{2\alpha_1}{\rho}(1-\rho x^2)-\frac{2\nu}{\rho}\alpha_3, \qquad \Gamma^2_{22}=2\alpha_1 x^1$$

$$\Gamma^1_{12}=(\alpha_1+\beta_1)x^1, \qquad \Gamma^1_{21}=(\alpha_1-\beta_1)x^1$$

$$\Gamma^2_{21}=\frac{\alpha_1+\beta_1}{\rho}(1-\rho x^2)-\frac{\nu}{\rho}(\alpha_3+\beta_3), \qquad \Gamma^2_{12}=\frac{\alpha_1-\beta_1}{\rho}(1-\rho x^2)-\frac{\nu}{\rho}(\alpha_3-\beta_3)$$

$$\Gamma^3_{13}=\frac{\alpha_1-\beta_1}{\rho}(1-\rho x^2)-\frac{\nu}{\rho}(\gamma_3-\alpha_3-\beta_3), \quad \Gamma^3_{31}=\frac{\alpha_1+\beta_1}{\rho}(1-\rho x^2)-\frac{\nu}{\rho}(\gamma_3-\alpha_3+\beta_3)$$

$$\Gamma^3_{23}=(\alpha_1-\beta_1)x^1, \qquad \Gamma^3_{32}=(\alpha_1+\beta_1)x^1$$

$$\Gamma^1_{13}=\Gamma^2_{23}=\alpha_3+\beta_3, \qquad \Gamma^1_{31}=\Gamma^2_{32}=\alpha_3-\beta_3 \tag{48}$$

$$\Gamma^3_{12}=\frac{\tau}{\rho}x^1(1-\rho x^2)+\frac{\nu}{\rho}(\alpha_2+\beta_2)x^1+\eta,$$

$$\Gamma^3_{21}=\frac{\tau}{\rho}x^1(1-\rho x^2)+\frac{\nu}{\rho}(\alpha_2-\beta_2)x^1-\eta,$$

$$\Gamma^3_{11}=\frac{\tau}{\rho^2}(1-\rho x^2)+\frac{2\alpha_1\nu}{\rho^2}(1-\rho x^2)+\frac{\tau\nu^2}{\rho^2}(\gamma_3-\alpha_3),$$

$$\Gamma^3_{22}=\tau(x^1)^2, \quad \Gamma^3_{33}=2\gamma_3$$

$$\Gamma^1_{22}=\Gamma^1_{23}=\Gamma^1_{32}=\Gamma^1_{33}=\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{13}=\Gamma^2_{31}=\Gamma^2_{33}=0$$

în care α_i, β_i, $(i=1, 2, 3)$ și γ_3 sînt constante.
Aceste spații au un grup de mișcări cu 4 parametri avînd transformările infinitezimale (47) și x^1p_2. Rezultă

Teorema 5. *Spațiile A_3 cu conexiunea dată de formulele (48) sînt spații omogene care au un grup de mișcări cu 4 parametri.*

3°. Să admitem acum că c^4_{24} și c^4_{34} sînt diferiți de zero. Vom pune $c^4_{24}=2\rho$, $c^4_{34}=\lambda$. Din formulele (41) rezultă :

$$c^1_{12}=2\rho, \quad c^1_{13}=\lambda, \quad c^2_{23}=0, \quad c^4_{23}=\lambda c^3_{13}$$
$$\lambda c^3_{12}+2\rho c^2_{12}=0 \tag{41''}$$

Putem anula constanta c^4_{12} prin procedeul folosit la punctul 2° și ecuațiile de structură ale grupului se vor scrie

$$(X_1X_4)=X_2, \qquad (X_1X_2)=2\rho X_1+c^2_{12}X_2+c^3_{12}X_3$$
$$(X_2X_4)=2\rho X_4, \qquad (X_2X_3)=\lambda c^3_{13}X_4 \tag{49}$$
$$(X_3X_4)=\lambda X_4, \qquad (X_1X_3)=\lambda X_1+c^3_{13}X_3+c^4_{13}X_4$$

Să considerăm acum identitatea $(X_1X_2X_3)=0$. Această identitate se scrie

$$[(X_1X_2)X_3]-[X_1(X_2X_3)]+[X_2(X_1X_3)]=0$$

sau

$$2\rho(X_1X_3) + (c_{12}^2 + c_{13}^3)(X_2X_3) - \lambda c_{13}^3 X_2 + 2\rho c_{13}^4 X_4 = 0$$

și dezvoltînd rezultă condițiile

$$c_{12}^2 + c_{13}^3 = 0,\ 2\rho c_{13}^3 - \lambda c_{12}^3 = 0,\ 4\rho c_{13}^4 + \lambda c_{13}^3(c_{12}^2 + c_{13}^3) = 0 \qquad (41''')$$

Din ultima condiție (41''') rezultă, dacă ținem seama de prima relație (41''') și de faptul că $\rho \neq 0$,

$$c_{13}^4 = 0 \qquad (41^{IV})$$

Primele două condiții (41''') împreună cu ultima condiție (41^{IV}) ne determină constantele c_{12}^2, c_{12}^3, c_{13}^3 abstracție făcînd de o constantă multiplicativă η. Avem

$$c_{12}^2 = -\lambda\eta,\ c_{12}^3 = 2\rho\eta,\ c_{13}^3 = \lambda\eta$$

și ecuațiile de structură (49) devin

$$\begin{aligned} &(X_1X_4) = X_2, && (X_1X_2) = 2\rho X_1 - \lambda\eta X_2 + 2\rho\eta X_3, \\ &(X_2X_4) = 2\rho X_4, && (X_2X_3) = \lambda^2\eta X_4, \\ &(X_3X_4) = \lambda X_4, && (X_1X_3) = \lambda X_1 + \lambda\eta X_3 \end{aligned} \qquad (49')$$

Este greu să decidem prin metodele obișnuite dacă grupurile care au ecuațiile de structură (49') pot fi grupuri de mișcare al unui spațiu omogen A_3. Vom considera deci numai cazul particular cînd $\eta = 0$; atunci ecuațiile (49') se vor scrie

$$\begin{aligned} &(X_1X_4) = X_2, && (X_1X_2) = 2\rho X_1, \\ &(X_2X_4) = 2\rho X_4, && (X_2X_3) = 0, \\ &(X_3X_4) = \lambda X_4, && (X_1X_3) = \lambda X_1 \end{aligned} \qquad (49'')$$

și integrînd aceste ecuații găsim

$$X_1 = p_1 - \rho x^2 p_1,\ X_2 = p_2 + \rho x^1 p_1 - \rho x^2 p_2,\ X_3 = p_3 + \lambda x^1 p_1 \qquad (50)$$

Componentele conexiunii spațiului A_3 corespunzător se determină tot din ecuațiile (5). Avem

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= -\chi\rho x^1(1-\rho x^2)^2 e^{-2\lambda x^3} + 2\alpha(1-\rho x^2)e^{-\lambda x^3}, \\
\Gamma_{12}^1 &= -\chi(\rho x^1)^2(1-\rho x^2)e^{-2\lambda x^3} + (\alpha+\beta)\rho x^1 e^{-\lambda x^3}, \\
\Gamma_{21}^1 &= -\chi(\rho x^1)^2(1-\rho x^2)e^{-2\lambda x^3} + (\alpha-\beta)\rho x^1 e^{-\lambda x^3}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \chi\rho x^1(1-\rho x^2)^2 e^{-2\lambda x^3} + (\alpha-\beta)(1-\rho x^2)e^{-\lambda x^3} \\
\Gamma_{21}^2 &= \chi\rho x^1(1-\rho x^2)^2 e^{-2\lambda x^3} + (\alpha+\beta)(1-\rho x^2)e^{-\lambda x^3} \\
\Gamma_{22}^2 &= \chi(\rho x^1)^2(1-\rho x^2)e^{-2\lambda x^3} + 2\alpha\rho x^1 e^{-\lambda x^3} \\
\Gamma_{13}^1 &= -(\chi_1+\delta)\rho x^1(1-\rho x^2)e^{-\lambda x^3} + \gamma_1 + \varkappa_1 \\
\Gamma_{31}^1 &= -(\chi_1-\delta)\rho x^1(1-\rho x^2)e^{-\lambda x^3} + \gamma_1 - \varkappa_1 \\
\Gamma_{23}^2 &= (\chi_1+\delta)\rho x^1(1-\rho x^2)e^{-\lambda x^3} + \gamma_1 + \varkappa_1
\end{aligned} \qquad (51)$$

$$\Gamma^2_{32} = (\chi_1 - \delta)\rho x^1(1 - \rho x^2)\, e^{-\lambda x^3} + \gamma_1 - \varkappa_1$$
$$\Gamma^1_{22} = -\chi(\rho x^1)^3 e^{-2\lambda x^3}, \qquad \Gamma^2_{11} = \chi(1 - \rho x^2)^3 e^{-2\lambda x^3}$$
$$\Gamma^1_{23} = -(\chi_1 + \delta)(\rho x^1)^2 e^{-\lambda x^3}, \qquad \Gamma^1_{32} = -(\chi_1 - \delta)(\rho x^1)^2 e^{-\lambda x^3}$$
$$\Gamma^2_{13} = (\chi_1 + \delta)(1 - \rho x^2)^2 e^{-\lambda x^3}, \qquad \Gamma^2_{31} = (\chi_1 - \delta)(1 - \rho x^2)^2 e^{-\lambda x^3}$$
$$\Gamma^1_{33} = -\theta\rho x^1, \qquad \Gamma^2_{33} = \theta(1 - \rho x^2), \qquad \Gamma^3_{33} = 2\gamma,$$
$$\Gamma^3_{13} = (\alpha_1 - \beta_1)(1 - \rho x^2)\, e^{-\lambda x^3}, \qquad \Gamma^3_{31} = (\alpha_1 + \beta_1)(1 - \rho x^2)\, e^{-\lambda x^3},$$
$$\Gamma^3_{23} = (\alpha_1 - \beta_1)\rho x^1 e^{-\lambda x^3}, \qquad \Gamma^3_{32} = (\alpha_1 + \beta_1)\rho x^1 e^{-\lambda x^3},$$
$$\Gamma^3_{11} = \eta(1 - \rho x^2)^2 e^{-2\lambda x^3}, \qquad \Gamma^3_{22} = \eta(\rho x^1)^2 e^{-2\lambda x^3},$$
$$\Gamma^3_{12} = \eta\rho x^1(1 - \rho x^2)\, e^{-2\lambda x^3} + \omega_1 e^{-\lambda x^3},$$
$$\Gamma^3_{21} = \eta\rho x^1(1 - \rho x^2)\, e^{-2\lambda x^3} + \omega_2 e^{-\lambda x^3}.$$

unde χ, α, β, χ_1, δ, γ_1, $\varkappa_1$, θ, γ, α_1, β_1, η, ω_1, ω_2 sînt constante. Observăm că dacă $\chi = \beta = \chi_1 = \delta = \varkappa_1 = \theta = \eta = \beta_1 = \omega_1 = \omega_2 = 0$ și $\alpha = \alpha_1$, $\gamma = \gamma_1$ atunci spațiul este proiectiv euclidian și conexiunea sa se poate scrie sub forma

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j \tag{52}$$

în care

$$\varphi_1 = \alpha(1 - \rho x^2)e^{-\lambda x^3}, \quad \varphi_2 = \alpha\rho x^1 e^{-\lambda x^3}, \quad \varphi_3 = \gamma \tag{53}$$

În acest fel regăsim o clasă de spații A_3 proiectiv euclidiene [9]. Putem enunța

T e o r e m a 6. *Spațiile A_3 cu conexiunea dată de formulele (48) sînt spații omogene care au un grup de mișcări cu 4 parametri.*

4°. În sfîrșit vom presupune că $c^4_{24} = 0$ și $c^4_{34} \neq 0$ și punem $c^4_{34} = \lambda$. Condițiile (41) ne vor da

$$c^1_{12} = c^1_{23} = c^2_{23} = c^3_{23} = c^3_{12} = 0, \quad c^1_{13} = \lambda, \quad c^4_{23} = \lambda c^3_{13} \tag{41^V}$$

și prin urmare ecuațiile de structură ale grupului se vor scrie

$$\begin{aligned} &(X_1X_4) = X_2, && (X_1X_2) = c^2_{12}X_2 + c^4_{12}X_4 \\ &(X_2X_4) = 0, && (X_2X_3) = \lambda\mu X_4 \\ &(X_3X_4) = \lambda X_4, && (X_1X_3) = \lambda X_1 + \mu X_3 + c^4_{13}X_4 \end{aligned} \tag{54}$$

Deoarece $\lambda \neq 0$ putem să anulăm constanta c^4_{13} luînd în locul operatorului X_1 combinația $X_1 + \frac{1}{\lambda} c^4_{13}X_4$. Considerăm acum identitatea $(X_1X_2X_3) = 0$ care se scrie

$$(c^2_{12} + \mu)(X_2X_3) - \lambda(X_1X_2) - \lambda\mu X_2 - \lambda c^4_{12} X_4 = 0$$

sau

$$\lambda(c^2_{12} + \mu)(-X_2 + \mu X_4) - 2\lambda c^4_{12}X_4 = 0$$

și rezultă

$$c_{12}^2 = -\mu, \quad c_{12}^4 = 0$$

Prin urmare ecuațiile de structură (54) devin

$$\begin{aligned} &(X_1X_4) = X_2, && (X_1X_2) = -\mu X_2 \\ &(X_2X_4) = 0, && (X_2X_3) = \lambda\mu X_4 \\ &(X_3X_4) = \lambda X_4, && (X_1X_3) = \lambda X_1 + \mu X_3 \end{aligned} \tag{54'}$$

Putem satisface la această structură luînd

$$\begin{aligned} &X_1 = p_1 + \mu x^1 p_1 + \mu x^2 p_2 - \mu x^3 p_3, \quad X_2 = p_2 \\ &X_3 = p_3 + \lambda x^1 p_1 + \lambda x^3 p_3 + \lambda\mu\, x^1 x^2 p_2 + \lambda\mu (x^1)^2 p_1 \end{aligned} \tag{55}$$

Pentru calculul conexiunii spațiului A_3 corespunzător, vom ține seama în primul rînd de relațiile (44) care sînt valabile deoarece spațiul admite transformările X_2 și X_4. Calculul componentelor nenule Γ_{jk}^i (care sînt funcții numai de variabilele x^1 și x^3) îl vom face scriind ecuațiile (5) relativ la transformările X_1 și X_3. Astfel pentru $i = j = 1$, $k = 3$, avem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Gamma_{13}^1}{\partial x^1}(1 + \mu x^1) - \frac{\partial \Gamma_{13}^1}{\partial x^3}\mu x^3 = \mu \Gamma_{13}^1 \\ &\frac{\partial \Gamma_{13}^1}{\partial x^1}\lambda x^1(1 + \mu x^1) + \frac{\partial \Gamma_{13}^1}{\partial x^3}(1 - \lambda x^3) = -\lambda \Gamma_{13}^1 \end{aligned} \tag{56}$$

și rezolvînd acest sistem în raport cu derivatele parțiale ale componentei Γ_{13}^1, obținem

$$\frac{\partial \Gamma_{13}^1}{\partial x^1} = \frac{\mu}{(1+\mu x^1)P}\Gamma_{13}^1, \qquad \frac{\partial \Gamma_{13}^1}{\partial x^3} = -\frac{\lambda(1+\mu x^1)}{P}\Gamma_{13}^1 \tag{56'}$$

Am notat

$$P = 1 + \lambda x^3 + \lambda\mu x^1 x^3 \tag{57}$$

Din a doua ecuație (56') obținem prin integrare

$$\Gamma_{13}^1 = \frac{\varphi(x^1)}{P} \tag{58}$$

și înlocuind această valoare în prima ecuație (56') rezultă ecuația din care putem determina funcția Γ_{13}^1 anume

$$\frac{d\varphi}{dx^1} - \frac{\mu}{1 + \mu x^1}\varphi = 0$$

care prin integrare ne dă

$$\varphi = (\alpha + \beta)(1 + \mu x^1) \tag{58'}$$

în care α și β sînt constante.

Prin urmare avem

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \frac{(\alpha + \beta)(1 + \mu x^1)}{P} \tag{59}$$

În același mod obținem

$$\Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \frac{(\alpha - \beta)(1 + \mu x^1)}{P}, \quad \Gamma^3_{33} = \frac{2\gamma(1 + \mu x^1)}{P} \tag{59'}$$

γ fiind de asemenea o constantă.
Făcînd apoi în formulele (6) $i = j = k = 1$, avem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1}(1 + \mu x^1) - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^3}\mu x^3 = -\mu \Gamma^1_{11} \\ &\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1}\lambda x^1(1 + \mu x^1) + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^3}(1 + \lambda x^3) = 2\lambda\mu - (\lambda + 2\lambda x^1)\Gamma^1_{11} \end{aligned} \tag{60}$$

Înmulțind prima din aceste ecuații cu $-\lambda x^1$ și adunînd cu a doua, obținem :

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^3} P = 2\lambda\mu - (\lambda + \lambda\mu x^1)\Gamma^1_{11} \tag{60'}$$

de unde rezultă prin integrare

$$\Gamma^1_{11} = \frac{2\lambda\mu x^3 + \Psi(x^1)}{P}$$

Înlocuind această valoare în prima ecuație (60) avem

$$(1 + \mu x^1)\frac{d\Psi}{dx^1} + \mu\Psi = 0$$

și integrînd rezultă

$$\Psi = \frac{K}{1 + \mu x^1}$$

Luînd pe $K = 2\eta + 2\mu$ avem

$$\Gamma^1_{11} = \frac{2\mu}{1 + \mu x^1} + \frac{2\eta}{(1 + \mu x^1) P} \tag{61}$$

Prin aceleași calcule obținem

$$\begin{aligned} &\Gamma^2_{21} = \frac{\mu}{1 + \mu x^1} + \frac{\eta + \delta}{(1 + \mu x^1) P}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{\mu}{1 + \mu x^1} + \frac{\eta - \delta}{(1 + \mu x^1) P} \\ &\Gamma^3_{31} = \frac{\eta_1 + \delta_1}{(1 + \mu x^1) P}, \qquad \Gamma^3_{13} = \frac{\eta_1 - \delta_1}{(1 + \mu x^1) P} \end{aligned} \tag{61'}$$

cu η, δ, η_1, δ_1 constante.

Făcînd acum $i = 2,\ j = k = 1$ avem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^1}(1 + \mu x^1) - \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^3}\mu x^3 = -\mu \Gamma^2_{11} \\ &\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^1}\lambda x^1(1 + \mu x^1) + \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^3}(1 + \lambda x^3) = -(3\lambda\mu x^1 + 2\lambda)\Gamma^2_{11} \end{aligned} \tag{62}$$

și făcînd aceeași combinație ca și la sistemul (60) obținem

$$\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^3} P = -2\lambda(1 + \mu x^1)\,\Gamma^2_{11}$$

și integrînd obținem

$$\Gamma^2_{11} = \frac{p(x^1)}{P^2}$$

valoarea care înlocuită în prima ecuație (62) ne dă

$$(1 + \mu x^1)\frac{dp}{dx^1} + \mu = 0$$

Integrînd avem

$$p = \frac{\alpha_1}{1 + \mu x^1}$$

și prin urmare

$$\Gamma^2_{11} = \frac{\alpha_1}{(1 + \mu x^1)\,P^2} \qquad (\alpha_1 = \text{const}) \tag{63}$$

Prin calcule asemănătoare găsim

$$\Gamma^2_{13} = \frac{(\eta_2 - \delta_2)(1 + \mu x^1)}{P^2},\quad \Gamma^2_{31} = \frac{(\eta_2 + \delta_2)(1 + \mu x^1)}{P^2},\quad \Gamma^2_{33} = \frac{\alpha_2(1 + \mu x^1)^3}{P^2} \tag{63'}$$

în care α_2, η_2, δ_2 sînt de asemenea constante.

În sfîrșit pentru $i = 3, j = k = 1$ și apoi pentru $i = 3, j = 1, k = 2$, vom găsi aplicînd același procedeu

$$\Gamma^3_{11} = \frac{\alpha_3}{(1 + \mu x^1)\,P},\qquad \Gamma^3_{12} = -\Gamma^3_{21} = \frac{\varkappa}{(1 + \mu x^1)^3} \tag{64}$$

cu α_3 și $\varkappa$ constante.

Componentele nenule ale conexiunii sînt deci date de formulele (59), (59′), (61), (61′), (63), (63′) și (64). Putem enunța:

T e o r e m a 7. *Spațiile omogene A_3 care au transformarea de stabilitate $X_4 = x^1 p_2$ aparținînd grupului cu structură (54′) sînt spațiile a căror conexiune este dată de formulele (44), (59), (59′), (61), (61′), (63), (63′) și (64).*

ЧЕТЫРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ A_3

РЕЗЮМЕ

Продолжается классификация пространств аффинной связности A_3 с транзитивной группой движений. Сначала доказывается, что существуют лишь 4 линейные однопараметрические группы, могущие быть полными стационарными группами однородного пространства A_3; бесконечно малые преобразования этих групп имеют операторы вида (10).

Далее доказывается, что пространства A_3 со стационарными преобразованиями $x^1p_1 - x^2p_2 \longleftrightarrow$ соответственно x^1p_1 являются пространствами, связность которых выражается формулами (13) или (30) соответственно (32), (33′).

Указывается также, что существуют однородные пространства A_3, обладающие одним из преобразований устойчивости $x^3p_2 + x^2p_1$ или x^1p_2.

GROUPES DE MOUVEMENT À 4 PARAMÈTRES DES ESPACES HOMOGÈNES A_3

RÉSUMÉ

On continue la classification des espaces à connexion affine A_3 à groupe transitif de mouvements. On montre d'abord qu'il n'existe que 4 groupes linéaires à un paramètre, pouvant être des groupes totaux de stabilité d'un espace homogène A_3; les transformations infinitésimales de ces groupes ont des opérateurs donnés par les formules (10).

On montre ensuite que les espaces A_3, ayant $x^1p_1 - x^2p_2$, respectivement x^1p_1, comme transformations de stabilité, sont les espaces dont la connexion est donnée par les formules (13) ou (30), respectivement (32), (33′).

On montre encore qu'il existe aussi des espaces homogènes A_3 ayant l'une des transformations de stabilité $x^3p_2 + x^2p_1$ ou x^1p_2.

BIBLIOGRAFIE

1. SOPHUS LIE, F. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, Leipzig, **III**, 1893. 117.
2. G. VRÂNCEANU, *Sur le groupe de stabilité d'un espace à connexion affine*. Bull. Math. **I** (49), *1* (1957).
3. V. DUMITRAȘ, *Asupra transformărilor grupului de stabilitate al unui spatiu A_n*. Analele Univ. „C. I. Parhon", Seria științele naturii, *14*, 29 (1957).

4. V. DUMITRAȘ, *Asupra grupului de stabilitate al unui spațiu cu conexiune afină*. Analele Univ. „C. I. Parhon", Seria științele naturii, *16*, 33 (1957).
5. — *Asupra spațiilor A_3 cu grup tranzitiv maxim*. Analele Univ. „C. I. Parhon", Seria șt. naturii, *13*, 25 (1957).
6. — *Determinarea spațiilor A_3 cu grup tranzitiv G_7*. Studii și cercetări matematice, **VIII**, *1—2*, 183—234 (1957).
7. — *Grupurile de mișcare cu 6 parametri ale spațiilor A_3*. Studii și cercetări matematice, **VIII**, *3—4*, 303—342 (1957).
8. — *Determinarea spațiilor omogene A_3 cu grup de mișcări G_5*. Studii și cercetări matematice, **X**, *2*, 331—364 (1959).
9. — *The classification of the projectively flat spaces A_3*. Revue de Math. pures et appliquées, **IV**, *4*, 623—639 (1959).

DERIVATĂ LIE ŞI OLONOMIE ÎN TEORIA CONEXIUNILOR INFINITEZIMALE

DE

T. HANGAN

Scopul acestui articol este demonstrarea rezultatelor anunţate în nota [10] *); acestea reprezintă generalizarea pentru grupuri Lie arbitrare, a unor rezultate anunţate de A. Lichnerowicz în [4] privind legăturile care există între grupul de automorfisme şi grupul de olonomie al unui spaţiu cu conexiune liniară.

Legătura dintre automorfismele unei conexiuni infinitezimale şi grupul de olonomie se face exprimînd întîi derivata Lie a conexiunii cu ajutorul formei de curbură şi apoi folosind teoria grupurilor de olonomie infinitezimală în forma expusă de H. Ozeki în [6]. În legătură cu grupul G de automorfisme al unui spaţiu cu conexiune, se introduce pentru fiecare punct z al spaţiului un subgrup al grupului structural, a cărui algebră Lie este generată de componentele verticale ale automorfismelor infinitezimale ale lui G. Deşi ar fi sugestivă denumirea de grup vertical generat de G în punctul z ($V_z(G)$), pentru a păstra notaţiile din teoria conexiunilor liniare şi riemanniene [3], [4], îl vom numi grup al lui Kostant corespunzător grupului G în punctul $z(K_z(G))$.

§ 1. Definiţii şi formule fundamentale

Fie $E(V_n, p, F)$ un spaţiu fibrat principal diferenţiabil **) avînd baza V_n o varietate diferenţială cu n dimensiuni, proiecţia p şi grupul structural F, un grup Lie a cărui algebră Lie se notează $\mathfrak{F}$. Grupul F operează la dreapta pe E prin translaţii D_f asociate elementelor sale f; uneori vom folosi notaţia $z \cdot f$ în loc de $D_f(z)$, $z \in E$. În algebra $\mathfrak{F}$, considerată ca spaţiul de

*) Numerele între paranteze drepte trimit la bibliografie.

**) În această lucrare „diferenţiabil" însemnează „indefinit diferenţiabil".

vectori tangenți la F în punctul e, element identitate al grupului, comutatorul se definește cu ajutorul cîmpurilor invariante la stînga pe F.

1°) Fie $T(E)$ mulțimea cîmpurilor diferențiabile de vectori tangenți la E și să notăm cu $T_z(E)$ spațiul vectorilor tangenți la E în punctul $z \in E$; $T(E)$ este un modul în raport cu inelul funcțiilor reale pe E. Fie de asemenea $\Lambda(E)$ algebra exterioară a formelor diferențiale pe E. X fiind un element din $T(E)$, fie $\theta(X)$ și $i(X)$ operatorii *derivată Lie* și *produs interior* în raport cu cîmpul X, introduși de H. Cartan [2] *); $\theta(X)$ operează liniar în $T(E)$ și este o derivare de grad 0 în $\Lambda(E)$ adică

$$\theta(X)(\alpha \wedge \beta) = \theta(X)\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \theta(X)\beta, \qquad \alpha, \beta \in \Lambda(E)$$

în timp ce $i(X)$ este o antiderivare de grad -1 în $\Lambda(E)$

$$i(X)(\alpha \wedge \beta) = i(X)\alpha \wedge \beta + (-1)^{\text{grad } \alpha} \alpha \wedge i(X)\beta, \qquad \alpha, \beta \in \Lambda(E)$$

În plus, acești operatori satisfac relațiile fundamentale ([2])

$$\theta([XY]) = \theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X) \qquad \text{I}$$

$$\theta(X)i(Y) = i(Y)\theta(X) + i([XY]) \qquad \text{II}$$

$$\theta(X) = i(X)d + di(X) \qquad \text{III}$$

unde Y este de asemenea un cîmp de vectori tangenți la E, $[XY] = \theta(X) \cdot Y$ este paranteza lui Poisson a cîmpurilor X, Y și d este simbolul de diferențiere exterioară. Să observăm că se poate face ca $\theta(X)$ și $i(X)$ să opereze nu numai asupra formelor definite pe E cu valori reale, dar chiar și asupra formelor cu valori în spații vectoriale; se consideră pentru aceasta o bază în spațiul vectorial respectiv și se definesc $\theta(X)$ și $i(X)$ prin efectul lor asupra componentelor formei în raport cu această bază.

Un cîmp $X \in T(E)$ se zice *vertical* dacă pentru orice $z \in E$ imaginea lui X_z (valoarea cîmpului în punctul z) prin diferențiala dp a proiecției p este vectorul nul din $T_{p(z)}(V_n)$.

Vom spune că un cîmp $X \in T(E)$ este *proiectabil* dacă pentru orice cîmp vertical $V \in T(E)$ cîmpul $\theta(V) \cdot X = [V, X]$ este vertical.

Dacă λ este un element al algebrei $\mathfrak{F}$, se poate construi un cîmp vertical λ^* pe E astfel încît în orice reprezentare a unei vecinătăți a unui punct $z \in E$ ca produs local, λ_z^* să genereze pe F un cîmp invariant la stînga Λ astfel ca $\Lambda_e = \lambda$. Atunci, condiția necesară și suficientă pentru ca un cîmp diferențiabil (de vectori sau de forme) să fie invariant prin translațiile D_f, $f \in F$ este ca el să fie anulat de operatorii $\theta(\lambda^*)$ unde $\lambda \in \mathfrak{F}$.

2°) Fie $\mathfrak{R}(F)$ o reprezentare liniară a grupului F într-un spațiu vectorial $\mathfrak{M}$. După [5] **), se numește *tensor de tip* $\mathfrak{R}(F)$ pe E o funcțiune t pe E cu valori în $\mathfrak{M}$ care satisface condiția

$$t(D_f(z)) = \mathfrak{R}(f^{-1}) \cdot t(z), \qquad z \in E, f \in F.$$

*) p. 17–18.
**) p. 66.

Un tensor diferenţiabil poate fi caracterizat cu ajutorul operatorilor $\theta(\lambda^*)$ prin ecuaţia

$$\theta(\lambda^*)\cdot t = -\widetilde{\mathfrak{R}}(\lambda)\cdot t, \qquad \lambda \in \mathfrak{F}. \tag{1.1}$$

unde prin $\widetilde{\mathfrak{R}}(\mathfrak{F})$ se notează reprezentarea algebrei $\mathfrak{F}$ indusă de $\mathfrak{R}(F)$. În particular, dacă $\mathfrak{M}$ coincide cu $\mathfrak{F}$ şi $\mathfrak{R}(F)$ este reprezentarea adjunctă în $\mathfrak{F}$, atunci, t fiind un tensor de tip adj. (F) putem scrie

$$\theta(\lambda^*)\cdot t = -[\lambda, t] \tag{1.2}$$

Fie $\xi \in T(E)$ un cîmp invariant la dreapta pe E, satisfăcînd deci ecuaţia

$$\theta(\lambda^*)\cdot\xi = [\lambda^*, \xi] = 0, \qquad \lambda \in \mathfrak{F} \tag{1.3}$$

Dacă t este un tensor de tip $\mathfrak{R}(F)$ cu valori în $\mathfrak{M}$, $\theta(\xi)\cdot t$ este o funcţie pe E cu valori tot în $\mathfrak{M}$. Să arătăm că $\theta(\xi)\cdot t$ este *chiar un tensor de tip* $\mathfrak{R}(F)$ pe E. Într-adevăr, pentru orice $\lambda \in \mathfrak{F}$ se obţine, ţinînd seama de I, 1.3 şi 1.1

$$\begin{aligned}\theta(\lambda^*)\,\theta(\xi)\cdot t &= \theta([\lambda^*\xi])\cdot t + \theta(\xi)\theta(\lambda^*)\cdot t = \\ &= \theta(\xi)\cdot(-\widetilde{\mathfrak{R}}(\lambda)\cdot t) = -\widetilde{\mathfrak{R}}(\lambda)(\theta(\xi)\cdot t)\end{aligned} \tag{1.4}$$

Tot după [5] *), o p-formă φ pe E cu valori în $\mathfrak{M}$ se numeşte *formă tensorială de tip* $\mathfrak{R}(F)$ dacă satisface următoarele condiţii :

a) dacă cel puţin unul din vectorii $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p \in T_z(E)$ este vertical

$$\varphi_z(\tau_1, \ldots, \tau_p) = 0$$

b) oricare ar fi cîmpurile $X_1, \ldots, X_p \in T(E)$ şi $f \in F$

$$\varphi_{z.f}(D_f X_1, \ldots, D_f X_p) = \mathfrak{R}(f^{-1})\cdot\varphi_z(X_1, \ldots, X_p)$$

3°) Fie $\mathfrak{H}$ o conexiune infinitezimală pe E, [5]**). Aceasta poate fi definită cu ajutorul unei forme diferenţiale de grad 1, ω pe E cu valori în $\mathfrak{F}$, care satisface condiţiile

$$\omega_z(\lambda^*) = \lambda, \quad \omega_{z.f}(D_f X) = (\text{adj. } f^{-1})\cdot\omega_z(X) \tag{1.5}$$

oricare ar fi $z \in E$, $\lambda \in \mathfrak{F}$, $f \in F$. Subspaţiul vectorial $\mathfrak{H}_z = \{\tau \mid \tau \in T_z(E), \omega_z(\tau) = 0\}$ denumit *orizontal*, al lui $T_z(E)$ defineşte împreună cu subspaţiul $\mathfrak{V}_z$ al vectorilor verticali în punctul z, o descompunere

$$T_z(E) = \mathfrak{H}_z + \mathfrak{V}_z \tag{1.6}$$

a spaţiului $T_z(E)$ în suma directă a subspaţiilor sale orizontal şi vertical, invariantă prin translaţiile D_f, $f \in F$. Astfel, orice cîmp $X \in T(E)$ poate fi descompus în suma cîmpurilor hX şi vX componentele sale *orizontală* şi *verticală*.

*) p. 67.
**) p. 54.

Invarianța prin D_f, $f \in F$ a descompunerii 1.6 se exprimă cu ajutorul operatorilor $\theta(\lambda^*)$ prin ecuația

$$v\theta(\lambda^*)\cdot hX = v[\lambda^*, hX] = 0 \qquad 1.7$$

pentru orice $\lambda \in \mathfrak{F}$ și pentru orice $X \in T(E)$.

Din definiția conexiunii rezultă formulele următoare, de care vom avea nevoie : t fiind un tensor de tip $\mathfrak{R}(F)$ și X un cîmp de vectori tangenți la E.

$$(\theta(vX)\cdot t)_z = (\theta(\omega_z(X)^*)\cdot t)_z = -\widetilde{\mathfrak{R}}(\omega_z(X))\cdot t(z) \qquad 1.8$$

și dacă t este un tensor de tip adj. (F) cu valori în $\mathfrak{F}$

$$\theta(vX)\cdot t = -[\omega(X), t] \qquad \text{IV}$$

4°) Forma de curbură Ω a conexiunii $\mathfrak{H}$ este o formă tensorială de grad 2, de tip adj.(F) cu valori în $\mathfrak{F}$ care se definește în felul următor : dacă X, Y sînt două cîmpuri din $T(E)$

$$\Omega(X, Y) = d\omega(hX, hY) \qquad \text{V}'$$

sau

$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega] \qquad \text{V}''$$

După H. O z e k i, [6] *) se definește *grupul de olonomie infinitezimală* al conexiunii $\mathfrak{H}$ cu ajutorul formei Ω după cum urmează. Pentru orice întreg $k \geqslant 0$ se consideră sisteme de cîmpuri de vectori orizontali arbitrari pe E, X, Y, $U_1, \ldots, U_k$ și funcțiile cu valori în $\mathfrak{F}$

$$\theta(U_k)\,\theta(U_{k-1}) \ldots \theta(U_1)\,\Omega(X, Y) \qquad (\mathcal{J}_k)$$

Fie $\mathfrak{M}_k(z)$ subspațiul lui $\mathfrak{F}$ generat de $\mathfrak{M}_{k-1}(z)$ și de valorile funcțiilor $\mathcal{J}_k$ în punctul z din E. *Grupul de olonomie infinitezimală* σ'_z *în punctul* z *din* E *este subgrupul conex al grupului* F *a cărui algebră Lie este*

$$d\sigma'_z = \bigcup_k \mathfrak{M}_k(z)$$

Dacă într-o vecinătate $\mathfrak{V}$ a punctului $x = p(z)$ din V_n se alege o bază $(x_1, \ldots, x_n)$ pentru cîmpurile de vectori din $\mathfrak{V}$ și dacă se notează cu $X_1, \ldots, X_n$ cîmpurile orizontale definite prin proprietatea $dp_z(X_i) = x_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$, atunci pentru orice k, $\mathfrak{M}_k(z)$, $(z \in p^{-1}(x))$, este generat de $\mathfrak{M}_{k-1}(z)$ și de valorile în punctul z ale funcțiilor

$$\theta(X_{h_k}) \ldots \theta(X_{h_1})\,\Omega(X_i, X_j) \qquad (\mathcal{J}'_k)$$

unde $i, j, h_1, \ldots = 1, 2, \ldots, n$.

*) p. 111–113.

§ 2. Automorfisme infinitezimale

1°) Fie ξ un cîmp de vectori pe E. Se zice că ξ este un automorfism infinitezimal pentru conexiunea $\mathfrak{H}$ dacă

$$\theta(\xi)\cdot\omega = 0 \qquad 2.1$$

Ţinînd seama de II, pentru orice $\lambda \in \mathfrak{F}$ vom avea din 2.1

$$i(\lambda^*)\theta(\xi)\omega = \{\theta(\xi)i(\lambda^*) - i([\xi, \lambda^*])\}\,\omega = 0$$

Dar $i(\lambda^*)\omega = \lambda = \text{const.}$ deci $\theta(\xi)i(\lambda^*)\,\omega = 0$.

Rezultă condiţia

$$i([\lambda^*,\xi])\,\omega = \omega([\lambda^*, h\xi + v\xi]) = \omega([\lambda^*, v\xi]) = 0$$

căci după cum rezultă din 1.7 $[\lambda^*, h\xi]$ este cîmp orizontal.

Cîmpul $[\lambda^*, v\xi] = \theta(\lambda^*)\cdot v\xi$ fiind vertical trebuie deci să fie nul. Se obţine prin urmare ecuaţia

$$\theta(\lambda^*)\cdot v\xi = 0 \qquad 2.2$$

care ne spune că $v\xi$ este invariant la dreapta pe E sau că $\omega(\xi)$ este o funcţiune cu valori în $\mathfrak{F}$ de tip adj. (F) adică pentru orice $\lambda \in \mathfrak{F}$

$$\theta(\lambda^*)\cdot\omega(\xi) = -\,[\lambda,\ \omega(\xi)] \qquad 2.2'$$

Fie X un cîmp de vectori pe E. Ţinînd seama de III şi V'', se obţine din 2.1

$$i(hX)\ \theta(\xi)\omega = i(hX)\{i(\xi)d + di(\xi)\}\omega = \Omega(\xi, hX) + \theta(hX)\cdot\omega(\xi) = 0$$

căci hX fiind orizontal $i(hX)\cdot i(\xi)[\omega\omega] = 0$

Deci

$$\theta(hX)\cdot\omega(\xi) = \Omega(hX, \xi) \qquad 2.3$$

Invers, ecuaţiile 2.2′ şi 2.3 atrag ecuaţia 2.1 şi se obţine

T e o r e m a 2.1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o transformare infinitezimală ξ să definească un automorfism infinitezimal al conexiunii $\mathfrak{H}$ este ca ea să satisfacă ecuaţiile 2.2′ şi 2.3.*

2°) Folosind formula II, se poate formula condiţia 2.3 cu ajutorul cîmpurilor de pe E. Pentru orice cîmp $X \in T(E)$

$$i(hX)\,\theta(\xi)\omega = \theta(\xi)i(hX)\ \omega + i([hX,\ \xi])\ \omega = \omega([hX,\ \xi]) = \omega(v\,[hX, \xi]).$$

Deci, condiţia 2.3 este echivalentă cu condiţia

$$v[hX, \xi] = 0 \qquad 2.3'$$

şi se obţine

T e o r e m a 2.2. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o transformare infinitezimală ξ să definească un automorfism infinitezimal al conexiunii $\mathfrak{H}$ este ca ea să satisfacă ecuaţiile 2.2 şi 2.3′.*

Aceste ecuații nu depind de faptul că transformarea infinitezimală ξ este sau nu proiectabilă. Dacă ξ este proiectabilă, atunci componenta sa orizontală $h\xi$ este de asemenea proiectabilă și prin urmare invariantă la dreapta pe E căci $[\lambda^*, h\xi]$ trebuie să fie în același timp orizontal (1.7) și vertical, deci nul. Rezultă că *un automorfism infinitezimal proiectabil este invariant prin translațiile la dreapta pe spațiul E*. Transformările infinitezimale pe care le vom considera în cele ce urmează le vom presupune proiectabile.

3°) Se pot caracteriza automorfismele infinitezimale ale unei conexiuni $\mathfrak{H}$ pe E și cu ajutorul funcțiilor cu valori scalare sau vectoriale definite pe E. Fie f o astfel de funcție pe E și fie ∇f diferențiala sa absolută care este o 1-formă definită după cum urmează

$$i(X)\nabla f = i(hX)\, df$$

pentru orice $X \in T(E)$.

Teorema 2.3. *Condiția necesară și suficientă pentru ca cîmpul proiectibil ξ invariant la dreapta pe E să definească un automorfism infinitezimal al conexiunii $\mathfrak{H}$ este ca pentru orice funcție f pe E să avem*

$$\nabla\, \theta(\xi) f = \theta(\xi)\, \nabla f. \qquad 2.4$$

Demonstrație. Pentru $X \in T(E)$ rezultă din III

$$i(X)\, \nabla\, \theta(\xi)\, f = i(hX)\, d\, \theta(\xi) f = \theta(hX)\, \theta(\xi) \cdot f.$$

Apoi, folosind II și I

$$\begin{aligned} i(X)\, \theta(\xi)\, \nabla f &= \{\theta(\xi)\, i(X) - i([\xi, X])\}\, \nabla f = \\ &= \{\theta(\xi)\, i(hX) - i(h[\xi, X])\}\, df \\ &= \{\theta(\xi)\, \theta(hX) - \theta(h[\xi, X])\}\, f \\ &= \{\theta(hX)\theta(\xi) + \theta([\xi, hX]) - \theta(h[\xi, X])\}\, f \\ &= \{\theta(hX)\theta(\xi) + \theta(v[\xi, hX]) - \theta(h[\xi, vX])\}\, f. \end{aligned}$$

Dar ξ fiind proiectabil, $[\xi, vX]$ este vertical și prin urmare

$$i(X)\{\theta(\xi)\nabla f - \nabla\, \theta(\xi) f\} = \theta(v[\xi, hX]) \cdot f$$

Deci condiția 2.4 este satisfăcută pentru orice funcție f dacă și numai dacă ecuația 2.3′ este satisfăcută.

Observație. Dacă grupul F admite o reprezentare liniară fidelă $\mathfrak{R}$, atunci se poate înlocui în enunțul teoremei 2.3 cuvîntul „funcție" cu „tensor". Cazuri particulare ale acestei teoreme au fost stabilite de K. Yano în [9] pentru conexiuni liniare și de Buchin-Su [1] pentru conexiuni conforme normale.

§ 3. Grupul lui Kostant

1°) Fie $\mathfrak{L}$ o algebră Lie de automorfisme infinitezimale proiectabile ale conexiunii $\mathfrak{H}$ (comutatorul în $\mathfrak{L}$ coincide cu paranteza lui Poisson a cîmpurilor ce definesc automorfismele; dimensiunea algebrei $\mathfrak{L}$ poate fi

infinită, căci spaţiul E cu conexiunea $\mathfrak{H}$ poate fi privit ca un spaţiu neolonom care poate să admită un grup de mişcări depinzînd de funcţii arbitrare, [8]*)). Să fixăm un punct z_0 din E şi să considerăm subalgebra $\mathfrak{K}_{z_0}(\mathfrak{L})$ a algebrei $\mathfrak{F}$ generată de elementele

$$\varkappa_{z_0}(\xi) = -\omega_{z_0}(\xi), \qquad \xi \in \mathfrak{L}$$

Definiţie. *Se numeşte grup al lui Kostant* $K_{z_0}(\mathfrak{L})$ *în punctul* $z_0 \in E$ *corespunzător algebrei* $\mathfrak{L}$, *subgrupul conex al lui* F *avînd ca algebră Lie* $\mathfrak{K}_{z_0}(\mathfrak{L})$.

Ţinînd seama de 2.2′ avem

$$\mathfrak{K}_{z_0 \cdot f}(\mathfrak{L}) = (\text{adj. } f^{-1})(\mathfrak{K}_{z_0}(\mathfrak{L}))$$

şi prin urmare putem enunţa

Teorema 3.1. *Grupul* $K_{z.f}(\mathfrak{L})$ *este subgrupul grupului* F *conjugat cu* $K_z(\mathfrak{L})$ *prin* $f \in F$.

Din definiţie se observă că *algebra* $\mathfrak{K}_z(\mathfrak{L})$ *conţine algebra de izotropie* $\mathfrak{J}_z$ *a punctului* z adică subalgebra din $\mathfrak{F}$ generată de elementele $\omega_z(\widetilde{\xi})$, $\widetilde{\xi}$ fiind un element arbitrar al algebrei $\widetilde{\mathfrak{L}}_z = \{\widetilde{\xi} \mid \widetilde{\xi} \in \mathfrak{L}, dp_z(\widetilde{\xi}) = 0\}$.

2°) Interpretarea geometrică a grupului $K_{z_0}(\mathfrak{L})$ este următoarea: *dacă se compune aplicaţia* $z_0 \to \exp(th\xi) \cdot z_0$ *cu aplicaţia* $\exp(-t\xi)$ *se obţine elementul* $z(t) = \exp(t\varkappa_{z_0}(\xi)^*) \cdot z_0$ *situat în aceeaşi fibră cu* z_0.

Pentru demonstraţie, fie $z'(t) = \exp(th\xi) \cdot z_0$ şi $z(t) = \exp(-t\xi) \cdot z'(t)$ şi să căutăm ecuaţia diferenţială a curbei $z(t)$. Dacă ε este o creştere dată variabilei t şi $z'(t, \varepsilon) = \exp(-\varepsilon\xi) \cdot z'(t + \varepsilon)$, atunci, din cauză că ξ este invariant la dreapta pe E translaţia la dreapta ce aduce punctul $z'(t)$ în $z'(t, \varepsilon)$ aduce totodată punctul $z(t)$ în $z(t + \varepsilon)$. Deci

$$\left(\omega\left(\left(\frac{dz(t+\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\right)\right)^* = \left(\omega\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)\right)^* = \left(\omega\left(\left(\frac{dz'(t,\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\right)\right)^*$$

Introducînd un sistem de coordonate locale în vecinătatea punctului $z'(t)$, pentru ε suficient de mic, vom avea

$$z'(t, \varepsilon)^\alpha = z'(t)^\alpha + \varepsilon((h\xi)^\alpha_{z'(t)} - \xi^\alpha_{z'(t)} + \eta^\alpha) =$$
$$= z'(t)^\alpha - \varepsilon[(v\xi)^\alpha_{z'(t)} - \eta^\alpha]$$

unde $\alpha = 1, \ldots, n + \dim F$ şi $\eta^\alpha \to 0$ cînd $\varepsilon \to 0$.

Prin urmare, vectorul

$$\frac{dz(t)}{dt} = (-\omega_{z'(t)}(\xi))^*_{z(t)} = (-\omega_{z_0}(\xi))^*_{z(t)} = (\varkappa_{z_0}(\xi))^*_{z(t)}$$

căci ecuaţia 2.3 ne dă pentru $X = \xi$

$$\theta(h\xi) \cdot \omega(\xi) = \Omega(\xi, \xi) = 0$$

*) p. 247.

şi deci

$$\omega_{z'(t)}(\xi) = \omega_{z_0}(\xi)$$

Rezultă că

$$z(t) = \exp\,(t\varkappa^*_{z_0}(\xi))\cdot z_0$$

ceea ce era de demonstrat,

§ 4. Legăturile grupurilor $K_z(\mathfrak{L})$ şi $\sigma'_z(E)$

1°) Fie f un tensor de tip adj. (F) definit pe E cu valori în $\mathfrak{F}$. Din formulele I, IV se deduce

$$\{\theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X)\}f = \theta([X.\,Y])\cdot f = \theta(v[XY])\cdot f + \\ + \theta(h[XY])\cdot f = [-\omega([XY])\cdot f] + \theta(h[XY])f. \tag{4.1}$$

X, Y fiind două cîmpuri din $T(E)$

Dacă X, Y sînt cîmpuri *orizontale*, din formulele II, III şi V′ deducem

$$\omega([XY]) = i([XY])\cdot\omega = \{\theta(X)i(Y) - i(Y)\theta(X)\}\omega = \\ = -i(Y)\theta(X)\cdot\omega = -i(Y)\{i(X)d + di(X)\}\cdot\omega = -i(Y)i(X)d\omega = \\ = -d\omega(X,Y) = -\Omega(X,Y)$$

Deci, ţinînd seama de 4.1, pentru orice cîmpuri X, Y *orizontale*

$$\{\theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X)\}f = [\Omega(X,Y),f] + \theta(h[X,Y])\cdot f.$$

Să facem în această formulă

$$f = \omega(\xi)$$

unde ξ este un element al algebrei $\mathfrak{L}$. Ţinînd seama de 2.3, se obţine

$$\theta(X)\Omega(Y,\xi) - \theta(Y)\cdot\Omega(X,\xi) - \Omega([XY],\xi) = [\Omega(X,Y),\omega(\xi)]$$

Dacă aplicăm acestei formule operatorii $\theta(U_1)$, $\theta(U_2)$, ..., $\theta(U_k)$, ... unde U_1, U_2, ..., U_k, ... sînt cîmpuri orizontale definite într-o vecinătate a unui punct $z\in E$ şi ţinem seamă că $\theta(U_i)$ sînt derivări în algebra tensorilor de tip adj. (F) se obţine

$$\mathfrak{M}_{k+1}(z) \supset [\mathfrak{M}_k(z), \mathfrak{K}_z(\mathfrak{L})]$$

şi putem enunţa (a se vedea [4], teorema 1),

T e o r e m a 4.1. *Grupul $K_z(\mathfrak{L})$ în punctul $z\in E$ corespunzător algebrei $\mathfrak{L}$ de automorfisme infinitezimale al conexiunii $\mathfrak{H}$ este conţinut în normalizatorul conex $N^0(\sigma'_z)$ al grupului de olonomie infinitezimală în punctul $z\in E$ în grupul structural.*

2°) Fie ξ, η două automorfisme infinitezimale ale conexiunii $\mathfrak{H}$. Comutatorul lor $[\xi,\eta]$ este de asemenea un automorfism infinitezimal, căci

$$\theta([\xi,\eta])\cdot\omega = \{\theta(\xi)\theta(\eta) - \theta(\eta)\theta(\xi)\}\cdot\omega = 0$$

Din formulele II, 2.2′, 2.3., deducem

$$\omega([\xi,\eta]) = i([\xi,\eta])\cdot\omega = \{\theta(\xi)i(\eta) - i(\eta)\theta(\xi)\}\cdot\omega = \theta(\xi)\cdot\omega(\eta) = \theta(v\xi + h\xi)\cdot\omega(\eta) = -[\omega(\xi),\ \omega(\eta)] + \Omega(\xi,\eta)$$

deci

$$\Omega(\xi,\eta) = \omega([\xi,\eta]) + [\omega(\xi),\ \omega(\eta)] \qquad 4.2$$

Să presupunem că algebra $\mathfrak{L}$ de automorfisme infinitezimale este *tranzitivă în proiecție* în punctul $z \in E$ adică diferențială *dp* a proiecției p aplică, în punctul z, algebra $\mathfrak{L}$ *pe* spațiul $T_x(V_n)$, $x = p(z) \in V_n$. Există atunci n cîmpuri în $\mathfrak{L}$, fie acestea $\xi_1, \ldots, \xi_n$ care sînt proiectate de *dp* pe n cîmpuri de vectori din V_n care alcătuiesc o bază pentru cîmpurile de vectori într-o anumită vecinătate $\mathfrak{V}$ a punctului $x = p(z)$. Dacă aplicăm formulei 4.2, scrisă pentru $\xi = \xi_i$, $\eta = \xi_j$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ operatorii $\theta_k = \theta(h\xi_k)$ și ținem seama de 2.3, obținem

$$\theta_{k_p}\ldots\theta_{k_1}\,\Omega(\xi_i,\xi_j) = \theta_{k_p}\ldots\theta_{k_2}\cdot\Omega(h\xi_{k_1},[\xi_i\,\xi_j]) + \theta_{k_p}\ldots\theta_{k_1}[\omega(\xi_i)\omega(\xi_,)].$$

Această formulă ne arată că

$$\mathfrak{M}_p(z) \subset \mathfrak{M}_{p-1}(z) + [\mathfrak{M}_{p-1}(z)\,\mathfrak{K}_z(\mathfrak{L})] + \sum_{r+s=p-2}[\mathfrak{M}_r(z)\,\mathfrak{M}_s(z)] \qquad 4.3$$

Să presupunem că

$$\mathfrak{M}_q(z) \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{K}_z(\mathfrak{L})) + \mathfrak{K}_z(\mathfrak{D}(\mathfrak{L})) \subset \mathfrak{K}_z(\mathfrak{L})$$

pentru $q < p$; $\mathfrak{D}(\ \ )$ reprezintă algebra derivată a algebrei scrisă între paranteze. Atunci, formula 4.3 ne spune că această incluziune are loc de asemenea pentru $q = p$. Cum pentru $q = 0$ ea rezultă din 4.2, se poate enunța

T e o r e m a 4.2. *Dacă algebra* $\mathfrak{L}$ de *automorfisme infinitezimale este tranzitivă în proiecție în punctul z din E atunci*

$$d\sigma_z' \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{K}_z(\mathfrak{L})) + \mathfrak{K}_z(\mathfrak{D}(\mathfrak{L})) \subset \mathfrak{K}_z(\mathfrak{L})$$

În aceleași condițiuni $\sigma_z' = \sigma_z^*$ (*grupul de olonomie locală în z*) [6], *și prin urmare*

$$d\sigma_z^* \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{K}_z(\mathfrak{L})) + \mathfrak{K}_z(\mathfrak{D}(\mathfrak{L})) \subset \mathfrak{K}_z(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{M}^0(d\sigma_z^*).$$

§ 5. Conexiuni invariante pe spații omogene de grupuri Lie

1°) Fie G un grup Lie conex și H un subgrup închis în G care nu posedă subgrupuri invariante în G. Fie $V = G/H$ spațiul omogen al claselor laterale la stînga $\{gH\}$, $g \in G$. Grupul G admite o structură de spațiu fibrat principal $P(G, V, \pi, H)$ de bază V, pe care H operează la dreapta, [7]*). Fie φ un izomorfism al grupului H pe un subgrup închis $\varphi(H) = \widetilde{H}$ al

*) p. 28.

unui grup Lie F. Să notăm cu $\tilde{\varphi}$ un homeomorfism diferențiabil al spațiului $P(G, V, \pi, H)$ într-un spațiu fibrat principal $E(V, p, F)$ având aceeași bază V și grupul structural F, astfel ca

$$\pi(u) = p(\tilde{\varphi}(u)),\ \tilde{\varphi}(uh) = D_{\varphi(h)} \cdot \tilde{\varphi}(u),\ u \in G,\ h \in H \qquad 5.1$$

Se poate face ca grupul G să opereze în E în modul următor : dacă $z \in E$ este astfel încît $z = \tilde{\varphi}(u)$, $u \in G$ să definim

$$gz = \tilde{\varphi}(gu), \qquad g \in G.$$

În caz contrar, există $y \in E$ și $f \in F$ astfel ca

$$z = D_f(y), \qquad y = \tilde{\varphi}(u), \qquad u \in G.$$

Vom defini atunci

$$gz = D_f(gy)$$

Această definiție nu depinde de alegerea elementului y căci, dacă

$$z = D_{f'}(y'),\ y' = \tilde{\varphi}(u'),\ u' \in G$$

u și u' au aceeași proiecție și $u' = uh$; 5.1 arată atunci că

$$ff'^{-1} = \varphi(h)$$

și deci

$$D_f(gy) = D_{\varphi(h)\cdot f'}(gy) = D_{f'} D_{\varphi(h)}(\tilde{\varphi}(gu)) = D_{f'}(\tilde{\varphi}(guh)) = D_{f'}(\tilde{\varphi}(gu')) = D_{f'}(gy').$$

Subgrupul H lasă invariantă fibra ce conține punctul $\tilde{\varphi}(e)$ și vom spune că H este *grupul de stabilitate* al punctului $x_0 = p(\tilde{\varphi}(e)) = \pi(e)$ în timp ce $\varphi(H) = \tilde{H}$ este *grupul de izotropie* al aceluiași punct.

Fie $\mathfrak{H}$ o conexiune pe E invariantă în raport cu operațiile lui G pe E. Atunci forma sa ω satisface ecuațiile

$$\omega_{\cdot z}(dg(X)) = \omega_z(X), \qquad X \in T(E),\ g \in G \qquad 5.2$$

Un automorfism infinitezimal al conexiunii, corespunzător grupului G se poate defini în felul următor : să considerăm un cîmp de vectori ξ invariant la dreapta pe G. Imaginea sa prin $d\tilde{\varphi}$ este un cîmp invariant la dreapta pe $\tilde{\varphi}(G)$ în virtutea relațiilor 5.1. Prin translatarea acestui cîmp pe E prin D_f, $f \in F$, se obține un automorfism infinitezimal proiectabil $\bar{\xi}$ al conexiunii. Aceste automorfisme alcătuiesc o algebră Lie $\bar{\mathfrak{G}}$ izomorfă cu algebra Lie $\mathfrak{G}$ a grupului G.

2°) Să considerăm acum un tensor t de tip $\mathfrak{R}(F)$ pe E cu valori într-un spațiu vectorial $\mathfrak{M}$. Pentru orice $X \in T(E)$

$$i(X) \nabla t = i(hX)\,dt = i(X)\,dt - i(vX)\,dt = \theta(X)t - \theta(vX) \cdot t$$

și din 1.8 rezultă

$$i(X) \nabla t = \theta(X)t + \tilde{\mathfrak{R}}(\omega(X)) \cdot t \qquad 5.3$$

Dacă X este un automorfism infinitezimal $\bar{\xi}$ atunci

$$i(\bar{\xi})\nabla t = \theta(\bar{\xi})t - \widetilde{\mathfrak{R}}(\varkappa(\bar{\xi}))\cdot t \qquad 5.4$$

Să presupunem că t este invariant prin transport, adică $\nabla t = 0$. $\theta(\bar{\xi})\cdot t$, pentru orice $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{G}}$ este un tensor (1.4) de asemenea invariant prin transport cum rezultă din teorema 2.3. Dacă pentru un punct $z_0 \in E$, $t(z_0)$ este invariant prin $\widetilde{\mathfrak{R}}(\mathfrak{K}_{z_0}(\bar{\mathcal{G}}))$ atunci 5.4 arată că $(\theta(\xi)\cdot t)_{z_0} = 0$ şi deci $\theta(\bar{\xi})\cdot t = 0$; t este deci un tensor invariant pe E prin operaţiile grupului G.

Să presupunem acum tensorul t invariant pe G adică $\theta(\bar{\xi})\cdot t = 0$ pentru orice $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{G}}$. Atunci ∇t este o 1-formă tensorială invariantă prin G pe E (teorema 2.3.). Dacă pentru un punct $z_0 \in E$, $t(z_0)$ este invariant prin $\widetilde{\mathfrak{R}}(\mathfrak{K}_{z_0}(\bar{\mathcal{G}}))$, atunci 5.4 arată că $(\nabla t)_{z_0} = 0$ căci, oricare ar fi $X_{z_0} \in T_{z_0}(E)$ se poate găsi un cîmp $\bar{\xi} \in \bar{\mathcal{G}}$ astfel ca

$$X_{z_0} = \bar{\xi}_{z_0} + V_{z_0}$$

V_{z_0} fiind un vector vertical în z_0. Atunci

$$(i(X)\nabla t)_{z_0} = (i(hX)dt)_{z_0} = (i(h\bar{\xi})dt)_{z_0} = (i(\bar{\xi})\nabla t)_{z_0} = 0$$

Din cauză că G operează tranzitiv în proiecţie rezultă că $\nabla t = 0$. În ambele ipoteze de mai sus, se obţine deci $\nabla t = 0$ şi $\theta(\xi)t = 0$ şi deci din 5.4 rezultă că $\widetilde{\mathfrak{R}}(\mathfrak{K}_z(\bar{\mathcal{G}}))\cdot t(z) = 0$ pentru orice $z \in E$. Putem enunţa deci (a se vedea [4], teorema 3) următoarea

Teoremă 5.1. *Fie $E(G/H, p, F)$ un spaţiu fibrat principal în care operează tranzitiv în proiecţie grupul Lie G şi să presupunem că pe E este definită o F-conexiune invariantă prin G. Fie în plus t un tensor de tip $\mathfrak{R}(F)$ definit pe E cu valori într-un spaţiu vectorial. Dacă t satisface două din următoarele condiţii, o satisface şi pe a treia*

a. *t este invariant prin G*
b. *t este invariant prin transport*
c. *$t(z_0)$ este invariant prin $\widetilde{\mathfrak{R}}(\mathfrak{K}_{z_0}(\bar{\mathcal{G}}))$ într-un punct arbitrar $z_0 \in E$.*

3°) Ca şi în cazul conexiunilor liniare (a se vedea [4], teorema 2) este posibil, cu ajutorul operaţiilor grupului G în E şi cu ajutorul transportului să se stabilească izomorfisme între grupurile lui Kostant asociate diferitelor puncte ale spaţiului omogen.

Să observăm că din 5.2 rezultă că subalgebrele $\mathfrak{K}_z(\bar{\mathcal{G}})$ şi $\mathfrak{K}_{iz}(\bar{\mathcal{G}})$ ale algebrei $\mathfrak{F}$ coincid, căci

$$\varkappa_z(\bar{\xi}) = \varkappa_{iz}(dg(\bar{\xi}))$$

Dacă $g\cdot z = D_f(z)$ teorema 3.1 arată că

$$\mathfrak{K}_{gz}(\bar{\mathcal{G}}) = (\mathrm{adj}\cdot f^{-1})(\mathfrak{K}_z(\bar{\mathcal{G}})) = \mathfrak{K}_z(\bar{\mathcal{G}}).$$

Dar $gz = D_f(z)$ implică $f = \varphi(h)$, $h \in H$ şi deci *grupul de izotropie $\widetilde{H}$ al unui punct este conţinut în normalizatorul grupului lui Kostant în grupul structural.*

4°) Vom demonstra acum că dacă z și $\dot{z}$ aparțin aceluiași *drum orizontal* $l_{z\dot{z}}$ algebrele $\mathfrak{K}_z(\bar{\mathcal{G}})$ și $\mathfrak{K}_{\dot{z}}(\bar{\mathcal{G}})$ se identifică cu aceeași subalgebră din $\mathfrak{F}$.

Fie $x = p(z)$, $\dot{x} = p(\dot{z})$ și $l_{x\dot{x}}$ proiecția în V a drumului $l_{z\dot{z}}$. Fie în plus $l_{zz'}$ un drum care se proiectează pe $l_{x\dot{x}}$ și este conținut în orbita $G\cdot z$ a punctului z : deci $z' = gz$ și $\dot{z} = D_f z'$. Atunci, transportul $t_{l_{zz}}$. de-a lungul drumului $l_{z\dot{z}}$ al unui tensor de tip $\mathfrak{R}(F)$ poate fi înlocuit cu $\mathfrak{R}(f^{-1})_0 t_{l_{zz'}}$ ($t_{l_{zz'}}$ este transportul de-a lungul drumului $l_{zz'}$) ; în particular dacă $\varkappa \in \mathfrak{K}_z(\bar{\mathcal{G}})$

$$\varkappa = t_{l_{z\dot{z}}}(\varkappa) = (\mathrm{adj}.\, f^{-1})_0 t_{l_{zz'}}(\varkappa)$$

Vom demonstra că $t_{l_{zz'}}(\varkappa) \in \mathfrak{K}_{z'}(\bar{\mathcal{G}})$; va rezulta, ținînd seama de teorema 3.1, că $(\mathrm{adj}.\, f^{-1}) \circ t_{l_{zz'}}(\varkappa) = \varkappa$ este un element al algebrei $\mathfrak{K}_{\dot{z}}(\bar{\mathcal{G}})$ și deci $\mathfrak{K}_z(\bar{\mathcal{G}}) \subset \mathfrak{K}_{\dot{z}}(\bar{\mathcal{G}})$. Schimbînd z cu $\dot{z}$ se obține rezultatul anunțat.

Fie $\varkappa(t)$ valoarea obținută din $\varkappa$ prin transport de-a lungul drumului $l_{zz'}$ în punctul $y(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ y(0) = z,\ y(1) = z')$ al acestui drum. Ea satisface ecuația obținută din 5.3

$$\frac{\nabla \varkappa(t)}{dt} = \frac{d\varkappa(t)}{dt} + \left[\omega\left(\frac{dy}{dt}\right),\ \varkappa(t)\right] = 0. \qquad 5.5$$

În punctul $y(t)$ al drumului $l_{zz'} \subset G\cdot z$ vectorul dy/dt coincide cu valoarea în același punct al unui automorfism infinitezimal $\bar{\xi}$. Deci $-\omega\left(\frac{dy}{dt}\right)$ este un element din $\mathfrak{K}_{y(t)}(\bar{\mathcal{G}})$ care, conform celor spuse la 3°, poate fi identificat cu un element $\chi(t)$ din $\mathfrak{K}_z(\bar{\mathcal{G}})$ sau din $\mathfrak{K}_{z'}(\bar{\mathcal{G}})$. Soluția sistemului 5.5 poate fi scrisă atunci

$$\varkappa(t) = (\mathrm{adj}\ k(t))\cdot\varkappa \qquad 5.6$$

unde $k(t)$ este elementul grupului $K_z(\bar{\mathcal{G}}) = K_{z'}(\bar{\mathcal{G}})$ soluție a sistemului diferențial

$$\frac{dk}{dt} = (e + \chi(t))\,k(t)$$

cu condițiile inițiale $k(0) = e$.

Într-adevăr, presupunînd $\varkappa(t)$ de forma 5.6

$$d\varkappa(t) = d(\mathrm{adj}\cdot k(t))\cdot\varkappa = d(\mathrm{adj}\cdot k(t))\,(\mathrm{adj}\cdot k(t))^{-1}\cdot\varkappa(t) =$$
$$= (\widetilde{\mathrm{adj}}\cdot(dk\,k^{-1}))\cdot\varkappa(t) = [dk(t)\,k^{-1}(t), \varkappa(t)].$$

În particular $\varkappa(1) = t_{l_{zz'}}(\varkappa) = (\mathrm{adj}\cdot k(1))\,\varkappa \in \mathfrak{K}_{z'}(\bar{\mathcal{G}})$ căci $\varkappa \in \mathfrak{K}_{z'}(\bar{\mathcal{G}})$ $k(1) \in K_{z'}(\bar{\mathcal{G}})$.

Să presupunem $x' = x$. Atunci f este un element al grupului de olonomie $\Psi_z(E)$ și

$$\mathfrak{K}_{\dot{z}}(\bar{\mathcal{G}}) = (\mathrm{adj}\cdot f^{-1})(\mathfrak{K}_z(\bar{\mathcal{G}})) = \mathfrak{K}_z(\bar{\mathcal{G}})$$

Deci, $\Psi_z(E)$ este conținut în $N(K_z(\bar{\mathcal{G}}))$, normalizatorul grupului $K_z(\bar{\mathcal{G}})$ în F. Aceste rezultate conduc la următoarea

Teoremă 5.2. *Fie $E(G/H, p, F)$ un spaţiu fibrat principal în care operează tranzitiv în proiecţie grupul Lie G şi fie $\mathfrak{H}$ o F-conexiune invariantă prin G.*

Dacă punctele $z, z' \in E$ au proprietatea $z' = gz$ sau dacă z' poate fi legat cu punctul z printr-un drum orizontal, atunci $\mathfrak{K}_z(\overline{\mathfrak{H}})$ şi $\mathfrak{K}_{z'}(\overline{\mathfrak{H}})$ coincid cu aceeaşi subalgebră din $\mathfrak{F}$. În particular grupurile de izotropie $\widetilde{H}$ şi de olonomie $\Psi(E)$ ale spaţiului sînt conţinute în normalizatorul $N(K(\overline{\mathfrak{H}}))$ al grupului lui Kostant în F.

5°) În încheiere vom arăta că în cazul particular al conexiunilor liniare pe spaţiul fibrat $E(V_n)$ al reperilor liniari asociaţi unei varietăţi diferenţiabile V_n grupul de transformări liniare ale spaţiului $T_x(V_n)$, $x \in V_n$ definit de grupurile $K_z(\overline{\mathfrak{L}})$, $z \in p^{-1}(x)$, coincide cu grupul $K_x(\mathfrak{L})$, $\mathfrak{L} = dp(\overline{\mathfrak{L}})$, definit de A. Lichnerowicz în [4]. Pentru aceasta vom folosi o secţiune locală a spaţiului $E(V_n)$ asociată unei vecinătăţi de coordonate $U(x^1, \ldots, x^n)$ din V_n. Pentru fiecare punct $x \in U$ fie $\{e_j(x)\}$, $i, j = 1, \ldots, n$ vectorii din $T_x(V_n)$ pentru care $dx^i(e_j(x)) = \delta^i_j$; aceştia definesc o secţiune locală $R : U \to p^{-1}(U)$, $p(R(x)) = x$, în $E(V_n)$. Se pot introduce astfel coordonate (x^i, x^i_j), $\det \| x^i_j \| \neq 0$ în $p^{-1}(U)$, x^i fiind coordonatele punctului $x = p(z) \in U$ şi x^i_j coordonatele vectorilor de bază e_j ai reperului z în raport cu reperul $R(x)$; $p^{-1}(U)$ se reprezintă astfel ca un produs local $U \times Gl(n, R)$.

Un homeomorfism diferenţiabil $x \to f(x)$ al vecinătăţii U induce un homeomorfism diferenţiabil $\overline{f}$ al vecinătăţii $p^{-1}(U)$; imaginea $\overline{f}(R(x))$ a reperului $R(x)$, $x \in U$ prin această aplicaţie este reperul din $T_{f(x)}(V_n)$ ai cărui vectori de bază $df(e_j(x))$ au componentele $\partial f^i(x)/\partial x^j$ în raport cu reperul $R(f(x))$. Deci, dacă ξ este o transformare infinitezimală în V_n aceasta induce o transformare infinitezimală $\overline{\xi}$ în $E(V_n)$ ale cărei componente în raport cu sistemul de coordonate din $p^{-1}(U)$ în punctele secţiunii $R(U)$ sînt $(\xi^i, \partial\xi^i/\partial x^j)$.

Fie ϖ restricţia la $R(U)$ a formei ω care defineşte o conexiune infinitezimală Γ în $E(V_n)$. Pentru un cîmp $\xi \in T(V_n)$ fie $\varpi^i_j(x) = \Gamma^i_{jr}(x)\,\xi^r(x)$, $x \in U$, componentele vectorului $\varpi(dR(\xi))$ al algebrei grupului $Gl(n, R)$. Deoarece în punctele secţiunii $R(U)$, $\overline{\xi}$ poate fi descompus în suma cîmpurilor $\overline{\xi} - dR(\xi)$ de componente $(0, \partial\xi^i/\partial x^j)$ şi $dR(\xi)$ de componente $(\xi^i, 0)$ rezultă

$$(\varkappa_{R(x)}(\overline{\xi}))^i_j = (-\omega_{R(x)}(\overline{\xi}))^i_j = -\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jr}\,\xi^r\right).$$

Să reproducem acum definiţia grupului $K_x(\mathfrak{L})$ dată în [4]. Se consideră pentru aceasta conexiunea $\overline{\Gamma}$ denumită *asociată cu* Γ care are aceleaşi geodezice ca şi Γ (cu acelaşi parametru afin) dar torsiunea de semn schimbat, adică

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} + \overline{\Gamma}^i_{kj} = \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}, \quad \overline{\Gamma}^i_{jk} - \overline{\Gamma}^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}.$$

Rezultă că $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Grupul $K_x(\mathfrak{L})$ este prin definiție subgrupul grupului de automorfisme ale spațiului $T_x(V_n)$ a cărui algebră Lie este generată de endomorfismele

$$(A_\xi)^i_j = -\overline{\nabla}_j \xi^i \qquad \xi \in \mathfrak{L}$$

ale spațiului $T_x(V_n)$, $\overline{\nabla}$ fiind operatorul de derivare covariantă relativ la conexiunea $\overline{\Gamma}$. Ținînd seama însă de 5.3.

$$-\overline{\nabla}_j \xi^i = -\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \overline{\Gamma}^i_{rj}\,\xi^r\right) = -\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jr}\,\xi^r\right) = (\varkappa_{R(x)}(\overline{\xi}))^i_j$$

și prin urmare cele două definiții coincid.

ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ И ГОЛОНОМИЯ В ТЕОРИИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

РЕЗЮМЕ

Работа содержит исследование связи между группой автоморфизмов и группой голономии пространства с инфинитезимальной связностью группы Ли, обобщающее ряд результатов относительно теории линейных связностей, аннонсированных А. Лихнеровичем в [4].

DÉRIVÉES DE LIE ET HOLONOMIE DANS LA THÉORIE DES CONNEXIONS INFINITÉSIMALES

RÉSUMÉ

Le travail comprend une étude des rapports existant entre le groupe d'automorphismes et le groupe d'holonomie d'un espace à connexion infinitésimale de groupe de Lie, qui généralisent une série de résultats relatifs à la théorie des connexions linéaires annoncés par A. Lichnerowicz dans [4].

BIBLIOGRAFIE

1. BUCHIN-SU, *Lie derivation in the geometry of normal conformal connections*, Science Record, **2**, 1949.
2. CARTAN H., *Notions d'algèbre différentielle, applications aux variétés, aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie*, Colloque de topologie, Bruxelles, 1950.

3. KOSTANT B., *Holonomy and the Lie algebra of infinitesimal motions of a Riemann manifold*, Trans. Amer. Math. Soc., **80**, 528—542 (1955).
4. LICHNEROWICZ A., *Transformations affines et holonomie*, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, **244**, 1868 (1957).
5. — *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Roma (1955).
6. OZEKI H., *Infinitesimal holonomy groups of bundle connections*, Nagoya Math. J., *10* June (1956).
7. STEENROD N., *The topology of fibre bundles*, Princeton (1951).
8. VRĂNCEANU G., *Leçons de géométrie différentielle*, **II**, Bucarest (1957).
9. HANGAN TH., *Automorphismes infinitésimaux et holonomie*, C.R., Paris, **247**, 411 (1958).

CLASELE CARACTERISTICE ŞI CLASELE CANONICE ALE UNEI VARIETĂŢI ALGEBRICE *)

DE

I. BUCUR şi AL. LASCU

1. **Introducere.** Scopul lucrării de faţă este de a studia un nou procedeu de construire a claselor lui C h e r n, ale unei varietăţi complexe compacte, iniţiat de B. S e g r e pentru clasele canonice ale unei varietăţi algebrice şi de a da o nouă demonstraţie a faptului că, pe o varietate algebrică, clasele canonice sînt formate din ciclii aparţinînd claselor caracteristice C h e r n.

În [6] B e n i a m i n o S e g r e a dat un procedeu de a obţine clasele canonice ale unei varietăţi algebrice nesingulare (proiective complexe) V, conjecturînd că, pe aceeaşi cale, se pot obţine şi clasele lui S t i e f e l-W h i t n e y ale unei varietăţi diferenţiabile compacte. Acest fapt a fost dovedit în [3]. În lucrarea de faţă arătăm că procedeul lui S e g r e, aplicat unei varietăţi complexe, furnizează clasele caracteristice ale lui C h e r n. În acest mod procedeul *lui Segre constituie un algoritm uniform după care, operînd în inelele corespunzătoare ale spaţiilor considerate, se obţin clasele canonice, clasele caracteristice Chern şi clasele Stiefel-Whitney.*

Un asemenea algoritm a fost recent indicat de A. G r o t h e n d i e c k [4] într-o axiomatizare a claselor caracteristice, făcută pe o altă cale, care este însă în strînsă legătură cu algoritmul lui S e g r e, după cum se poate vedea uşor. Într-adevăr acelaşi fapt esenţial stă la baza celor două metode. Este rolul particular jucat de clasele caracteristice ale unei structuri fibrate algebrice**), unitare sau ortogonale, $\mathfrak{F}$ cu baza B şi fibra A^n, în structura inelului de echivalenţă raţională (respectiv a inelului de coomologie cu coeficienţi întregi sau întregi modulo 2) a spaţiului fibrat P, obţinut ca spaţiul structurii asociate cu $\mathfrak{F}$ cu fibra spaţiul proiectiv al dreptelor din A.

---

*) Acest articol va apărea în limba engleză în «Revue de mathématiques pures et appliquées» no. 1/1960.

**) Clasele caracteristice ale unei structuri fibrate algebrice avînd ca bază o varietate algebrică proiectivă peste un corp oarecare au fost definite de G. W a s h n i t z e r [7] după metoda lui S e g r e.

Anume fie $\mathfrak{U}$ structura fibrată (algebrică, unitară, ortogonală) cu baza P, fibra dreaptă proiectivă şi τ clasa caracteristică a lui $\mathfrak{U}$ iar $\mathcal{A}(P)$, $\mathcal{A}(B)$ inelele respective asociate spaţiilor P şi B. Fie $\gamma_i \in \mathcal{A}(B)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ clasele caracteristice ale lui $\mathfrak{F}$. Inelele $\mathcal{A}(P)$, $\mathcal{A}(B)$ sînt comutative pentru cazul algebric sau ortogonal iar în cazul unitar τ (avînd dimensiunea 2) aparţine centrului lui $\mathcal{A}(P)$. Notînd $\pi : \mathcal{A}(B) \to \mathcal{A}(P)$ omomorfismul asociat proiecţiei $P \to B$, avem următorul rezultat stabilit de Wu şi Hirsch pentru structurile fibrate ortogonale şi unitare şi enunţat de Grothendieck pentru cazul algebric :

π este monomorfism. $\mathcal{A}(P)$ este extinderea algebrică simplă a lui $\pi(\mathcal{A}(B))$ obţinută prin adjuncţionarea elementului τ cu condiţia

$$\tau^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \pi(\gamma_i)\tau^{n-i} = 0.$$

În ceea ce urmează vom considera exclusiv varietăţi algebrice nesingulare (proiective complexe) pe care le vom denumi pe scurt varietăţi algebrice. Fie V o varietate algebrică, $\mathfrak{A}(V)$ inelul de echivalenţă raţională al lui V şi $\mathcal{H}(V)$ inelul de intersecţie al lui V ; fie $\gamma \in \mathfrak{A}(V)$ o clasă de echivalenţă raţională de reprezentant ciclul $C \in \gamma$. Definiţia echivalenţei raţionale formulată de P. Samuel în [5] arată că asociind lui γ clasa de omologie $\varphi(\gamma)$ definită de C se obţine un omomorfism canonic

$$\varphi : \mathfrak{A}(V) \to \mathcal{H}(V)$$

Comutativitatea evidentă a unor diagrame dovedeşte în încheiere că *algoritmul lui Segre aplicat inelelor de intersecţie este imaginea prin φ a algoritmului lui Segre aplicat inelelor de echivalenţă raţională.* Prin urmare clasele caracteristice ale unei varietăţi algebrice sînt imaginile prin φ ale claselor canonice respective. Obţinem astfel o nouă demonstraţie a „coincidenţei" dintre clasele caracteristice şi clasele canonice.

Notaţii :

Exceptînd § 3 V = varietate algebrică n — dimensională fără singularităţi din spaţiul proiectiv complex P^m ;
P^l = spaţiul proiectiv complex în care este realizată cu ajutorul coordonatelor plückeriene, varietatea lui Grassmann a dreptelor din P^m ;
$V \times V$ = modelul lui Segre al produsului cartezian $V \times V$;
Δ = diagonala lui $V \times V$;
$\mathcal{H}(T)$, $\mathcal{H}^*(T)$ inelul de intersecţie respectiv de coomologie cu coeficienţi întregi al varietăţii T ;
$\partial_T : \mathcal{H}(T) \to \mathcal{H}^*(T)$ izomorfismul de trecere la dual ; $H_i(P)$, $H^i(P)$ grupurile de omologie respectiv de coomologie cu coeficienţi întregi ale lui P.

2. **Dilatarea diagonalei lui $V \times V$. Definiţie.** Fie V, V', W, W' varietăţi algebrice cu $V \supset W$, $V' \supset W'$, $n = \dim V = \dim V'$, $\dim W' = n - 1$, $\dim W = m$ iar $p : (V', W') \to (V, W)$ aplicaţie birаţională. Se zice că $p : (V', W') \to (V, W)$ este o dilatare a lui V de bază W dacă

1° p este peste tot regulată pe V'

2° p aplică biregulat $V' \setminus W'$ pe $V \setminus W$

3° pentru orice $x \in W$, $p^{-1}(x)$ este un spaţiu proiectiv de dimensiune $n - m - 1$.

Definiţii analoage se dau pentru dilatarea varietăţilor analitice şi diferenţiabile. Primul pas în procedeul lui S e g r e este o dilatare a lui $V \times V$ de bază Δ. O astfel de dilatare se poate obţine după cum urmează. Fie $\bar{x}, \bar{y} \in V$ puncte generice algebric independente şi $\bar{d}$ dreapta prin $\bar{x}, \bar{y}$. Considerăm varietatea algebrică din spaţiul multiproiectiv $P^m \times P^m \times P^l$ definită de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{d})$ ca punct generic. Notăm cu $V \star V$ varietatea algebrică realizată de această varietate pe modelul proiectiv al lui Segre al produsului $P^m \times P^m \times P^l$. Spaţiul topologic al lui $V \star V$ pe care îl vom nota tot $V \star V$ este

$$V \star V = \{(x, y, d) \mid x \in V,\ y \in V,\ d = \text{dreapta din } P^m$$

determinată de x, y dacă $x \neq y$ sau o dreaptă oarecare din P^m tangentă în x la V dacă $x = y\}$

Fie $p : V \star V \to V \star V$ definită prin $p\,[(x, y, d)] = (x, y)$. Pentru orice $x \in V$, $p^{-1}[(x, x)]$ este mulţimea punctelor $(x, x, d) \in V \star V$ în care d descrie spaţiul proiectiv P_x^{n-1} al dreptelor din P^m tangente în x la V. Este uşor de stabilit următoarea

L e m ă. $p : (V \star V, D) \to (V \times V, \Delta)$, $D = p^{-1}\Delta$, *este o dilatare a lui* $V \times V$ *de bază* Δ *).

Vom face cîteva consideraţii asupra spaţiilor D, $V \star V$ utile în ceea ce urmează. Fie $q : V \star V \to V$ aplicaţia definită prin $q\,[(x, y, d)] = x.D$ are o structură de spaţiu fibrat cu baza V proiecţia $\pi = q \mid D$ şi fibra P^{n-1}; evident structura fibrată $\mathfrak{F} = (D, \pi, V)$ astfel obţinută este structura fibrată cu fibra P^{n-1} asociată cu structura tangentă $\mathfrak{T}$ a lui V.

Pe D ca bază se construieşte în mod natural un spaţiu fibrat U avînd ca fibră dreapta proiectivă P^1.

Notăm cu $\mathfrak{U} = (U', \gamma, D, A^1, U(1))$ unde A^1 este spaţiul unitar de dimensiune 1, structura fibrată unitară asociată cu structura astfel obţinută şi cu $\tau = C^2(\mathfrak{U}) \in H^2(D)$ clasa caracteristică C h e r n a lui $\mathfrak{U}$.

Fie $\chi : \mathcal{K}(V \star V) \to \mathcal{K}(D)$ omomorfismul invers al lui H o p f asociat aplicaţiei de incluziune $D \to V \star V$.

Dacă $x \in \xi \in \mathcal{K}(V \star V)$ iar x şi D se află în poziţie generică pe $V \star V$ atunci

$$x \circ D \in \chi(\xi)$$

(unde „$\circ$" reprezintă intersecţia) şi aceasta defineşte pe χ. În particular, dacă δ este clasa lui D în $\mathcal{K}(V \star V)$ şi $D' \in \delta$ se află în poziţie generică pe $V \star V$ cu D,

$$\chi(\delta) = \theta \qquad \text{cu} \qquad D' \circ D \in \theta$$

În general,

$$D_r \circ D_{r-1} \circ \ldots \circ D_1 \circ D \in \chi(\delta^r) = \theta^r \qquad (1)$$

cu $D_i \in \delta$ în poziţie generică cu $D_{i-1} \circ \ldots \circ D_1 \circ D$ pe $V \star V$.

*) O analiză a lui $V \star V$ împreună cu determinarea structurii sale omologice aditive se găseşte în [2]; dilatarea p este utilizabilă şi în cazul varietăţilor diferenţiabile compacte [3].

Se poate vedea că structura fibrată $\mathcal{U}$ este izomorfă cu structura fibrată normală definită de scufundarea $D \to V \star V$. Aceasta implică

$$\partial_D \theta = \tau \qquad (\partial_D : \mathcal{H}(D) \to \mathcal{H}^\star(D))$$

Observaţie. Consideraţiile din această secţiune, fără consideraţiile de algebricitate, sînt adevărate şi pentru cazul în care V este varietate analitică complexă compactă (considerînd o scufundare analitică a sa în P^m).

3. Algoritmul lui Segre de construire a claselor caracteristice Chern. În acest § 3, V este varietate complexă de dimensiune n scufundată analitic în P^m.

Fie $\pi_\star : \mathcal{H}(D) \to \mathcal{H}(V)$, şi $q_\star : \mathcal{H}(V \star V) \to \mathcal{H}(V)$, omomorfismele de grup definite de π, q şi

$$\pi_\star(\theta^{n-1+k}) = \eta_{2n-2k} \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

Din (1) rezultă

$$q_\star(\delta^{n+k}) = \eta_{2n-2k} \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

Definim clasele $\xi_{2i} \in H_{2i}(V)$ recurent prin

$$\begin{cases} \xi_{2n} = 1 \\ \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \, \xi_{2n-2j} \circ \eta_{2n-2i+2j} = 0 \end{cases} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

T e o r e m ă. *ξ_{2i} este clasa lui Chern $C_{2i}(\mathfrak{T})$ a structurii tangente $\mathfrak{T}$ a varietăţii V.*

Demonstraţie. Diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} H_{r-i}(D) & \xrightarrow{\pi_\star} & H_{r-i}(V) \\ \downarrow \partial_D & \psi & \downarrow \partial_V \\ H^i(D) & \longrightarrow & H^{i-2n+2}(V) \end{array} \qquad r = 4n-2$$

pune în evidenţă omomorfismul ψ de integrare pe fibră în $\mathfrak{P}' = (D, \pi, V)$. Conform unui rezultat cunoscut [8] fibra P^{n-1} este total neomoloagă cu zero în D. Aplicînd teorema lui L e r a y-H i r s c h [1] rezultă că orice element α din $\mathcal{H}^\star(D)$ poate fi pus în mod unic sub forma

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \pi^\star(a_i) \cup \tau^i$$

(unde $\pi^\star : \mathcal{H}^\star(V) \to \mathcal{H}^\star(D)$ este omomorfismul asociat cu π) şi avem $\psi(\alpha) = a_{n-1}$. Ţinînd seama că $\partial_D \theta = \tau$, din diagrama considerată rezultă $\psi(\tau^{n-1+k}) = \partial_V \eta_{2n-2k}$ deci, conform cu cele de mai sus, punînd $\eta^{2k} = \partial_V \eta_{2n-2k}$,

$$\tau^{n-1+k} = \pi^\star(\eta^{2k}) \cup \tau^{n-1} + \sum_{j=2}^{n} \pi^\star(a_{kj}) \cup \tau^{n-j} \qquad (k \geqslant 0) \qquad (2)$$

Pentru a continua demonstrația vom folosi formula lui Wu-Hirsch, [8], după care în $\mathcal{H}^*(D)$ avem

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\,\pi^*(C^{2i})\cup\tau^{n-i}=0\quad,\qquad C^{2i}=C^{2i}(\mathcal{F})=\partial\ C_{2n-2i}(V)$$

Conform acestei formule $\tau^n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\pi^*(C^{2i})\cup\tau^{n-1}$; înmulțind cu τ^{j-1} obținem $\tau^{n+j-1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\ \pi^*(C^{2i})\cup\tau^{n-i+j-1}$.

Înlocuind $\tau^{n-i+j-1}$ pentru $j\geqslant i$ cu expresia sa (2)

$$\tau^{n+j-i}=\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+1}\pi^*(C^{2i}\cup\eta^{2j-2i})\cup\tau^{n-1}+\sum_{h=2}^{n}\pi^*(b_h)\cup\tau^{n-h}$$

prin urmare $\eta^{2j}=\psi(\tau^{n+j-1})=\sum_{i=1}^{j}(-1)^{i+1}C^{2i}\cup\eta^{2j-2i}$ de unde deoarece $C^0=1$, $\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\,C^{2i}\cup\eta^{2j-2i}=0$. Trecînd la dual $\sum_{i=0}^{j}(-1)^iC_{2n-2i}\circ\eta_{2n-2j+2i}=0$. Cum $C_{2n}=1$ și sistemul de difiniție al claselor ξ_{2i} are soluție unică, rezultă $C_{2i}=\xi_{2i}$. *c.c.t.d*

4. **Relația dintre clasele caracteristice și clasele canonice.** Fie $\overline{\pi}:\mathfrak{A}(D)\to\mathfrak{A}(V)$ omomorfismul grupurilor aditive ale inelelor $\mathfrak{A}(D)$, $\mathfrak{A}(V)$ asociat proiecției $\pi:D\to V$ și analog $\overline{q}:\mathfrak{A}(V\star V)\to\mathfrak{A}(V)$ pentru $q:V\star V\to V$. Fie $\overline{\chi}:\mathfrak{A}(V\star V)\to\mathfrak{A}(D)$ omomorfismul asociat aplicației de incluziune $D\to V\star V$. Fie $\overline{\delta}$ clasa lui D în $\mathfrak{A}(V\star V)$ și $\overline{q}(\overline{\delta}^{n+k})=\overline{\eta}_{n-k}\ (0\leqslant k\leqslant n)$. După Segre, clasele $\overline{\eta}_{n-k}$ se numesc covarianți de imersiune ai lui Δ în $V\star V$. Clasele canonice prin metoda lui Segre sînt definite de sistemul

$$\begin{cases}\overline{\xi}_n=1\\ \sum_{j=0}^{i}(-1)^j\overline{\xi}_{n-j}\circ\overline{\eta}_{n-i+j}=0\end{cases}$$

(indicii inferiori indică dimensiunea complexă).

Propoziție. *Fie $\varphi:\mathfrak{A}(V)\to\mathcal{H}(V)$ omomorfismul canonic al inelului de echivalență rațională al varietății V în inelul de intersecție $\mathcal{H}(V)$. Fie $\overline{\xi}_i\ (0\leqslant i\leqslant n)$ clasele canonice ale lui V, $\overline{\eta}_i$ covarianții de imersiune $\Delta\to V\times V$ și $C_{2i}(\mathcal{F})$ clasele caracteristice Chern ale structurii tangente $\mathcal{F}$ a lui V, $\widetilde{C}_{2i}(\mathcal{F})$ clasele lui Chern duale. Avem*

$$\varphi(\overline{\xi}_i)=C_{2i}(\mathcal{F})$$
$$\varphi(\overline{\eta}_i)=\widetilde{C}_{2i}(\mathcal{F})$$

Demonstraţia este imediată după teorema precedentă ţinînd seama de comutativitatea vizibilă a următoarei diagrame

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}(V \star V) & \xrightarrow{\bar{q}} & \mathfrak{A}(V) \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{H}(V \star V) & \xrightarrow{\bar{q}_*} & \mathcal{H}(V) \end{array}$$

în care φ_1 şi φ sînt omomorfisme de inel.

Observaţia 1. Consideraţiile de la § 2 relative la χ, valabile şi pentru $\bar{\chi}$ arată că formula (1) este adevărată şi pentru $\bar{\chi}$ de unde, punînd $\bar{\theta} = \bar{\chi}(\delta)$, avem

$$\bar{\pi}(\bar{\theta}^{n-1+k}) = \bar{\eta}_{n-k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

2. Fie V' o subvarietate a lui V. Extinzînd în mod vizibil consideraţiile de la § 2 se poate vorbi de $V' \star V$; $p' = p \mid V' \star V$ constituie o dilatare a lui $V \times V$ de bază $\Delta' = (V' \times V) \cap \Delta$. Notînd $\bar{\eta}_i'$, $\bar{\xi}_i' \in \mathfrak{A}(V')$ clasele construite ca la § 4 pentru acest caz rezultă

$$\varphi'(\bar{\xi}_i') = C_{2i}(\mathcal{T}')$$
$$\varphi'(\bar{\eta}_i') = \widetilde{C}_{2i}(\mathcal{T}')$$

unde $\varphi' : \mathfrak{A}(V') \to \mathcal{H}(V')$ iar $\mathcal{T}'$ este structura fibrată $\mathcal{T}/V'$ indusă pe V' de structura tangentă la V.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ И КАНОНИЧЕСКИЕ КЛАССЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

РЕЗЮМЕ

Пусть $\mathfrak{A}(V)$ — кольцо Чжоу проективного многообразия V без особенностей над полем комплексных чисел и $\mathcal{H}(V, Z)$ — его целочисленное кольцо гомологий. Используя понятие дилатации многообразия определяются классы Чженя многообразия V как элементы кольца $\mathcal{H}(V, Z)$. Авторы доказывают, что образы канонических классов при гомоморфизме

$$\varphi : \mathfrak{A}(V) \longrightarrow \mathcal{H}(V, Z)$$

совпадают с классами Чженя касательно пучка многообразия V.

CLASSES CARACTÉRISTIQUES ET CLASSES CANONIQUES D'UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE

RÉSUMÉ

Soit $\mathfrak{A}(V)$ l'anneau de Chow d'une variété projective V, sans singularités, sur le corps des nombres complexes, et $\mathcal{H}(V,Z)$ son anneau d'homologie par rapport à l'anneau des nombres entiers. La notion de dilatation d'une variété a permis aux auteurs de définir les classes de Chern de la variété V comme des éléments de l'anneau $\mathcal{H}(V,Z)$. Ils ont démontré que l'image des classes canoniques par l'homomorphisme

$$\varphi : \mathfrak{A}(V) \longrightarrow \mathcal{H}(V, Z)$$

coïncide avec les classes de Chern de la structure tangente de la variété V.

BIBLIOGRAFIE

1. A. BOREL, F. HIRZEBRUCH, *Characteristic classes and homogenous spaces.* I. American Journal of Mathematics, **LXXX**, *2*, 458–538 (1958).
2. I. BUCUR, A. LASCU, *Sur une fibration associée à une variété algébrique.* Revue de Math., **IV**, *2*, 287–294 (1959).
3. I. BUCUR, A. LASCU, *Les classes de Segre d'une variété différentiable*, Revue de Math. **IV**, *4* (1955).
4. A. GROTHENDIECK, *La théorie des classes de Chern.* Bull. de la Soc. Math. de France, **86**, *2*, 137–154 (1958).
5. P. SAMUEL, *Rational equivalence of arbitrary cycles.* American Journal of Mathematics, **LXXII**, *2*, 383–399 (1956).
6. B. SEGRE, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle variétà algebriche.* Ann. di Mat., **35**, *4*, 1–128 (1953).
7. G. WASCHNITZER, *The caracteristic classes of an algebraic fiber bundle.* Proc. of Nat. Ac. of Sc. U.S.A., **I**, *42*, No. 7, 433–436 (1956) July.
8. WU VEN-TSUN, *On pontrjagin classes I.* Acta Sinica, **III**, *4*, 353–367, December (1954).

LEMA LUI KRULL ȘI STRUCTURA INELELOR

DE

N. RADU

În 1926 Emmy Noether a fundat pentru prima dată axiomatic o teorie clasică a idealelor în inelele comutative, dînd totodată și un cadru exhaustiv sistemului de axiome. În această direcție un pas important, pe linia reducerii sistemului de axiome, l-au făcut matematicienii japonezi, K. Kubo [1], K. Matusita [2], Y. Akizuki și K. Asano [3].

Un rezultat hotărîtor în această direcție îl constituie următoarea teoremă [3]:

Într-un inel comutativ O cu element unitate, cu limitare maximală pentru ideale și în care: 3) pentru orice ideal nedivizibil P intervalul $P > P^2$ este prim relativ la intercalarea de ideale, orice ideal se descompune în produs de ideale prime.

În această teoremă se introduc două ipoteze de finitudine: bază finită pentru ideale și faptul că intervalul $P > P^2$ este prim. Mai jos se arată că prima dintre aceste ipoteze poate fi înlocuită cu următoarele două:

1) Pentru orice ideal A $(A < O)$ există un număr finit de ideale prime P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, astfel încît

$$A \supset P_1 \ldots P_n, \quad P_i \supset A$$

2) Limitare maximală pentru idealele prime.

Pentru a arăta acest lucru se demonstrează mai întîi o teoremă privind structura inelelor care satisfac la 1) și 2).

H. Grell [4] consideră pentru enunțarea primei forme a teoremei sale de transferare, domenii de integritate cu element unitate care satisfac la 1) și la

2′) Idealele prime nenule sînt nedivizibile.

3′) Un ideal nenul nu este intersecție ireductibilă a unui număr infinit de ideale.

I. S. Cohen [5] arată că aceste inele satisfac la
1') Limitare maximală pentru ideale.
În cele ce urmează se obține un rezultat care generalizează pe cel obținut de I. S. Cohen dacă ținem seamă de tehnica demonstrației acestuia : în inelele care satisfac la 1), 2) și 3') un ideal nedivizibil are bază finită.

★

Definiție. *Într-un inel O arbitrar un ideal A' se numește succesor al idealului A dacă $A \supset A'$ iar orice ideal prim care divide (aditiv) pe A', divide și pe A.*

Lemă. *Într-un inel comutativ O care satisface la 1) dacă pentru un succesor A al unui ideal prim P avem $P^2 \cup A = P$, atunci $P = A$.*

Demonstrație. Din

$$P^2 \cup A = P$$

prin înmulțire cu P se obține

$$P^3 \cup AP = P^2$$

și reunind cu A rezultă

$$P^3 \cup A = P;$$

iterînd acest procedeu găsim

$$P^n \cup A = P \text{ pentru orice } n. \tag{1}$$

Pe de altă parte în virtutea proprietății 1) există un η_1 astfel încît

$$A \supset P^{n_1} \tag{1'}$$

Dar din (1') și (1) conchidem, pe rînd la

$$P = A \cup P^{n_1} = A$$

$$\therefore P = A$$

Teorema 1. *Într-un inel comutativ cu element unitate și cu proprietățile 1) și 2) orice ideal prim are un succesor cu bază finită.*

Demonstrație

Fie P un ideal prim și $a_1 \in P$; avem

$$(a_1) \supset P_{11}^{n_{11}} \dots P_{1k_1}^{n_1 k_1}, \quad P_{1i} \neq P_{1i'} \quad i \neq i' \quad (j = 1, \dots, k_1) \tag{2}$$

Putem totdeauna să alegem pe P_{1j} astfel încît $P_{1i} \not\supset P_{1i'}$, pentru $i \neq i'$, înlocuind în produs pe P_{1i} cu $P_{1i'}$ dacă $P_{1i} \supset P_{1i'}$. E clar că prin această înlocuire relația (1) rămîne valabilă. În cele ce urmează toate produsele de tipul lui (1) vor fi considerate normate în acest sens.

Fie acum M_1 mulțimea tuturor idealelor prime P_{1j} care nu sînt divizibil-străine cu P. Această mulțime este evident nevidă, căci din $P \supset (a)$ rezultă $P \supset P_{1j}$, pentru un anume j. Evident, putem presupune că M_1 este constituită din idealele $P_{11}, P_{12}, \dots P_{1s_1}$ cu $s_1 \leqslant k_1$, ceea ce se poate totdeauna realiza printr-o renumerotare a idealelor prime din (2).

Fie N_1 mulțimea idealelor P_{1j} pentru care $P \supset P_{1j}$. Dacă $P \in N_1$, atunci N_1 este formată dintr-un singur element P și în acest caz (2) se scrie

$$(a) \supset P^{n_{11}} P_{12}^{n_{1s_1}} \dots P_{1k_1}^{n_{1k_1}} \tag{2'}$$

Fie acum a'_i $(i = 2, \dots s_1)$ s_1 elemente ale inelului, definite prin :

$$\begin{aligned} a'_i &\longrightarrow P \prod_{j=2}^{s_1}{}'_i \, P_{1j} \\ a'_i &\not\longrightarrow P_{1i}, \end{aligned} \qquad (i = 2, 3, \dots, s_1) \tag{3}$$

unde Π'_i înseamnă că în produs lipsește termenul de rang i (adică P_{1i}). Astfel de elemente a'_i există pentru orice $i = 2, \dots, s_1$ căci

$$P_{1i} \not\supset P \prod_{j=2}^{s_1}{}'_i \, P_{1j} \quad \text{și} \quad P \prod_{j=2}^{s_1}{}'_i \, P_{1j} \not\supset P_{1i} \; i = 2, 3, \dots, s_1$$

Fie $a_2 = \sum_{i=2}^{s_1} a'_i$ și să considerăm idealul $(a_1) \cup (a_2)$. Avem

$$\begin{aligned} &(a_1) \cup (a_2) \supset P_{21}^{n_{21}} P_{22}^{n_{21}} \dots P_{2k_2}^{n_{2k_2}} \\ &P_{2j} \supset (a_1) \cup (a_2) \quad j = 1, 2, \dots, k_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Mulțimea M_2 corespunzătoare lui (4) este formată din idealele $P_{21}, \dots, P_{2s_2}$, $s_2 \leqslant k_2$. Din $P_{2j} \supset (a_1)$ rezultă că idealele care aparțin lui M_2 divid ideale P_{1j} care aparțin lui M_1. Din $P \supset a'_i$, $i = 2, \dots, s_1$ avem $P \supset (a_2)$ și deci mulțimea N_2 este formată tot numai din idealul P.

Dacă $M_2 - N_2$ este nevidă atunci, există pentru orice $P_{2j} \in M_2 - N_2$ un $P_{1j} \longrightarrow M_1 - N_1$ astfel încît $P_{2j} \supset P_{1j'}$. Să arătăm chiar mai mult că

$$P_{2j} > P_{1j}. \tag{5}$$

Să presupunem contrariul adică $P_{2j} = P_{1j'}$; atunci rezultă $a_2 \longrightarrow P_{1j'}$, adică $\sum_{i=2}^{s_1} a'_i \longrightarrow P_{1j'}$. Dar $a'_i \longrightarrow P_{1j'}$ pentru $i \neq j'$. De aici rezultă $a'_j \longrightarrow P_{1j'}$ împotriva lui (3), așadar relația (5) este verificată.

Acest procedeu poate continua atît timp cît mulțimea $M_i - N_i$ nu este vidă. Însă datorită limitării maximale pentru idealele prime există un n astfel încît mulțimea $M_n - N_n$ este vidă (în cazul contrar, în virtutea lui (5), ar exista un lanț veritabil ascendent de ideale prime). Avem deci

$$A = (a_1) \cup (a_2) \cup \dots \cup (a_n) \supset P^{n'} P_{n2}^{n_{n2}} \dots P_{nk_n}^{n_{nk_n}} \tag{6}$$

$$P \supset A, \; P_{ni} \supset A, \; P \cup P_{ni} = O, \; i = 2, 3, \dots, k_n \tag{7}$$

De aci rezultă

$$A = QA' \qquad Q \cup A' = O$$

unde

$$Q = P^{n'} \cup A, A' = P_{n2}^{n_{n2}} \dots P_{nk_n}^{n_{nk_n}} \cup A$$

Relația (6) ne dă posibilitatea să arătăm că idealul Q are bază finită. Pentru aceasta vom construi un procedeu de eliminare a idealelor $P_{n2}, \dots, P_{nk_n}$. Acest procedeu este analog cu cel de mai sus. Fie $b_1 = \sum_{i=2}^{k_n} b_i'$, unde b_i' $(i = 2, 3, \dots n)$ sînt elemente ale inelului, astfel încît

$$\begin{aligned} b_i' &\to Q \prod_{j=2}^{k_n}{}' P_{nj} \\ & \qquad\qquad i = 2, 3, \dots, k_n \\ b_i' &\nrightarrow P_{ni} \end{aligned} \tag{8}$$

Se consideră apoi idealul $A \cup (b_1)$. Din 1) rezultă

$$A \cup (b_1) \supset \mathfrak{Q}_{11}^{m_{11}} \dots \mathfrak{Q}_{1k_1}^{m_{1k_1}}, \mathfrak{Q}_{1j} \supset A \cup (b_1) \tag{9}$$

E clar că

$$\mathfrak{Q}_{1i} \supset A, \tag{10}$$

de unde rezultă sau $\mathfrak{Q}_{1i} \supset P_{nji}$ sau $\mathfrak{Q}_{1i} \supset P$. Pe de altă parte, $P \supset A \cup (b_1)$, adică $P \supset \mathfrak{Q}_{1i}$ pentru un anume i. Să presupunem $P \supset \mathfrak{Q}_{11}$; acest fapt ne conduce la $P = \mathfrak{Q}_{11}$, avînd în vedere că $P \cup P_{nj} = O$ pentru $j = 2, 3, \dots, k_n$.

Să arătăm acum că

$$\mathfrak{Q}_{1i} > P_{nji} \text{ pentru toți } i > 1$$

Într-adevăr, să presupunem contrariul, adică $(\mathfrak{Q}_{1i} \supset P_{nji})$:

$$\mathfrak{Q}_{1i} = P_{nji}$$

De aci ar rezulta $b_1 \longrightarrow P_{nji}$ de unde, ținînd seama de prima relație din (8), rezultă $b_{ji}' \longrightarrow P_{nji}$ împotriva celei de-a doua relații.

Deci (9) poate fi scrisă astfel

$$A \cup (b_1) \supset P^{m_{11}} \mathfrak{Q}_{12}^{m_{12}} \dots \mathfrak{Q}_{1k_1}^{mk_1} \tag{9'}$$

iar din (7) și (10) rezultă

$$P \cup \mathfrak{Q}_{1i} = O, \; i = 2, 3, \dots, k_1.$$

Acest proces poate continua atît timp cît numărul idealelor prime din relațiile de tipul (9) este mai mare decît 1. Dar luînd în considerare limitarea maximală pentru idealele prime, se vede imediat că după un număr finit de pași în aplicarea acestui procedeu, trebuie să obținem

$$P \supset A \cup (b_1) \cup \dots \cup (b_n) \supset P^n,$$

căci P se menține în toate relațiile de tip (9'). De aci rezultă că idealul

$$A \cup (b_1) \cup (b_2) \cup \dots \cup (b_n)$$

este un succesor al idealului P şi, prin construcţie, are bază finită. Se constată uşor că acest ideal este egal cu Q. Într-adevăr prin felul în care au fost alese elementele b_i rezultă

$$A \cup (b_1) \cup \ldots \cup (b_n) \cup P_{ni} = O \text{ pentru } i = 2, 3, \ldots, k_n$$

şi din

$$A \cup (b_1) \cup \ldots \cup (b_n) \supset A$$

rezultă

$$A \cup (b_1) \cup \ldots \cup (b_n) \supset Q.$$

Pe de altă parte, prin construcţie

$$Q \supset A \cup (b_1) \cup \ldots \cup (b_n)$$

adică, în definitiv,

$$Q = A \cup (b_1) \cup \ldots \cup (b_n)$$

Cazul în care N_1 nu conţine pe P se reduce la acest caz prin procedeul folosit mai sus. Fie în (2) $P_{11}, \ldots, P_{1r_1}$ idealele din N_1, $r_1 > 1$ avem

$$P > P_{1i} \qquad i = 1, 2, \ldots, r_1$$

căci, în cazul contrar, $P \in N_1$.
Fie atunci

$$c_i' \to \prod_{j=1}^{r_1} P_{1j} \tag{11}$$

$$c_i' \nrightarrow P_i$$

şi

$$c_1 = \sum_{i=1}^{r_1} c_i'$$

Să considerăm acum idealul $(a) \cup (c_1)$. Obţinem :

$$P \supset (a) \cup (c_1) \supset P_{21}' \ldots P_{2k_2}', \quad P_{2i}' \supset (a) \cup (c_1), \quad i = 1, 2, \ldots, k_2,$$

de unde rezultă că fiecare ideal din N_2 divide un ideal din N_1 iar, din (11), că fiecare incluziune este strictă. Se observă că acest proces poate continua atît timp cît $P \in N_i$. Ţinînd seamă însă de limitarea maximală pentru idealele prime, după un număr finit de paşi s, se obţine $P \in N_s$. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Această teoremă poate fi uşor generalizată astfel :

Teorema 2. *Într-un inel comutativ cu element unitate şi cu proprietăţile 1) şi 2), unde P_i ($i = 1, 2, \ldots n$) sînt ideale prime, $P_i \not\supset P_j$ ($i \neq j$), există un succesor al idealului $P_1 P_2 \ldots P_n$ cu bază finită.*

Demonstraţia acestei teoreme nu se deosebeşte principial prin nimic de cea precedentă, însă este mai complicată în ceea ce priveşte expunerea.

Teorema 3. *Într-un inel cu proprietăţile 1) şi 2) orice ideal idempotent este principal.*

Demonstrație. Fie A un ideal astfel încît $A = A^2$. Să observăm în primul rînd că în acest caz A este produs de ideale prime. Într-adevăr din 1) rezultă

$$A \supset P_1 P_2 \dots P_k, \quad P_i \supset A \tag{12}$$

deci

$$P_1 P_2 \dots P_k \supset A^k = A \tag{13}$$

Din (12) și (13) rezultă

$$A = P_1 P_2 \dots P_k$$

Fie acum $P_1, \dots, P_s$, $s \leqslant k$ idealele prime distincte din (12), atunci conform teoremei 2 există un ideal cu bază finită B succesor al idealului $P_1 \dots P_s$. Există deci o putere m a idealului B astfel încît

$$A \supset B^m, \tag{14}$$

de unde conchidem

$$A = B^m, \tag{15}$$

căci (14) ne arată că B_m este un succesor al idealului A, iar A fiind idempotent nu are alți succesori decît pe el însuși *). Din (15) se deduce că A are bază finită și conform unui rezultat cunoscut [3] este ideal principal.

Dacă considerăm un domeniu de integritate O cu element unitate și cu proprietățile 1) și 2), din teorema de mai sus se deduce imediat că într-un astfel de inel orice ideal diferit de ideal nul și de idealul unitate este neidempotent.

Acest rezultat permite generalizarea unei teoreme a lui K. A s a n o [3] înlocuind limitarea maximală pentru ideale cu proprietățile 1) și 2):

T e o r e m a 4. *Într-un inel O comutativ și cu element unitate care satisface la 1) și 2) și în care pentru orice ideal nedivizibil P intervalul $P > P^2$ este prim, orice ideal se descompune în produs de ideale prime.*

Să aplicăm acum teoria de mai sus la generalizarea unei teoreme a lui I. S. C o h e n [5].

T e o r e m a 5. *Dacă un inel comutativ O cu element unitate satisface la 1), 2) și 3'), atunci orice ideal nedivizibil are bază finită.*

Demonstrație. Fie P un ideal nedivizibil. Dacă $P = P^2$ atunci P nu are alți succesori decît pe el însuși și prin urmare avînd în vedere teorema 1, rezultă că P are bază finită și deci în acest caz teorema este demonstrată. Presupunem deci cazul $P > P^2$. Vom arăta că în acest caz există un număr finit de elemente ale inelului $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încît

$$P^2 \cup (a_1) \cup (a_2) \cup \dots \cup (a_n) = P.$$

Într-adevăr din $P > P^2$ rezultă $a_1 \longrightarrow P$, $a_1 \nrightarrow P^2$, dacă $P > P^2 \cup (a_1)$ atunci există a_2 astfel încît $a_2 \longrightarrow P$, $a_2 \nrightarrow P^2 \cup (a_1)$; dacă $P > P^2 \cup (a_1) \cup (a_2)$ atunci există $a_3 \longrightarrow P$, $a_3 \longrightarrow P^2 \cup (a_1) \cup (a_2)$ etc. Dacă pentru orice

*) Într-adevăr, dacă $A = A^2$, atunci orice produs de ideale, care divid pe A, divide de asemenea pe A și dacă A' este un succesor al lui A, atunci A' divide un produs de divizori primi ai lui A, adică divide pe A, deci $A = A'$.

i avem $P > P^2 \cup (a_1) \cup \ldots \cup (a_i)$, atunci obţinem un şir infinit de elemente a_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$
Fie atunci

$$A_i = P^2 \cup (a_1) \cup \ldots \cup (a_{i-1}) \cup (a_{i+1}) \cup \ldots$$

avem

$$\bigcap_i A_i \supset P^2 \tag{16}$$

Să arătăm că această intersecţie este ireductibilă. Pentru aceasta este deajuns să arătăm că

$$A_i \not\supset \bigcap_{j \neq i} A_j$$

Să presupunem contrariul, adică

$$A_i \supset \bigcap_{i \neq j} A_j$$

atunci cum $a_i \longrightarrow A_j$, pentru $i \neq j$, de aci rezultă

$$a_i \longrightarrow A_i, \text{ adică}$$

$$a_i = \alpha + b_1 + b_2 + \ldots + b_s, \; b_j \in (a_j) \quad j \neq i, \; \alpha \longrightarrow P^2$$

dacă $i > s$ relaţia este imposibilă. În cazul contrar avem

$$b_s = \alpha + b_1 + \ldots + b_{s-1}$$

deci

$$b_s \longrightarrow P^2 \cup (a_1) \cup \ldots \cup (a_{s-1})$$

sau

$$\rho_s \, a_s \longrightarrow P^2 \cup (a_1) \cup \ldots \cup (a_{s-1})$$

dar

$$(\rho_s) \cup P^2 = O$$

de unde urmează

$$a_s \longrightarrow P^2 \cup (a_1) \cup \ldots \cup (a_{s-1}),$$

împotriva alegerii lui a_s. Prin urmare (14) constituie o intersecţie ireductibilă de ideale şi nenulă, dacă P^2 este diferit de (0). În cazul contrar, evident că în loc de P^2 se poate considera orice ideal dintre P şi P^2 care este nenul. Obţinem astfel o contradicţie. Prin urmare rămîne stabilit că

$$P = P^2 \cup (a_1) \cup \ldots \cup (a_n)$$

Fie atunci Π un succesor cu bază finită al idealului P
Avem

$$P = P^2 \cup \Pi \cup (a_1) \cup \ldots \cup (a_n)$$

Dar $\Pi \cup (a_1) \cup \ldots \cup (a_n)$ este un succesor al idealului P şi ţinînd seamă de lema demonstrată obţinem

$$P = \Pi \cup (a_1) \cup \ldots \cup (a_n)$$

adică P are bază finită. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

În cazul în care în O orice ideal prim este nedivizibil această teoremă arată că toate idealele prime au bază finită, de unde rezultă că în acest caz inelul are limitare maximală pentru ideale.

ЛЕММА КРУЛЯ И СТРОЕНИЕ КОЛЕЦ

РЕЗЮМЕ

Обобщая дедекиндовы кольца, Кейзо Асано [3] вводит в коммутативные кольца $\mathcal{O}$ с единичным элементом предположения:

I. Условие максимальности для идеалов.

II. Неприводимость любого интервала $P > P^2$, где P — максимальный идеал.

Автор заменяет I двумя его следствиями:

1) *Лемма Круля*: любой собственный идеал $A < \mathcal{O}$ является делителем произведения простых делителей.

$$A \supset P_1 P_2 \dots P_n,\ P_i \supset A\ (i = 1, \dots, n).$$

2) Условие максимальности для простых идеалов.

Рассматривается также и другая аксиома (Греля).

3) Ненулевые идеалы не могут быть неприводимыми пересечениями бесконечного множества идеалов.

Таким образом доказывается при более слабых предположениях 1) + 2) + II теорема Акизуки о разложимости идеалов в произведения простых идеалов.

Другой важный результат показывает существование конечного базиса для максимальных идеалов при условиях 1) + 2) + 3).

Используемый метод основывается на понятии *идеала последователя*.

LE LEMME DE KRULL ET LA STRUCTURE DES ANNEAUX

RÉSUMÉ

Généralisant les anneaux de Dedekind, Keizo Asano [3] a introduit, dans les anneaux commutatifs $\mathcal{O}$ à élément-unité, les hypothèses:

I. La condition maximale pour les idéaux.

II. L'irréductibilité de tout intervalle $P > P^2$, où P est un idéal maximal.

L'auteur remplace la première de ces hypothèses par deux de ses conséquences :

1) *Le lemme de Krull* : tout idéal véritablement $A < \mathfrak{O}$, divise un produit de diviseurs par

$$A \supset P_1 P_2 \dots P_n,\ P_i \supset A,\ (i = 1, \dots, n).$$

2) La condition maximale pour les idéaux premiers.

Il considère également un autre axiome (Grell) :

3) Les idéaux non nuls ne peuvent être des intersections irréductibles d'une infinité d'idéaux.

C'est ainsi que l'on démontre, lorsqu'il s'agit d'hypothèses plus faibles, 1) + 2) + II, le théorème d'Akizuki relatif à la décomposition des idéaux en produits d'idéaux premiers.

Un autre résultat important montre l'existence d'une base finie pour les idéaux maximaux dans les conditions 1) + 2) + 3).

La méthode utilisée est fondée sur la notion d'*idéal successeur*.

BIBLIOGRAFIE

1. K. KUBO, *Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen* Journ. of Science of Hiroshima Univ., **10**, 77—84 (1940).
2. K. MATUSITA, *Über ein bewertungstheoretisches Axiomensystem für die Dedekind-Noethersche Idealtheorie.* Japanese Journ. of Math., **19**, 97—110 (1944).
3. K. ASANO, *Über kommutative Ringe, in denen jedes Ideal als Produkt von Primidealen darstellbar ist.* Journ. of the Math. Society of Japan, **1**, *3*, 82—90 (1951).
4. H. GRELL, *Über die Erhaltung derKettensätze der Idealtheorie.* Ber. *Math. Tagung, Tübingen* 1946, 67 (1947).
5. I. S. COHEN, *Commutative rings with restricted minimum condition.* Duke math. Journ., *17*, 27—42 (1950).

ASUPRA CLASIFICĂRII FUNCȚIILOR BOOLEENE SIMETRICE

DE

PAUL CONSTANTINESCU

Vom considera funcții booleene simetrice $S_{\alpha,\beta,\ldots,\gamma}(\tilde{x}_1\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)$ — unde $\alpha, \beta,\ldots,\gamma$ sînt numerele de simetrie [1], iar prin $\tilde{x}_i$ se înțelege x_i sau $\overline{x}_i$ — scrise sub formă normală disjunctivă și avînd $r = 0,1,\ldots, 2^n = m$ conjuncții. Variabilele $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,\ldots \tilde{x}_n$ sînt variabilele de simetrie.

Vom numi funcție simetrică elementară o funcție simetrică cu un singur număr de simetrie. O funcție simetrică elementară $S_\alpha(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2,\ldots\tilde{x}_n)$ este o disjuncție de C_n^α conjuncții.

Notăm cu $\Sigma_{(n)}$ grupul simetric avînd ordinul $n!$, cu $N_{(n)}$ grupul negațiilor avînd ordinul 2^n și cu $\mathcal{O}_{(n)}$ grupul hiperoctaedric avînd ordinul $n!.2^n$ [6].

Definiția 1. *O mulțime de funcții booleene $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ formează o clasă dacă se deduc una din alta prin transformări ale grupului $\mathcal{O}_{(n)}$ [6].*

Mulțimea transformărilor care invariază o funcție $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ formează un grup $H \subset \mathcal{O}_{(n)}$. Mulțimea funcțiilor din aceeași clasă cu $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ se obține efectuînd asupra funcției $f(x_1, x_2\ldots, x_n)$ transformările date de reprezentanții claselor de resturi ale grupului $\mathcal{O}_{(n)}$ față de H.

Funcțiile simetrice de n variabile sînt invariante, în afară de izomorfism, față de $\Sigma_{(n)}$ sau de un grup $H \subset \mathcal{O}_{(n)}$ care conține ca subgrup grupul simetric; ca atare numărul funcțiilor simetrice dintr-o clasă de funcții simetrice este un divizor al lui 2^n.

Observația 1. Să remarcăm că fiecare funcție booleană de n variabile disjuncție de r conjuncții — unde $\frac{m}{2} < r \leqslant m$ — este negația unei funcții cu $m-r$ conjuncții; funcțiile simetrice corespunzătoare valorilor $r=0$ și $r=m$ sînt respectiv 0 și 1; 0 și 1 sînt singurele funcții booleene de n variabile care sînt invariante față de toate transformările grupului $\mathcal{O}_{(n)}$. Să remarcăm de asemenea că negația unei funcții simetrice are ca numere de simetrie restul numerelor dintre $0,1\ldots,n$ decît numerele de simetrie ale funcției.

Lema 1. *Numerele de simetrie* α_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ *ale unei funcții simetrice disjuncție de* r *conjuncții* ($r \neq 0$) *verifică ecuația*

$$C_n^{\alpha_1} + C_n^{\alpha_2} + \ldots + C_n^{\alpha_p} = r \tag{1}$$

unde $\alpha_i = 0,1,\ldots, n$ *și* $\alpha_i \neq \alpha_j$ *pentru* $i \neq j$.

Demonstrație. O funcție simetrică elementară $S_\alpha(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ este o disjuncție de C_n^α conjuncții. Orice funcție simetrică

$$S_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = S_{\alpha_1}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) + S_{\alpha_2}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) + \ldots + S_{\alpha_p}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n).$$

Prin urmare dacă $S_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ este disjuncție de r conjuncții atunci

$$C_n^{\alpha_1} + C_n^{\alpha_2} + \ldots + C_n^{\alpha_p} = r.$$

Pentru a găsi toate funcțiile simetrice disjuncții de r conjuncții calculăm toate soluțiile $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ posibile ale ecuației (1).

Dacă avem $\alpha_i = \alpha_j$ pentru o pereche de indici i și j cu $i \neq j$ atunci:

— sau variabilele de simetrie corespunzătoare celor două funcții simetrice elementare sînt aceleași și în acest caz

$$S_{\alpha_i}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) = S_{\alpha_j}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$$

prin urmare funcția simetrică este

$$S_{\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$$

unde $\alpha_i \neq \alpha_l$ pentru orice i și l cu $i \neq l$,

— sau variabilele de simetrie în cele două funcții simetrice elementare nu sînt aceleași și în acest caz funcția nu este simetrică. *q.e.d.*

Observația 2. Să remarcăm că dacă $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ este soluție a ecuației (1), atunci și $(n-\alpha_1, n-\alpha_2, \ldots, n-\alpha_p)$ este soluție și dacă $(0,2,4,6,\ldots)$ este soluție, atunci și $(1,3,5,\ldots)$ este soluție, unde $(0,2,4\ldots, 1,3,5\ldots) = (0,1,2,\ldots n)$.

Să remarcăm de asemenea că singurele soluții distincte posibile ale ecuației (1) în cazul $r = 2^{n-1}$ sînt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ și $(n-\alpha_1, n-\alpha_2, \ldots, n-\alpha_p)$ unde $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, n-\alpha_1, n-\alpha_2, \ldots, n-\alpha_p) = (0,1,2,\ldots, n)$, respectiv $(0,2,4,\ldots)$ și $(1,3,5,\ldots)$ unde $(0,2,4,\ldots, 1,3,5,\ldots) = (0,1,2,\ldots n)$.

Lema 2. *Relația* $C_n^{\alpha_1} + C_n^{\alpha_2} + \ldots + C_n^{\alpha_p} = C_n^{\alpha_1 - 1} + C_n^{\alpha_1 + 1} + \ldots + C_n^{\alpha_p - 1} + C_n^{\alpha_p + 1}$ (2)

— *unde dacă* $\alpha_j = \alpha_i + 2$ *atunci termenilor* $C_n^{\alpha_i} + C_n^{\alpha_i + 2}$ *din membrul întîi le corespund în membrul al doilea termenii*

$$C_n^{\alpha_i - 1} + C_n^{\alpha_i + 1} + C_n^{\alpha_i + 3}$$

— *este adevărată numai dacă*

$$\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 3, \ldots, \alpha_p = n-1 \ (n \text{ par})$$

sau

$$\alpha_1 = 0, \ \alpha_1 = 2, \ldots, \alpha_p = n-1 \ (n \text{ impar}),$$

ca atare dacă avem

$$C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^n \ (n \text{ par})$$
$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^n \ (n \text{ impar}). \qquad (2')$$

Demonstrație. Fie n par. Sînt posibile următoarele situații:

a) Toate perechile (α_i, α_j) sînt diferite de $(\alpha, \alpha+1)$ și $(\alpha, \alpha+2)$. Ca atare fiecare α_i corespunzător termenului din membrul întîi $C_n^{\alpha_i}$ diferă de oricare α_j corespunzător termenului $C_n^{\alpha_j}$ prin cel puțin 3 unități. În acest caz avem

$$C_n^{\alpha_1} + C_n^{\alpha_2} + \ldots + C_n^{\alpha_p} < C_n^{\alpha_1 - 1} + C_n^{\alpha_1 + 1} + \ldots + C_n^{\alpha_p - 1} + C_n^{\alpha_p + 1} \qquad (3)$$

deoarece $C_n^{\alpha} \leqslant C_n^{\alpha+1} + C_n^{\alpha-1}$ unde egalitate avem numai dacă $n = 2$ și $\alpha = 1$.

b) O parte dintre perechile (α_i, α_j) sînt de forma $(\alpha, \alpha + 1)$.

Avem

$$C_n^{\alpha} + C_n^{\alpha+1} + \ldots + C_n^{\alpha+k-1} < C_n^{\alpha-1} + C_n^{\alpha} + C_n^{\alpha+1} + \ldots + C_n^{\alpha+k-1} + C_n^{\alpha+k},$$

deoarece $0 < C_n^{\alpha-1} + C_n^{\alpha+k}$.

Se observă că avem de asemenea

$$C_n^{\alpha} + C_n^{\alpha+1} + \ldots + C_n^{\alpha+k-1} < C_n^{\alpha-1} + C_n^{\alpha} + C_n^{\alpha+1} + \ldots + C_n^{\alpha+k-1}.$$

c) Să considerăm că o parte dintre perechile (α_i, α_j) sînt de forma $(\alpha, \alpha + 2)$. Din $(1-1)^n = 0$ obținem (2'). Să considerăm grupul de termeni $C_n^{\alpha} + C_n^{\alpha+2.1} + \ldots + C_n^{\alpha+2i}$.

Să demonstrăm că avem

$$C_n^{\alpha} + C_n^{\alpha+2.1} + C_n^{\alpha+2.2} + \ldots + C_n^{\alpha+2i} < C_n^{\alpha-1} + C_n^{\alpha+1} + \ldots + C_n^{\alpha+2i-1} + C_n^{\alpha+2i+1}. \qquad (4)$$

Într-adevăr termenii care se scot din membrul întîi din (2') pentru a obține suma din membrul întîi din (4) sînt respectiv mai mari decît termenii corespunzători care se scot din membrul al doilea din (2') pentru a obține membrul al doilea din (4).

Avem $C_n^1 > C_n^0$, $C_n^3 > C_n^2, \ldots, C_n^{\alpha+2i+2} > C_n^{\alpha+2i+3}, \ldots, C_n^{n-1} > C_n^n$.

d) Dacă în membrul întîi intervin termeni avînd numerele de simetrie de forma $(\alpha, \alpha+1)$ și $(\alpha, \alpha+2)$ și termeni distincți de aceștia, atunci fie G_1 suma termenilor de forma $(\alpha, \alpha + 1)$, G_2 suma termenilor de forma $(\alpha, \alpha + 2)$ și G suma termenilor distincți de aceștia.

Fie G_1', G_2' și G' sumele termenilor corespunzători din membrul al doilea.

Un număr de simetrie α corespunzător termenului C_n^{α} din G diferă prin cel puțin 3 unități de orice număr α_i corespunzător unui termen oarecare din G_1, G_2 sau G. Numerele $\alpha-1$ și $\alpha+1$ care corespund termenilor $C_n^{\alpha-1}$ și $C_n^{\alpha+1}$ din G' diferă cu cel puțin 2 unități de orice număr corespunzător unui termen oarecare din G_1, G_2 și G, deci cu cel puțin 1 unitate

de orice număr corespunzător unui termen oarecare din G_1', G_2' și G'. Conform *a*) avem $G < G'$.

Dacă orice termen din G_1 diferă prin cel puțin 3 unități de orice termen din G_2 atunci conform *b*) și *c*) avem

$$G_2 < G_2',$$
$$G_1 < G_1'.$$

Dacă avem în membrul întîi termenii $C_n^{\alpha-1}$, C_n^{α} și $C_n^{\alpha+2}$ atunci considerăm în G_1 pe $C_n^{\alpha-1}$ și C_n^{α} și în G_2 pe $C_n^{\alpha+2}$ iar în membrul al doilea considerăm că $C_n^{\alpha+1}$ face parte din G_2'. Și în acest caz conform *b*) avem $G_1 < G_1'$ iar conform *c*) avem $G_2 < G_2'$. Dacă avem mai multe grupe analoge cu G_1, respectiv G_2, demonstrația se face în mod analog, ținînd cont că unele grupe analoge cu G_1 pot fi egale cu grupele corespunzătoare analoge cu G_1'.

Prin urmare în afară de (2′) în toate celelalte cazuri avem relația (3).

Pentru n impar se demonstrează în mod analog că relația nu este adevărată decît dacă

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 2, \ldots,\ \alpha_\nu = n - 1. \quad q.e.d.$$

D e f i n i ț i a 2. *Vom spune că* α_i *și* $(n - \alpha_i)$ *— unde* n *este numărul variabilelor iar* α_i *și* $n - \alpha_i$ *sînt numere de simetrie — sînt complementare.*

Observația 3. Se poate considera că transformările grupului N_n nu modifică numerele de simetrie ale unei funcții simetrice : anume putem considera că efectuarea acestor transformări are ca efect schimbarea variabilelor de simetrie.

Fie $N^\star \in N_n$ transformarea care constă în negația tuturor variabilelor $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n$. Să remarcăm de asemenea că avem

$$N^\star S_\alpha(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n) = S_{n-\alpha}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n),$$

ambele funcții avînd aceleași variabile de simetrie.

Observația 4. Dintre funcțiile simetrice de n variabile cu un număr par $2k$ de numere de simetrie singurele care rămîn invariante față de transformarea $N^\star$ sînt cele care au numerele de simetrie complementare două cîte două, ca atare avînd numerele de simetrie :

$$\alpha_1, \ldots \alpha_k,\quad n - \alpha_1, \ldots, n - \alpha_k.$$

Să remarcăm de asemenea că în cazul n impar din lema 2 numerele de simetrie din cei doi termeni sînt complementare două cîte două.

Observația 5. Dintre funcțiile simetrice de n variabile cu un număr impar $2k + 1$ de numere de simetrie singurele funcții care rămîn invariante față de transformarea $N^\star$ sînt cele pentru care n este par și care au $2k$ numere de simetrie complementare două cîte două iar al $(2k + 1)$-lea număr de simetrie este $\frac{n}{2}$, ca atare avînd numerele de simetrie :

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, n - \alpha_1, \ldots, n - \alpha_k, \frac{n}{2}.$$

Vom demonstra următoarea

T e o r e m ă. *Două funcții booleene simetrice fac parte din aceeași clasă dacă și numai dacă sau amîndouă au ca numere de simetrie sistemul* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ (sau sistemul $(n - \alpha_1, n - \alpha_2, \ldots, n - \alpha_p)$) *sau dacă una dintre ele are ca numere de simetrie sistemul* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ *și cealaltă are ca numere de simetrie sistemul* $(n - \alpha_1, n - \alpha_2, \ldots, n - \alpha_p)$ *sau dacă funcțiile au același număr de conjuncții* $r = 2^{n-1}$ *și una dintre funcții are ca numere de simetrie sistemul* $(0, 2, 4, \ldots)$ *iar cealaltă sistemul* $(1, 3, 5, \ldots)$ *unde* $(0, 2, 4, \ldots, 1, 3, 5, \ldots) = (0, 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Demonstrație.

Fie $S = S_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ și $S^* = S_{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_\pi^*}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ două funcții simetrice în care variabilele de simetrie sînt arbitrare.

Condiția este suficientă. 1. Să presupunem că $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_\pi^*) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$. În acest caz S și S^* diferă cel mult prin variabilele de simetrie.

Deoarece toate funcțiile simetrice avînd variabilele de simetrie distincte de variabilele de simetrie ale funcției $S_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ se obțin numai prin efectuarea transformărilor din N_n, înseamnă că există o transformare $N \in N_{(n)}$ astfel ca

$$NS = S^*.$$

Prin urmare cele două funcții fac parte din aceeași clasă.

Fie H, unde $\Sigma_{(n)} \subset H \subset \mathcal{O}_{(n)}$ subgrupul transformărilor față de care S este invariantă și H^*, cu $\Sigma_{(n)} \subset H^* \subset O_{(n)}$, subgrupul transformărilor față de care S^* este invariantă. Rezultă că H este izomorf cu H^* și anume $NH = H^*$.

2. Să considerăm că $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_\pi^*) = (n - \alpha_1, n - \alpha_2, \ldots, n - \alpha_p)$. În acest caz există o transformare $N \in N_{(n)}$ astfel ca cele două funcții să aibă aceleași variabile de simetrie. Fie

$$S_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \text{ și } NS_{n-\alpha_1, \ldots, n-\alpha_p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$$

cele două funcții care au aceleași variabile de simetrie. Efectuînd transformarea N^* (Observația 3) obținem :

$$N^*N\, S_{n-\alpha_1, \ldots, n-\alpha_p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) = S_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n).$$

Prin urmare cele două funcții fac parte din aceeași clasă.

3. Fie $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_\pi^*) = (0, 2, 4, \ldots)$ și $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = (1, 3, 5, \ldots)$ unde $(0, 2, 4, \ldots, 1, 3, 5, \ldots) = (0, 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Există o transformare $N \in N_{(n)}$ astfel ca cele 2 funcții să aibă aceleași variabile de simetrie. Să considerăm că S^* și NS au aceleași variabile de simetrie. Deoarece $(0, 2, 4, \ldots, 1, 3, 5, \ldots) = (0, 1, 2, \ldots, n)$ rezultă (Observația 1) :

$$S^* + NS = 1.$$

Conform Observației 1 rezultă, de asemenea, că funcțiile S^* și NS nu sînt invariante față de toate transformările grupului N_n ; deoarece cele două

funcții conțin același număr de conjuncții $r = 2^{n-1}$, în baza Observației 2 rezultă că există cel puțin o transformare prin care trec una în cealaltă.

Condiția este necesară. Să considerăm că

$$(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_p^*) \neq (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$$

și

$$(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_p^*) \neq (n - \alpha_1, n - \alpha_2, \ldots, n - \alpha_p)$$

și

$$(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_p^*, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \neq (0, 1, 2, \ldots, n).$$

Sînt posibile următoarele două cazuri :

1. Dacă numerele de simetrie ale celor două funcții nu sînt în număr egal atunci funcțiile nu pot face parte din aceeași clasă deoarece nu se pot deduce una din cealaltă prin transformări din $\mathcal{O}_{(n)}$ decît dacă una este negația celeilalte și cele două funcții au același număr de conjuncții $r = 2^{n-1}$, caz care a fost exclus.

Într-adevăr fie N_k transformarea care constă în negația acelor variabile din fiecare conjuncție $\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n$ care ocupă poziția unităților din scrierea numărului k în baza 2. Ca atare N_1 este transformarea care constă în negația primei variabile din dreapta. Să demonstrăm că nu există nici o funcție S în afară de $S_{1,3,5,\ldots,n-1}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ sau negația ei și nici o transformare $N \in N_{(n)}$ astfel ca $NS = S^*$. Prin absurd.

Să presupunem că există o transformare N_k astfel ca $N_k S = S^*$. Atunci există și o funcție $N'S$ astfel ca $N_1(N'S) = (N_1N')S = N_kS = S^*$. Să remarcăm de asemenea că putem presupune că S și S^* au aceleași variabile de simetrie. Într-adevăr dacă există o funcție S cu variabile de simetrie distincte de ale funcției S^* astfel ca $NS = S^*$ atunci există și o funcție $S' = N'S$ cu aceleași variabile de simetrie ca S^* și astfel ca $N''S' = N''(N'S) = S^*$ cu $N''N' = N$. Dacă cele două funcții au aceleași variabile de simetrie atunci există o transformare din $N(n)$ care aplicată celor două funcții face ca variabilele de simetrie să fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în ambele funcții.

Ca atare este suficient să demonstrăm că dacă

$$N_1 S = S^*$$

ajungem la o contradicție, unde S și S^* au ca variabile de simetrie $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Să remarcăm că dacă aplicăm transformarea N_1 unei funcții simetrice elementare $S_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se obțin conjuncții care fac parte din funcțiile simetrice elementare $S_{\alpha-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $S_{\alpha+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; dacă N_1 se aplică lui $S_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ obținem o conjuncție din $S_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ iar dacă se aplică lui $S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se obține o conjuncție din $S_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Prin urmare dacă $N_1S = S^*$ atunci conform lemei (1) rezultă

$$C_n^{\alpha_1} + C_n^{\alpha_2} + \ldots + C_n^{\alpha_p} = C_n^{\alpha_1 - 1} + C_n^{\alpha_1 + 1} + \ldots + C_n^{\alpha_p - 1} + C_n^{\alpha_p + 1}$$

unde dacă

$$\alpha_j = \alpha_i + 2$$

atunci în membrul drept avem un singur termen $C_n^{\alpha_i+1}$. Conform lemei 2 rezultă că această relație nu este adevărată decît dacă

$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 3,\ \ldots,\ \alpha_p = n-1$ în cazul n număr par sau,

$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 2,\ \ldots,\ \alpha_p = n-1$ în cazul n număr impar.

Al doilea caz este exclus prin ipoteză deoarece numerele de simetrie rezultă în număr egal pentru cele două funcții.

2. Numerele de simetrie sînt în număr egal. Fie r și r^* numărul conjuncțiilor din S respectiv din S^*. Sînt posibile următoarele două situații :

a) $r \neq r^*$. În acest caz funcțiile nu pot face parte din aceeași clasă deoarece nu se pot deduce una din cealaltă prin transformări din $\mathcal{O}_{(n)}$.

b) $r = r^*$. Conform lemei 1 și ipotezei, o parte dintre numerele de simetrie din al doilea sistem sînt egale respectiv cu cîte un număr de simetrie din primul sistem, iar celelalte numere de simetrie din al doilea sistem sînt complementare respectiv cu cîte un număr de simetrie din primul sistem.

Ca atare :

$$\begin{aligned}
\alpha_1^* &= n - \alpha_1 \\
\alpha_2^* &= n - \alpha_2 \\
&\vdots \\
\alpha_i^* &= n - \alpha_i \\
\alpha_{i+1}^* &= \alpha_{i+1} \\
&\vdots \\
\alpha_p^* &= \alpha_p ,
\end{aligned}$$

unde $1 \leqslant i < p$.

Funcțiile S și S^* fiind simetrice sînt invariante față de transformările grupului $\Sigma_{(n)}$. Să demonstrăm, prin urmare, că nu există nici o transformare $N \in N_{(n)}$ și nici o funcție S astfel ca

$$NS^* = S.$$

Vom face demonstrația prin absurd. Să remarcăm că este suficient să demonstrăm că dacă $N^*S^* = S$ ajungem la o contradicție. Într-adevăr, dacă ar exista o funcție S' astfel ca $NS' = S$ unde $N \neq N^*$, atunci există și o funcție $S^* = N'S'$ astfel ca $N^*(N'S') = S$ unde $N^*N' = N$.

Să remarcăm de asemenea că putem considera că în funcțiile S^* și S avem aceleași variabile de simetrie. Într-adevăr dacă ar exista o funcție S' cu variabile de simetrie distincte de variabilele de simetrie ale lui S și astfel ca

$$NS' = S,$$

atunci există și o funcție $N'S'$ cu aceleași variabile de simetrie ca și S și astfel încît $N''(N'S') = S$ cu $N''N' = N$.

Să presupunem, prin urmare, că avem

$$N^*S^* = S$$

unde funcțiile S și S^* au aceleași variabile de simetrie.

Fie

$$S^* = S_1^* + S_2^* \quad \text{și} \quad S = S_1 + S_2$$

unde

$$S_1^* = S_{\alpha_1^*} + S_{\alpha_2^*} + \ldots + S_{\alpha_i^*}, \; S_2^* = S_{\alpha_{i+1}^*} + S_{\alpha_{i+2}^*} + \ldots + S_{\alpha_p^*}$$

și

$$S_1 = S_{\alpha_1} + S_{\alpha_2} + \ldots + S_{\alpha_i}, \; S_2 = S_{\alpha_{i+1}} + S_{\alpha_{i+2}} + \ldots + S_{\alpha_p},$$

variabilele de simetrie fiind aceleași în toate funcțiile simetrice elementare $S_{\alpha_k^*}$ și S_{α_k} unde $k = 1, 2, \ldots, p$.

Rezultă

$$N^*(S_1^* + S_2^*) = S_1 + N^*S_2 = S_1 + S_2$$

deoarece $S_2^* = S_2$ și $N^*S_1^* = S_1$ (Observația 3). Prin urmare am obținut

$$N^*S_2 = S_2.$$

Conform Observației 4 și Observației 5 rezultă că toate numerele de simetrie $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_p^*$ sînt complementare [respectiv cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ contrar ipotezei $i < p$.

q.e.d.

Ca să găsim toate clasele de funcții simetrice pentru $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ vom proceda astfel :

Pentru n dat vom considera succesiv $r = 0, 1, \ldots, 2^n$. Fiecare clasă formată din funcții cu $m - r$ conjuncții unde $\frac{m}{2} < r \leqslant m$ este caracterizată prin restul numerelor de simetrie dintre $0, 1, \ldots, n$ decît numerele de simetrie pe care le are clasa respectivă cu r conjuncții deoarece, pentru aceleași variabile de simetrie, funcțiile din clasa cu $m - r$ conjuncții sînt respectiv negațiile funcțiilor din cealaltă clasă (Observația 3).

Conform Observației 1 vom rezolva ecuația (1) pentru un r dat cu $r \neq 0$ și $r \neq 2^n$. Dacă soluțiile $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ și $(n - \alpha_1, n - \alpha_2, \ldots, n - \alpha_p)$ obținute prin rezolvarea ecuației (1) coincid, considerăm

$$S_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

asupra căreia dacă efectuăm toate transformările grupului N_n găsim toate funcțiile distincte din clasa respectivă.

Dacă $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ și $(n - \alpha_1, \ldots, n - \alpha_p)$ sînt distincte putem scrie funcțiile din clasa respectivă în modul următor :

Numărul funcțiilor simetrice dintr-o clasă fiind un divizor al lui 2^n, fie $2k$ acest număr. Vom scrie k funcții corespunzătoare soluției $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ și k funcții corespunzătoare soluției $(n - \alpha_1, n - \alpha_2, \ldots, n - \alpha_p)$ ultimele k funcții avînd respectiv aceleași variabile de simetrie ca și primele k funcții.

Să remarcăm, de asemenea, că numărul funcțiilor dintr-o clasă este egal cu numărul claselor de resturi ale grupului $N_{(n)}$ față de subgrupul $H \subset N_{(n)}$, subgrupul H fiind format din toate transformările grupului $N_{(n)}$ care invariază funcția $S_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

În cele ce urmează dăm clasificarea funcțiilor booleene simetrice pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

$n = 1.$

$r = 0$ *1 funcție.*

$r = 1$ $\begin{cases} C_1^1 = 1 \quad S_1(x) \\ C_1^0 = 1 \quad S_0(x) \end{cases}$ *2 funcții.*

$r = 2$ *1 funcție.*

Pentru $n = 1$ sînt 3 clase și 4 funcții.

$n = 2.$

$r = 0$ *1 funcție*

$r = 1$ $\begin{cases} C_2^0 = 1 \quad S_0(x_1, x_2);\ S_0(\bar{x}_1, x_2) \\ C_2^2 = 1 \quad S_2(x_1, x_2);\ S_2(\bar{x}_1, x_2) \end{cases}$ *4 funcții.*

$r = 2$ $\begin{cases} C_2^1 = 2 \quad S_1(x_1, x_2);\ S_1(\bar{x}_1, x_2) \\ H = \{I, N_3\} \end{cases}$ *2 funcții.*

$r = 3$ $\begin{cases} C_2^0 + C_2^1 = 3 \quad S_{0,1}(x_1, x_2);\ S_{0,1}(\bar{x}_1, x_2) \\ C_2^2 + C_2^1 = 3 \quad S_{1,2}(x_1, x_2);\ S_{1,2}(\bar{x}_1, x_2) \end{cases}$ *4 funcții.*

$r = 4$ *1 funcție*

Pentru $n = 2$ sînt 5 clase și 12 funcții.

$n = 3$

$C_3^0 = 1,\ C_3^1 = 3,\ C_3^2 = 3,\ C_3^3 = 1.$

$r = 0$ *1 funcție.*

$r = 1$ $\begin{cases} C_3^0 = 1 \quad S_0(x_1, x_2, x_3);\ S_0(\bar{x}_1, x_2, x_3);\ S_0(x_1, \bar{x}_2, x_3);\ S_0(x_1, x_2, \bar{x}_3) \\ C_3^3 = 1 \quad S_3(x_1, x_2, x_3);\ S_3(\bar{x}_1, x_2, x_3);\ S_3(x_1, \bar{x}_2, x_3);\ S_3(x_1, x_2, \bar{x}_3) \end{cases}$ *8 funcții.*

$r = 2$ $\begin{cases} C_3^0 + C_3^3 = 2 \quad S_{0,3}(x_1, x_2, x_3),\ S_{0,3}(\bar{x}_1, x_2, x_3), \\ \qquad\qquad S_{0,3}(x_1, \bar{x}_2, x_3),\ S_{0,3}(x_1, x_2, \bar{x}_3) \\ H = \{I, N_7\} \end{cases}$ *4 funcții.*

$r = 3$ $\begin{cases} C_3^1 = 3 \quad S_1(x_1, x_2, x_3),\ S_1(\bar{x}_1, x_2, x_3),\ S_1(x_1, \bar{x}_2, x_3),\ S_1(x_1, x_2, \bar{x}_3) \\ C_3^2 = 3 \quad S_2(x_1, x_2, x_3),\ S_2(\bar{x}_1, x_2, x_3),\ S_2(x_1, \bar{x}_2, x_3),\ S_2(x_1, x_2, \bar{x}_3) \end{cases}$ *8 funcții.*

$r = 4$ $\begin{cases} C_3^0 + C_3^1 = 4 \quad S_{0,1}(x_1, x_2, x_3),\ S_{0,0}(\bar{x}_1, x_2, x_3), \\ \qquad\qquad S_{0,1}(x_1, \bar{x}_2, x_3),\ S_{0,1}(x_1, x_2, \bar{x}_3) \\ C_3^3 + C_3^2 = 4 \quad S_{2,3}(x_1, x_2, x_3),\ S_{2,3}(\bar{x}_1, x_2, x_3), \\ \qquad\qquad S_{2,3}(x_1, \bar{x}_2, x_3),\ S_{2,3}(x_1, x_2, \bar{x}_3) \end{cases}$ *8 funcții.*

$$\begin{cases} C_3^0 + C_3^2 = 4 & S_{0,2}(x_1, x_2, x_3) \\ C_3^3 + C_3^1 = 4 & S_{1,3}(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad 2 \text{ funcții.}$$

$H = \{I,\ N_3,\ N_5,\ N_6\}$

$r = 5$

$$\begin{cases} C_3^1 + C_3^0 + C_3^3 = 5 & S_{0,1,3}(x_1, x_2, x_3);\ S_{0,1,3}(\bar{x}_1, x_2, x_3);\ S_{0,1,3}(x_1, \bar{x}_2, x_3);\ S_{0,1,3}(x_1, x_2, \bar{x}_3) \\ C_3^2 + C_3^3 + C_3^0 = 5 & S_{0,2,3}(x_1, x_2, x_3);\ S_{0,2,3}(\bar{x}_1, x_2, x_3);\ S_{0,2,3}(x_1, \bar{x}_2, x_3);\ S_{0,2,3}(x_1, x_2, \bar{x}_3) \end{cases} \quad 8 \text{ funcții.}$$

$r = 6$

$$\begin{cases} C_3^1 + C_3^3 = 6 & S_{1,3}(x_1, x_2, x_3);\ S_{1,3}(\bar{x}_1, x_2, x_3);\ S_{1,3}(x_1, \bar{x}_2, x_3);\ S_{1,3}(x_1, x_2, \bar{x}_3) \end{cases} \quad 4 \text{ funcții.}$$

$r = 7$

$$\begin{cases} C_3^1 + C_3^2 + C_3^0 = 7 & S_{0,1,2}(x_1, x_2, x_3);\ S_{0,1,2}(\bar{x}_1, x_2, x_3);\ S_{0,1,2}(x_1, \bar{x}_2, x_3);\ S_{0,1,2}(x_1, x_2, \bar{x}_3) \\ C_3^2 + C_3^1 + C_3^3 = 7 & S_{1,2,3}(x_1, x_2, x_3);\ S_{1,2,3}(\bar{x}_1, x_2, x_3);\ S_{1,2,3}(x_1, \bar{x}_2, x_3);\ S_{1,2,3}(x_1, x_2, \bar{x}_3) \end{cases} \quad 8 \text{ funcții.}$$

$r = 8$ *1 funcție.*

Pentru $n = 3$ sînt 10 clase și 52 funcții.

$n = 4.$

$C_4^0 = 1,\ C_4^1 = 4,\ C_4^2 = 6,\ C_4^3 = 4,\ C_4^4 = 1.$

$r = 0$ *1 funcție.*

$r = 1$

$$\begin{cases} C_4^0 = 1 & S_0(x_1, x_2, x_3, x_4);\ S_0(\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4);\ S_0(x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4);\ S_0(x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4);\ S_0(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4);\ S_0(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, x_4);\ S_0(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, x_4);\ S_0(\bar{x}_1, x_2, x_3, \bar{x}_4) \\ C_4^4 = 1 & S_4(x_1, x_2, x_3, x_4);\ S_4(\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4);\ S_4(x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4);\ S_4(x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4);\ S_4(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4);\ S_4(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, x_4);\ S_4(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3, x_4);\ S_4(\bar{x}_1, x_2, x_3, \bar{x}_4) \end{cases} \quad 16 \text{ funcții}$$

$r = 2$

$$\begin{cases} C_4^0 + C_4^4 = 2 \\ H = \{I,\ N_{15}\} \end{cases} \quad 8 \text{ funcții}$$

$r = 3$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r = 4$

$$\begin{cases} C_4^1 = 4 \\ C_4^3 = 4 \end{cases} \quad 16 \text{ funcții}$$

$r = 5$

$$\begin{cases} C_4^1 + C_4^0 = 5 \\ C_4^3 + C_4^4 = 5 \end{cases} \quad 16 \text{ funcții}$$

$$\begin{cases} C_4^1 + C_4^4 = 5 \\ C_4^3 + C_4^0 = 5 \end{cases} \quad 16 \text{ funcții}$$

$r = 6$

$$\begin{cases} C_4^2 = 6 \\ H = \{I, N_{15}\} \end{cases} \quad 8 \text{ funcții}$$

$$\begin{cases} C_4^1 + C_4^0 + C_4^4 = 6 \\ C_4^3 + C_4^0 + C_4^4 = 6 \end{cases} \quad 16 \text{ funcții}$$

$r = 7$

$$\begin{cases} C_4^0 + C_4^2 = 7 \\ C_4^4 + C_4^2 = 7 \end{cases} \quad 16 \text{ funcții}$$

$r = 8$

$$\begin{cases} C_4^0 + C_4^4 + C_4^2 = 8 \\ C_4^1 + C_4^3 = 8 \end{cases} \quad 2 \text{ funcții}$$

$H = \{I,\ N_3,\ N_5,\ N_6,\ N_9,\ N_{10},\ N_{12},\ N_{15}\}$

$r = 9$ $\begin{cases} C_4^1 + C_4^3 + C_4^0 = 9 \\ C_4^3 + C_4^1 + C_4^4 = 9 \end{cases}$ *16 funcții*

$r=10$ $\{ C_4^1 + C_4^3 + C_4^0 + C_4^4 = 10$ *8 funcții*

$\begin{cases} C_4^2 + C_4^3 = 10 \\ C_4^2 + C_4^1 = 10 \end{cases}$ *16 funcții*

$r=11$ $\begin{cases} C_4^2 + C_4^3 + C_4^0 + 11 \\ C_4^2 + C_4^1 + C_4^4 = 11 \end{cases}$ *16 funcții*

$\begin{cases} C_4^2 + C_4^1 + C_4^0 = 11 \\ C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 11 \end{cases}$ *16 funcții*

$r=12$ $\begin{cases} C_4^2 + C_4^1 + C_4^0 + C_4^4 = 12 \\ C_4^2 + C_4^3 + C_4^0 + C_4^4 = 12 \end{cases}$ *16 funcții*

$r=13.$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r=14$ $\{ C_4^2 + C_4^1 + C_4^3 = 14$ *8 funcții*

$r=15$ $\begin{cases} C_4^2 + C_4^1 + C_4^3 + C_4^0 = 15 \\ C_4^2 + C_4^1 + C_4^3 + C_4^4 = 15 \end{cases}$ *16 funcții*

$r=16$ *1 funcție.*

Pentru $n = 4$ sînt 19 clase și 228 funcții.

$n = 5$

$C_5^0 = 1,\ C_5^1 = 5,\ C_5^2 = 10,\ C_5^3 = 10,\ C_5^4 = 5,\ C_5^5 = 1.$

$r = 0$ *1 funcție.*

$r = 1$

$C_5^0 = 1$ $S_0(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$; $S_0(\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$;
$S_0(x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5)$; $S_0(x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4, x_5)$
$S_0(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5)$; $S_0(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5)$;
$S_0(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5)$; $S_0(x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4, x_5)$
$S_0(\bar{x}_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5)$; $S_0(\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5)$;
$S_0(x_1, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_4, x_5)$; $S_0(x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, \bar{x}_5)$
$S_0(x_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, x_5)$; $S_0(x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5)$;
$S_0(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5)$; $S_0(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5)$

$C_5^5 = 1$ $S_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$; $S_5(\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$;
$S_5(x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5)$; $S_5(x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4, x_5)$
$S_5(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5)$; $S_5(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5)$;
$S_5(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5)$; $S_5(x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4, x_5)$
$S_5(\bar{x}_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5)$; $S_5(\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5)$;
$S_5(x_1, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_4, x_5)$; $S_5(x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, \bar{x}_5)$
$S_5(x_1, x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, x_5)$; $S_5(x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4, \bar{x}_5)$;
$S_5(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5)$; $S_5(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5)$

32 funcții

$r = 2$ $\begin{cases} C_5^0 + C_5^5 = 2 \quad \textit{16 funcții} \\ H = \{I, N_{31}\} \end{cases}$

$r = 3$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r = 4$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r = 5$ $\begin{cases} C_5^1 = 5 \\ C_5^4 = 5 \end{cases}$ *32 funcții*

$r = 6$ $\begin{cases} C_5^0 + C_5^1 = 6 \\ C_5^5 + C_5^4 = 6 \end{cases}$ *32 funcții*

$\begin{cases} C_5^0 + C_5^4 = 6 \\ C_5^5 + C_5^1 = 6 \end{cases}$ *32 funcții*

$r = 7$ $\begin{cases} C_5^1 + C_5^0 + C_5^5 = 7 \\ C_5^4 + C_5^5 + C_5^0 = 7 \end{cases}$ *32 funcții*

$r = 8$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r = 9$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r=10$ $\begin{cases} C_5^2 = 10 \\ C_5^3 = 10 \end{cases}$ *32 funcții*

$\begin{cases} C_5^1 + C_5^4 = 10 \\ H = \{I,\ N_{31}\} \end{cases}$ *16 funcții*

$\begin{cases} C_5^1 + C_5^4 + C_5^0 = 11 \\ C_5^4 + C_5^1 + C_5^5 = 11 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=11$ $\begin{cases} C_5^2 + C_5^0 = 11 \\ C_5^3 + C_5^5 = 11 \end{cases}$ *32 funcții*

$\begin{cases} C_5^2 + C_5^5 = 11 \\ C_5^3 + C_5^0 = 11 \end{cases}$ *32 funcții*

$\begin{cases} C_5^0 + C_5^1 + C_5^4 + C_5^5 = 12 \\ H = \{I,\ N_{31}\} \end{cases}$ *16 funcții*

$r=12$ $\begin{cases} C_5^2 + C_5^0 + C_5^5 = 12 \\ C_5^3 + C_5^5 + C_5^0 = 12 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=13$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r=14$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r=15$ $\begin{cases} C_5^2 + C_5^1 = 15 \\ C_5^3 + C_5^4 = 15 \end{cases}$ *32 funcții*

$\begin{cases} C_5^2 + C_5^4 = 15 \\ C_5^3 + C_5^1 = 15 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=16$ $\begin{cases} C_5^2 + C_5^1 + C_5^0 = 16 \\ C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 16 \end{cases}$ *32 funcții*

$\begin{cases} C_5^2 + C_5^1 + C_5^5 = 16 \\ C_5^3 + C_5^4 + C_5^0 = 16 \end{cases}$ *32 funcții*

$\begin{cases} C_5^2 + C_5^4 + C_5^0 = 16 \\ C_5^3 + C_5^1 + C_5^5 = 16 \end{cases}$ *2 funcții*

$H = \{I, N_3, N_5, N_6, N_9, N_{10}, N_{12}, N_{15}, N_{17}, N_{18}, N_{20}, N_{23}, N_{24}, N_{27}, N_{29}, N_{30}\}$

$\begin{cases} C_5^2 + C_5^4 + C_5^5 = 16 \\ C_5^3 + C_5^1 + C_5^0 = 16 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=17$ $\begin{cases} C_5^0 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 17 \\ C_5^0 + C_5^2 + C_5^1 + C_5^5 = 17 \end{cases}$ *32 funcții*

$\begin{cases} C_5^0 + C_5^1 + C_5^3 + C_5^5 = 17 \\ C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 + C_5^5 = 17 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=18$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r=19$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r=20$ $\begin{cases} C_5^1 + C_5^3 + C_5^4 = 20 \\ C_5^1 + C_5^2 + C_5^4 = 20 \end{cases}$ *32 funcții*

$\{ \; C_5^2 + C_5^3 = 20$ *16 funcții*

$\begin{cases} C_5^2 + C_5^3 + C_5^5 = 21 \\ C_5^2 + C_5^3 + C_5^0 = 21 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=21$ $\begin{cases} C_5^1 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 21 \\ C_5^4 + C_5^2 + C_5^1 + C_5^0 = 21 \end{cases}$ *32 funcții*

$\begin{cases} C_5^0 + C_5^1 + C_5^3 + C_5^4 = 21 \\ C_5^5 + C_5^4 + C_5^2 + C_5^1 = 21 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=22$ $\begin{cases} C_5^0 + C_5^1 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 22 \\ C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^4 + C_5^5 + 22 \end{cases}$ *32 funcții*

$\{ \; C_5^0 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^5 + 22$ *16 funcții*

$r = 23$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r = 24$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r=25$ $\begin{cases} C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 = 25 \\ C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 = 25 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=26$ $\begin{cases} C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 26 \\ C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 = 26 \end{cases}$ *32 funcții*

$\begin{cases} C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^5 = 26 \\ C_5^0 + C_5^3 + C_5^2 + C_5^4 = 26 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=27$ $\begin{cases} C_5^0 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 27 \\ C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^5 = 27 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=28$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r=29$ Ecuația (1) nu admite soluții.

$r=30$ $\{ \; C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 = 30$ *16 funcții*

$r=31$ $\begin{cases} C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 31 \\ C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 = 31 \end{cases}$ *32 funcții*

$r=32$ *1 funcție*

Pentru $n = 5$ sînt 36 clase și 964 funcții.

О КЛАССИФИКАЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В работе приводится необходимое и достаточное условие принадлежности симметрической булевой функции n переменных к некоторому классу.

Используя уравнение (1), которому удовлетворяют числа симметрии симметрической булевой функции, классифицируются симметрические булевые функции n переменных при $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

SUR LA CLASSIFICATION DES FONCTIONS BOOLÉENNES SYMÉTRIQUES

RÉSUMÉ

L'auteur indique la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction booléenne symétrique, à n variables, puisse appartenir à une classe.

Utilisant l'équation (1), vérifiée par les nombres de symétrie d'une fonction booléenne symétrique, il classifie les fonctions booléennes symétriques ayant n variables pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

BIBLIOGRAFIE

1. CALDWELL S. H., *Switching circuits and logical design*, John Wiley & Sohn (1958).
2. MOISIL GR., *Clasificarea evoluției schemelor cu un releu*. Com. Acad. R.P.R., **VI**, *4* (1956).
3. — *Clasificarea schemelor cu un buton și un releu*. Com. Acad. R.P.R., **VI**, *9* (1956).
4. — *Teoria algebrică a mecanismelor automate*. Editura Academiei R.P.R. (1959).
5. — *Scheme cu comandă directă cu contacte și relee*. Ed. Acad. R.P.R. (1959).
6. SLEPIAN DAVID, *On the number of symetry types of boolean functions*. Canadian Journal of Math. **V** (1953).

ASUPRA GRUPURILOR DE MIȘCARE ALE SPAȚIILOR RIEMANNIENE V_2 CU CURBURA CONSTANTĂ

DE

MARIUS I. STOKA

Se știe că grupul de mișcare al unui spațiu riemannian V_2 cu curbura constantă este un grup cu trei parametri.

În anul 1928, L. Bianchi a demonstrat că grupul de mișcare al spațiului V_2 cu curbura constantă pozitivă $k=1$ are structura [1]*)

$$(X_1X_2) = X_3,\ (X_2X_3) = X_1,\ (X_3X_1) = X_2 \tag{1}$$

și transformările infinitezimale

$$\begin{aligned} X_1 f &= -\frac{\partial f}{\partial x} \\ X_2 f &= -\sin x \operatorname{cotg} y \frac{\partial f}{\partial x} + \cos x \frac{\partial f}{\partial y} \\ X_3 f &= \cos x \operatorname{cotg} y \frac{\partial f}{\partial x} + \sin x \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \tag{2}$$

În cazul spațiului V_2 cu curbura constantă negativă, Bianchi a demonstrat [1]**) că grupul de mișcare are structura

$$(X_1X_2) = X_1,\ (X_1X_3) = 2X_2,\ (X_2X_3) = X_3 \tag{3}$$

și transformările infinitezimale

$$\begin{aligned} X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ X_2 f &= x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \\ X_3 f &= (x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4}$$

*) p. 513.
**) p. 511.

În anul 1957, prof. G. Vrănceanu a demonstrat [2]*) că grupul de mișcare al unui spațiu V_2 cu curbura constantă k are structura

$$(XY) = kZ, \quad (YZ) = X, \quad (ZX) = Y \tag{5}$$

iar transformările infinitezimale

$$Xf = \sqrt{1 - k(u^2+v^2)}\,\frac{\partial f}{\partial u},\ Yf = \sqrt{1 - k(u^2+v^2)}\,\frac{\partial f}{\partial v},\ Zf = v\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v}. \tag{6}$$

De asemenea Bianchi a demonstrat că spațiul V_3, cu metrica

$$ds^2 = du^2 + (\sin^2 u + n^2\cos u)\,dv^2 + dw^2 + 2\,n\,\cos u\,dv\,dw,$$

admite ca grup parțial de mișcări grupul simplu tranzitiv G_3 cu transformările infinitezimale

$$X_1 f = -\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$X_2 f = -\sin u\ \operatorname{cotg} w\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\sin u}{\sin w}\frac{\partial f}{\partial v} + \cos u\frac{\partial f}{\partial w} \tag{2'}$$

$$X_3 f = \cos u\operatorname{cotg} w\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\cos u}{\sin w}\frac{\partial f}{\partial v} + \sin u\frac{\partial f}{\partial w}$$

și structura (1) [1]**), spațiul V_3 cu metrica

$$ds^2 = \varphi^2(v)\,(du^2 + dw^2) + dv^2$$

admite ca grup de mișcări (parțial sau complet după valorile funcției $\varphi(v)$ grupul intranzitiv G_3 cu transformările infinitezimale

$$X_1 f = -\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$X_2 f = -\sin u\operatorname{cotg} w\ \frac{\partial f}{\partial u} + \cos u\frac{\partial f}{\partial w} \tag{2''}$$

$$X_3 f = \cos u\operatorname{cotg} w\ \frac{\partial f}{\partial u} + \sin u\frac{\partial f}{\partial w}$$

și structura (1) [1]***), iar spațiul V_3 cu metrica

$$ds^2 = du^2 + e^{2w}\,dv^2 + 2\,ne^{w}\,du\,dv + dw^2 \qquad (n<1)$$

admite ca grup parțial de mișcări grupul simplu tranzitiv G_3 cu transformările infinitezimale

$$X_1 f = e^{-u}\left(-2\,v\frac{\partial f}{\partial u} - v^2\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\right),\ X_2 f = \frac{\partial f}{\partial u},\ X_3 f = e^{u}\frac{\partial f}{\partial v} \tag{4'}$$

și structura (3) [1]****).

*) p. 345.
**) p. 577.
***) p. 545.
****) p. 574.

În această lucrare vom determina schimbările de variabile care transformă grupurile date de V r ă n c e a n u în grupurile date de B i a n c h i.

În partea a doua a lucrării arătăm că orice grup în două variabile, real, cu structura (1) este tranzitiv și prin schimbări de variabile poate fi adus să aibă transformările infinitezimale (2). De asemenea, determinăm transformările infinitezimale ale grupurilor reale în două variabile intranzitive cu structura (3) și arătăm că grupurile tranzitive cu aceeași structură pot fi aduse să aibă transformările infinitezimale (4).

În partea a treia demonstrăm că orice grup simplu tranzitiv în trei variabile cu structura (1) sau (3) poate fi adus, prin schimbări de variabile, la forma (2′), respectiv (3′), ale lui B i a n c h i, iar orice grup intranzitiv G_3 în trei variabile cu structura (1) la forma (2″) a lui B i a n c h i. Apoi determinăm transformările infinitezimale ale grupurilor intranzitive G_3 în trei variabile cu structura (3).

Demonstrațiile din părțile a doua și a treia a lucrării ne sînt necesare la anumite probleme de geometrie integrală în spații riemanniene [3].

I

Vom determina schimbarea de variabile

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v) \tag{7}$$

care să transforme expresiile (6) cu $k = 1$ în expresiile (2).

Dacă notăm cu $\xi_h^i(x)$ coeficienții transformărilor infinitezimale (2) și cu $\eta_h^i(u)$ coeficienții transformărilor infinitezimale (6) ($k = 1$), avem [1]*)

$$\xi_h^i(x) = \eta_h^1(u)\frac{\partial \varphi_i}{\partial u} + \eta_h^2(u)\frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \qquad (i = 1, 2\,;\ h = 1, 2, 3) \tag{8}$$

Înlocuind aici expresiile (2) și (6) ($k = 1$) obținem sistemul

$$\begin{cases} v\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} - u\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} = -1, \quad \sqrt{1-u^2-v^2}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} = -\sin x \operatorname{cotg} y, \\ \sqrt{1-u^2-v^2}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \cos x \operatorname{cotg} y, \quad v\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} - u\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} = 0, \\ \sqrt{1-u^2-v^2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \cos x, \quad \sqrt{1-u^2-v^2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \sin x. \end{cases} \tag{9}$$

Eliminînd derivatele $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}$ și $\frac{\partial \varphi_i}{\partial v}$ din primele trei ecuații și din ultimele trei, obținem sistemul

$$\begin{cases} v\cos x - u\sin x = 0 \\ (v\sin x + u\cos x)\operatorname{cotg} y = \sqrt{1-u^2-v^2} \end{cases}$$

*) p. 164.

de unde deducem

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \dfrac{v}{u}, & \cos y = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases}$$

deci

$$\begin{cases} x = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{v}{u}, & y = \operatorname{Arc\,cos} \sqrt{u^2 + v^2}. \end{cases} \tag{10}$$

Înlocuind aceste valori în sistemul (9) acesta este identic verificat. Deci, *făcînd schimbarea de variabile (10), grupul (6) ($k = 1$) devine identic cu grupul (2).*

Vom determina acum transformările (7) care să identifice formele date de B i a n c h i și de V r ă n c e a n u pentru grupul de mișcări al unui spațiu V_2 cu curbura constantă negativă.

Pentru aceasta vom face în formulele (4), schimbarea

$$X_1 = Z - Y, \quad X_2 = -X, \quad X_3 = Y + Z \tag{11}$$

care transformă structura (3) în structura (5) ($k = -1$).

Cu această schimbare, transformările infinitezimale (4) devin

$$\begin{cases} Xf = -x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ Yf = \dfrac{x^2 - y^2 - 1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} + xy\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ Zf = \dfrac{x^2 - y^2 + 1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} + xy\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases} \tag{12}$$

Făcînd acum schimbarea de variabile (7), ecuațiile (8) devin

$$\begin{cases} \sqrt{1 + u^2 + v^2}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} = -x, \ \sqrt{1 + u^2 + v^2}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \dfrac{x^2 - y^2 - 1}{2}, \\ v\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} - u\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \dfrac{x^2 - y^2 + 1}{2}, \ \sqrt{1 + u^2 + v^2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} = -y, \\ \sqrt{1 + u^2 + v^2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} = xy, \ v\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} - u\dfrac{\partial \varphi^2}{\partial v} = xy. \end{cases} \tag{13}$$

Eliminînd derivatele $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u}$ și $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial v}$ dintre ecuațiile acestui sistem, obținem

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)(\sqrt{1 + u^2 + v^2} + u) + 2vx = u - \sqrt{1 + u^2 + v^2}, \\ x(\sqrt{1 + u^2 + v^2} + u) + v = 0 \end{cases}$$

de unde scoatem

$$x = \frac{v\,(u - \sqrt{1 + u^2 + v^2})}{1 + v^2}, \quad y = \frac{\sqrt{1 + u^2 + v^2} - u}{1 + v^2}. \tag{14}$$

Cu aceste valori, sistemul (13) devine identic satisfăcut.

Deci, *făcînd schimbările (11), (14) grupul (6) ($k = -1$) devine identic cu grupul (4).*

Rezultă

T e o r e m a 1. *Prin transformările (10), respectiv (11), (14), formele date de B i a n c h i și de V r ă n c e a n u pentru grupurile de mișcare ale spațiilor V_2 cu curbura constantă, devin identice.*

II

Fie acum în spațiul cu două dimensiuni (x^1, x^2) un grup definit de operatorii

$$X_h f = \xi_h^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (i = 1, 2\,;\ h = 1, 2, 3) \tag{15}$$

și structura (1).

Vom demonstra mai întîi

T e o r e m a 2. *Grupurile reale G_3 în două variabile cu structura (1) sînt tranzitive.*

Vom presupune deci că grupul (15) este intranzitiv.

În acest caz rangul matricii $\| \xi_h^i \|$ este 1, deci

$$\begin{cases} \xi_2^i(x) = \lambda(x)\,\xi_1^i(x), \\ \xi_3^i(x) = \mu(x)\,\xi_1^i(x) \end{cases}$$

unde funcțiile $\lambda(x)$ și $\mu(x)$ nu sînt în același timp constante.

Înlocuind aceste expresii în ecuațiile de structură (1) obținem relațiile

$$\xi_1^i\left(\xi_1^1 \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \xi_1^2 \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} - \mu\right) = 0,$$

$$\xi_1^i\left(\xi_1^1 \frac{\partial \mu}{\partial x^1} + \xi_1^2 \frac{\partial \mu}{\partial x^2} + \lambda\right) = 0,$$

$$\xi_1^i\left[\xi_1^1\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x^1} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial x^1}\right) + \xi_1^2\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial x^2}\right) - 1\right] = 0.$$

Avînd în vedere că nu putem avea în acelaşi timp $\xi_1^1 = \xi_1^2 = 0$, rezultă că avem

$$\begin{cases} \xi_1^1 \dfrac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \xi_1^2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial x^2} = \mu, \\ \xi_1^1 \dfrac{\partial \mu}{\partial x^1} + \xi_1^2 \dfrac{\partial \mu}{\partial x^2} = -\lambda, \\ \mu\left(\xi_1^1 \dfrac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \xi_1^2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial x^2}\right) - \lambda\left(\xi_1^1 \dfrac{\partial \mu}{\partial x^1} + \xi_1^2 \dfrac{\partial \mu}{\partial x^2}\right) + 1 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Înlocuind primele două relaţii din (16) în ultima, obţinem

$$\lambda^2 + \mu^2 + 1 = 0,$$

relaţie care este imposibilă, avînd în vedere că grupul este real.

Deci grupul (15) este tranzitiv.

Vom presupune

$$\begin{vmatrix} \xi_2^1 & \xi_2^2 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{17}$$

Făcînd deci o schimbare de variabile putem obţine

$$X_1 f = -\frac{\partial f}{\partial x^1}.$$

Avem deci $\xi_1^1 = -1$, $\xi_1^2 = 0$.

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile de structură (1) obţinem relaţiile

$$\xi_2^i = \frac{\partial \xi_3^i}{\partial x^1}, \quad \xi_3^i = -\frac{\partial \xi_2^i}{\partial x^1}. \tag{18}$$

Din aceste relaţii rezultă

$$\frac{\partial^2 \xi_2^i}{\partial (x^1)^2} + \xi_2^i = 0$$

deci

$$\xi_2^1 = A(x^2) \cos x^1 + B(x^2) \sin x^1, \quad \xi_2^2 = C(x^2) \cos x^1 + D(x^2) \sin x^1. \tag{19}$$

Din (18) şi (19) rezultă

$$\xi_3^1 = -B(x^2) \cos x^1 + A(x^2) \sin x^1, \xi_3^2 = -D(x^2) \cos x^1 + C(x^2) \sin x^1. \tag{19'}$$

Înlocuind relaţiile (19) şi (19') în ecuaţiile de structură obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dx^2} D - \dfrac{dD}{dx^2} C + AC + BD = 0, \\ \dfrac{dB}{dx^2} C - \dfrac{dA}{dx^2} D - A^2 - B^2 = 1. \end{cases} \tag{20}$$

De asemenea relaţia (17) devine $AD - BC \neq 0$, deci nu putem avea în acelaşi timp $C = 0$, $D = 0$.

Vom face acum o schimbare de variabile

$$x'^1 = \varphi^1 (x^1, x^2); \quad x'^2 = \varphi^2 (x^1, x^2).$$

Prin această schimbare, coeficienţii transformărilor infinitezimale devin

$$\eta'^i_h = \xi^j_h \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}$$

Pentru ca să avem $\eta'^1_1 = -1$, $\eta'^2_1 = 0$, trebuie deci să luăm

$$x'^1 = x^1 + \varphi (x^2), \quad x'^2 = \psi (x^2). \tag{21}$$

În acest caz avem

$$\begin{aligned} \eta'^1_2 &= \overline{A} \cos x'^1 + \overline{B} \sin x'^1, & \eta'^1_3 &= -\overline{B} \cos x'^1 + \overline{A} \sin x'^1 \\ \eta'^2_2 &= \overline{C} \cos x'^1 + \overline{D} \sin x'^1, & \eta'^2_3 &= -\overline{D} \cos x'^1 + \overline{C} \sin x'^1 \end{aligned} \tag{22}$$

unde am pus

$$\begin{cases} \overline{A} = (C \cos \varphi - D \sin \varphi) \dfrac{d\varphi}{dx^2} + A \cos \varphi - B \sin \varphi, \\ \overline{B} = (C \cos \varphi + D \sin \varphi) \dfrac{d\varphi}{dx^2} + A \cos \varphi + B \sin \varphi, \\ \overline{C} = (C \cos \varphi - D \sin \varphi) \dfrac{d\psi}{dx^2}, \\ \overline{D} = (C \cos \varphi + D \sin \varphi) \dfrac{d\psi}{dx^2}. \end{cases}$$

Vom lua funcţia $\varphi (x^2)$ soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$(C \cos \varphi - D \sin \varphi) \frac{d\varphi}{dx^2} + A \cos \varphi - B \sin \varphi = 0 \tag{23}$$

iar funcţia $\psi (x^2)$

$$\psi (x^2) = \int \frac{dx^2}{C \cos \varphi - D \sin \varphi}. \tag{24}$$

Deci făcînd schimbarea de variabile (21), (23), (24), coeficienţii transformărilor infinitezimale ale grupului (15) devin

$$\begin{aligned} &\eta'^1_1 = -1, \ \eta'^2_1 = 0, \\ &\eta'^1_2 = \overline{B} \sin x'^1, \ \eta'^2_2 = \cos x'^1 + \overline{D} \sin x'^1, \\ &\eta'^1_3 = -\overline{B} \cos x'^1, \ \eta'^2_3 = \sin x'^1 - \overline{D} \cos x'^1. \end{aligned} \tag{25}$$

Înlocuind aceste expresii în ecuațiile de structură (1) obținem

$$\frac{d\bar{B}}{dx'^2} - \bar{B}^2 - 1 = 0, \quad \frac{d\bar{D}}{dx'^2} - \bar{B}\bar{D} = 0$$

De aici rezultă

$$\bar{B} = \operatorname{tg}(x'^2 + \mu), \quad \bar{D} = \frac{\lambda}{\cos(x'^2 + \mu)}$$

λ și μ fiind constante.

Deci expresiile (25) se scriu

$$\eta_1^1 = -1, \quad \eta_1^2 = 0,$$

$$\eta_2^1 = \operatorname{tg}(x'^2 + \mu)\sin x'^1, \quad \eta_2^2 = \cos x'^1 + \frac{\lambda \sin x'^1}{\cos(x'^2 + \mu)},$$

$$\eta_3^1 = -\operatorname{tg}(x'^2 + \mu)\cos x'^1, \quad \eta_3^2 = \sin x'^1 - \frac{\lambda \cos x'^1}{\cos(x'^2 + \mu)}.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$x = x'^1 + \operatorname{Arc\,tg}\left[\frac{\lambda}{\cos(x'^2 + \mu)}\right] y = \operatorname{Arc\,cos}\left[\frac{\sin(x'^1 + \mu)}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}\right]$$

obținem transformările infinitezimale (15) sub forma (2).

Avem deci

T e o r e m a 3. *Orice grup real G_3 în două variabile cu structura (1) poate fi adus, prin schimbări de variabile, la forma (2) a lui B i a n c h i sau (6) ($k=1$) a lui V r ă n c e a n u.*

Fie acum un grup G_3 definit de operatorii (15) și cu structura (5) ($k = -1$). Vom determina mai întîi grupurile intranzitive cu această structură.

Avînd în vedere că ξ_1^1 și ξ_1^2 nu pot fi nule în același timp, rezultă că, printr-o schimbare de variabile, putem presupune $\xi_1^1 = -1$ $\xi_1^2 = 0$.

Presupunînd acum că grupul (15) este intranzitiv, rezultă că matricea $\| \xi_h^i \|$ are rangul 1, deci

$$\begin{cases} \xi_2^i(x) = \lambda(x)\, \xi_1^i(x) \\ \xi_3^i(x) = \mu(x)\, \xi_1^i(x) \end{cases}$$

sau, avînd în vedere presupunerea de mai sus

$$\xi_2^1(x) = -\lambda(x), \quad \xi_3^1(x) = -\mu(x), \quad \xi_2^2 = \xi_3^2 = 0,$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile de structură (5) ($k = -1$) obținem relațiile

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x^1} = \mu, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x^1} = \lambda, \quad \mu^2 - \lambda^2 = 1 \tag{26}$$

Din primele două relații din (26) rezultă

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial (x^1)^2} - \lambda = 0$$

deci

$$\lambda(x) = A(x^2)\, e^{x^1} + B(x^2)\, e^{-x^1}$$

și

$$\mu(x) = A(x^2)\, e^{x^1} - B(x^2)\, e^{-x^1}.$$

Înlocuind aceste expresii în ultima ecuație (26) obținem

$$AB = -\frac{1}{4}.$$

Rezultă că

$$\begin{cases} \lambda(x) = \dfrac{4A^2(x^2)\, e^{2x^1} - 1}{4A(x^2)\, e^{x^1}} \\ \mu(x) = \dfrac{4A^2(x^2)\, e^{2x^1} + 1}{4A(x^2)\, e^{x^1}}. \end{cases} \tag{27}$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$x = x^1 + \varphi(x^2),\ y = e^{x^1}.\ A(x^2),$$

unde $\varphi(x^2)$ este o funcție arbitrară care satisface relația

$$A(x^2)\frac{d\varphi}{dx^2} - \frac{dA}{dx^2} \neq 0,$$

transformările infinitezimale ale grupului devin

$$\begin{aligned} X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ X_2 f &= \frac{4y^2 - 1}{4y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ X_3 f &= \frac{4y^2 + 1}{4y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

Avem deci

Teorema 4. *Grupurile reale G_3 în două variabile, intranzitive, cu structura (5) ($k = -1$) au transformările infinitezimale (28).*

Se știe că un grup intranzitiv G_r poate fi grup de mișcări al unui spațiu V_n, dacă $r \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ [1]*). În cazul nostru avem $\frac{n(n-1)}{2} = 1 < r = 3$,

*) p. 515.

deci nu există nici un spațiu V_2 care să aibă grupul (28) ca grup de mișcări.

Ne vom ocupa acum de grupurile G_3 tranzitive cu structura (5) ($k = -1$).

Vom presupune deci că $\det \| \xi_b^a \| \neq 0$ ($a, b = 2, 3$). În acest caz, printr-o schimbare de variabile, avem

$$\xi_1^1 = -1, \quad \xi_1^2 = 0.$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile (5) ($k = -1$) obținem

$$\frac{\partial \xi_2^i}{\partial x^1} = \xi_3^i, \quad \frac{\partial \xi_3^i}{\partial x^1} = \xi_2^i. \tag{29}$$

De aici rezultă

$$\frac{\partial^2 \xi_2^i}{\partial (x^1)^2} - \xi_2^i = 0$$

și deci

$$\xi_2^1(x) = A(x^2)\, e^{x^1} + B(x^2)\, e^{-x^1}, \quad \xi_2^2(x) = C(x^2)\, e^{x^1} + D(x^2) e^{-x^1}. \tag{30}$$

Înlocuind aceste valori în (29) obținem

$$\xi_3^1(x) = A(x^2)\, e^{x^1} - B(x^2)\, e^{-x^1}, \quad \xi_3^2(x) = C(x^2)\, e^{x^1} - D(x^2)\, e^{-x^1}. \tag{31}$$

Avînd în vedere relațiile (30) și (31), din ecuațiile (5) ($k = -1$) rezultă

$$\begin{cases} D \dfrac{dA}{dx^2} - C \dfrac{dB}{dx^2} + 2AB = \dfrac{-1}{2} \\ D \dfrac{dC}{dx^2} - C \dfrac{dD}{dx^2} + AD + BC = 0, \end{cases}$$

iar condiția $\det \| \xi_b^a \| \neq 0$ ($a, b = 2, 3$) devine

$$AD - BC \neq 0. \tag{32}$$

Vom face acum schimbarea de variabile

$$x'^1 = x^1 + \varphi(x^2), \quad x'^2 = \psi(x^2).$$

Coeficienții transformărilor infinitezimale ale grupului G_3 devin

$$\eta_1^1 = -1, \quad \eta_1^2 = 0,$$
$$\eta_2^1 = \overline{A}\, e^{x'^1} + \overline{B}\, e^{-x'^1}, \quad \eta_2^2 = \overline{C}\, e^{x'^1} + \overline{D}\, e^{-x'^1},$$
$$\eta_3^1 = \overline{A}\, e^{x'^1} - \overline{B}\, e^{-x'^1}, \quad \eta_3^2 = \overline{C}\, e^{x'^1} - \overline{D}\, e^{-x'^1},$$

unde am pus

$$\begin{cases} \bar{A} = \left(A + C \frac{d\varphi}{dx^2} \right) e^{-\varphi} \\ \bar{B} = \left(B + D \frac{d\varphi}{dx^2} \right) e^{\varphi} \\ \bar{C} = C\, e^{-\varphi} \frac{d\psi}{dx^2} \\ \bar{D} = D\, e^{\varphi} \frac{d\psi}{dx^2} \end{cases}$$

Avînd în vedere neegalitatea (32) rezultă că nu putem avea în acelaşi timp $C = 0$ $D = 0$. Vom presupune deci că $D \neq 0$.

Determinăm funcţiile $\varphi(x^2)$ şi $\psi(x^2)$ cu condiţiile

$$\bar{B} = 0, \quad \bar{A}\bar{D} = 1.$$

În acest caz avem

$$\varphi(x^2) = -\int \frac{B(x^2)}{D(x^2)} d\, x^2, \quad \psi(x^2) = \int \frac{dx^2}{AD - BC}.$$

Făcînd deci schimbarea de variabile

$$x'^1 = x^1 - \int \frac{B(x^2)}{D(x^2)} dx^2, \quad x'^2 = \int \frac{dx^2}{AD - BC}$$

coeficienţii transformărilor infinitezimale ale grupului G_3 devin

$$\eta_1^1 = -1, \quad \eta_1^2 = 0,$$

$$\eta_2^1 = \bar{A}\, e^{x'^1}, \quad \eta_2^2 = \bar{C}\, e^{x'^1} + \frac{1}{\bar{A}\, e^{x'^1}}$$

$$\eta_3^1 = \bar{A}\, e^{x'^1}, \quad \eta_3^2 = \bar{C}\, e^{x'^1} - \frac{1}{\bar{A}\, e^{x'^1}}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile (5) ($k = -1$) obţinem relaţiile

$$\bar{D} \frac{d\bar{A}}{dx'^2} = \frac{-1}{2}, \quad \bar{D} \frac{d\bar{C}}{dx'^2} - \bar{C} \frac{d\bar{D}}{dx'^2} = -1$$

cu soluţia

$$\bar{C} = \mu e^{\frac{x'^2}{2}} + e^{-\frac{x'^2}{2} - \lambda}, \quad \bar{D} = e^{\frac{x'^2}{2} + \lambda},$$

unde λ şi μ sînt constante.

Avem deci

$$\eta_1^1 = -1, \quad \eta_1^2 = 0,$$

$$\eta_2^1 = e^{x'^1 - \frac{x'^2}{2} - \lambda}, \quad \eta_2^2 = \mu e^{x'^1 + \frac{x'^2}{2}} + e^{x'^1 - \frac{x'^2}{2} - \lambda} + e^{-x'^1 + \frac{x'^2}{2} + \lambda},$$

$$\eta_3^1 = e^{x'^1 - \frac{x'^2}{2} - \lambda}, \quad \eta_3^2 = \mu e^{x'^1 + \frac{x'^2}{2}} + e^{x'^1 - \frac{x'^2}{2} - \lambda} - e^{-x'^1 + \frac{x'^2}{2} + \lambda}.$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$x = e^{x'^1 - \frac{x'^2}{2} - \lambda}, \quad y = \sqrt{\mu}\, e^{x'^1 - \frac{\lambda}{2}}$$

transformările infinitezimale ale grupului devin identice cu (12).

Rezultă

T e o r e m a 5. *Orice grup real G_3 în două variabile, tranzitiv, cu structura (5) ($k = -1$), poate fi adus, prin schimbări de variabile la forma (12) a lui B i a n c h i sau (6) ($k = -1$) a lui V r ă n c e a n u.*

III

Fie în spațiul cu trei dimensiuni (x^1, x^2, x^3) un grup G_3 definit de operatorii

$$X_h f = \xi_h^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (i, h = 1, 2, 3) \tag{33}$$

cu structura (1). Printr-o schimbare de variabile putem presupune

$$X_1 f = -\frac{\partial f}{\partial x^1}, \tag{34}$$

deci $\xi_1^1 = -1$, $\xi_1^2 = \xi_1^3 = 0$.

În acest caz ecuațiile $(X_1 X_2) = X_3$ și $(X_3 X_1) = X_2$ devin

$$\frac{\partial \xi_2^i}{\partial x^1} = -\xi_3^i, \quad \frac{\partial \xi_3^i}{\partial x^1} = \xi_2^i.$$

De aici rezultă relația

$$\frac{\partial^2 \xi_2^i}{\partial (x')^2} + \xi_2^i = 0,$$

care ne dă

$$\xi_2^i(x) = A_i(x^2, x^3) \cos x^1 + B_i(x^2, x^3) \sin x^1$$

și deci

$$\xi_3^i(x) = A_i(x^2, x^3) \sin x^1 - B_i(x^2, x^3) \cos x^1.$$

Înlocuind aceste valori în ecuația $(X_2X_3) = X_1$, obținem sistemul

$$\begin{cases} A_1^2 + B_1^2 - A_2\frac{\partial B_1}{\partial x^2} + B_2\frac{\partial A_1}{\partial x^2} - A_3\frac{\partial B_1}{\partial x^3} + B_3\frac{\partial A_1}{\partial x^3} + 1 = 0 \\ A_1A_2 + B_1B_2 - A_2\frac{\partial B_2}{\partial x^2} + B_2\frac{\partial A_2}{\partial x^2} - A_3\frac{\partial B_2}{\partial x^3} + B_3\frac{\partial A_2}{\partial x^3} = 0 \\ A_1A_3 + B_1B_3 - A_2\frac{\partial B_3}{\partial x_2} + B_2\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - A_3\frac{\partial B_3}{\partial x^3} + B_3\frac{\partial A_3}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \tag{35}$$

Vom face schimbarea de variabile

$$x'^1 = x^1 + \varphi^1(x^2, x^3),\ x'^2, = \varphi^2(x^2, x^3),\ x'^3 = \varphi^3(x^2, x^3), \tag{36}$$

care conservă relația (34).

În acest caz coeficienții transformărilor infinitezimale ale grupului (33) devin

$$\eta_1^1 = -1,\ \eta_1^2 = \eta_1^3 = 0$$
$$\eta_2^i = \overline{A}_i \cos x'^1 + \overline{B}_i \sin x'^1$$
$$\eta_3^i = \overline{A}_i \sin x'^1 - \overline{B}_i \cos x'^1$$

unde am notat

$$\begin{cases} \overline{A}_1 = A_1\cos\varphi^1 - B_1\sin\varphi^1 + (A_2\cos\varphi^1 - B_2\sin\varphi^1)\frac{\partial\varphi^1}{\partial x^2} + \\ \quad + (A_3\cos\varphi^1 - B_3\sin\varphi^1)\frac{\partial\varphi^1}{\partial x^3} \\ \overline{B}_1 = A_1\sin\varphi^1 - B_1\cos\varphi^1 + (A_2\sin\varphi^1 + B_2\cos\varphi^1)\frac{\partial\varphi^1}{\partial x^2} + \\ \quad + (A_3\sin\varphi^1 + B_3\cos\varphi^1)\frac{\partial\varphi^1}{\partial x^3} \\ \overline{A}_k = (A_2\cos\varphi^1 - B_2\sin\varphi^1)\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^2} + (A_3\cos\varphi^1 - B_3\sin\varphi^1)\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^3} \\ \overline{B}_k = (A_2\sin\varphi^1 + B_2\cos\varphi^1)\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^2} + (A_3\sin\varphi^1 + B_3\cos\varphi^1)\frac{\partial\varphi^k}{\partial x^3}. \end{cases} \quad (k = 2, 3)$$

Vom determina funcțiile $\varphi^i\ (x^2, x^3)\ (i = 1, 2, 3)$ din ecuațiile

$$\begin{cases} (A_2\cos\varphi' - B_2\sin\varphi^1)\frac{\partial\varphi^1}{\partial x^2} + (A_3\cos\varphi^1 - B_3\sin\varphi^1)\frac{\partial\varphi^1}{\partial x^3} + \\ \quad + (A_1\cos\varphi^1 - B_1\sin\varphi^1) = 0 \\ (A_2\cos\varphi^1 - B_2\sin\varphi^1)\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2} + (A_3\cos\varphi^1 - B_3\sin\varphi^1)\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^3} = 0 \\ (A_2\cos\varphi^1 - B_2\sin\varphi^1)\frac{\partial\varphi^3}{\partial x^2} + (A_3\cos\varphi^1 - B_3\sin\varphi^1)\frac{\partial\varphi^3}{\partial x^3} = 1. \end{cases} \tag{37}$$

Deci făcînd schimbarea de variabile (36), (37) obținem

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = 0, \quad A_3 = 1.$$

Sistemul (35) devine, în acest caz,

$$\frac{\partial \bar{B}_1}{\partial x'^3} = \bar{B}_1^2 + 1, \quad \frac{\partial \bar{B}_2}{\partial x'^3} = \bar{B}_1 \bar{B}_2, \quad \frac{\partial \bar{B}_3}{\partial x'^3} = \bar{B}_1 \bar{B}_3$$

care ne dă

$$\bar{B}_1 = \operatorname{tg}\ [x'^3 + f_1(x'^2)], \quad \bar{B}_2 = \frac{f_2(x'^2)}{\cos\ [x'^3 + f_1(x'^2)]}, \quad \bar{B}_3 = \frac{f_3(x'^2)}{\cos\ [x'^3 + f_1(x'^2)]}.$$

Funcțiile $\eta_h^i(x')$ sînt deci

$$\eta_1^1 = -1, \quad \eta_1^2 = \eta_1^3 = 0,$$

$$\eta_2^1 = \operatorname{tg}\ [x'^3 + f_1(x'^2)] \sin x'^1, \quad \eta_2^2 = \frac{f_2(x'^2) \sin x'^1}{\cos\ [x'^3 + f_1(x'^2)]},$$

$$\eta_2^3 = \cos x'^1 + \frac{f_3(x'^2) \sin x'^1}{\cos\ [x'^3 + f_1(x'^2)]}, \tag{38}$$

$$\eta_3^1 = -\operatorname{tg}\ [x'^3 + f_1(x'^2)] \cos x'^1, \quad \eta_3^2 = -\frac{f_2(x'^2) \cos x'^1}{\cos\ [x'^3 + f_1(x'^2)]},$$

$$\eta_3^3 = \sin x'^1 - \frac{f_3(x'^2) \cos x'^1}{\cos\ [x'^3 + f_1(x'^2)]}.$$

Cu aceste valori avem

$$\det \| \eta_h^i \| = \frac{f_2(x'^2)}{\cos\ [x'^3 + f_1(x'^2)]}$$

deci grupul este intranzitiv sau tranzitiv, după cum $f_2(x'^2)$ este nulă sau nu.

Vom considera întîi cazul în care $f_2(x'^2) = 0$, deci cazul în care grupul este intranzitiv. Făcînd schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = x'^1 - \operatorname{Arc\ tg} \dfrac{f_3(x'^2)}{\cos\ [x'^3 + f_1(x'^2)]} \\ y = x'^2 \\ z = \operatorname{Arc\ tg} \dfrac{\sqrt{[f_3(x'^2)]^2 + \cos^2 [x'^3 + f_1(x'^2)]}}{\sin\ [x'^3 + f_1(x'^2)]} \end{cases}$$

transformările infinitezimale ale grupului devin

$$X_1 f = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$X_2 f = -\sin x \operatorname{cotg} z \frac{\partial f}{\partial x} + \cos x \frac{\partial f}{\partial z} \tag{39}$$

$$X_3 f = \cos x \operatorname{cotg} z \frac{\partial f}{\partial x} + \sin x \frac{\partial f}{\partial z}.$$

și sînt identice cu (2'').

Avem deci

T e o r e m a 6. *Orice grup real G_3, în trei variabile, intranzitiv, cu structura (1), poate fi adus, prin schimbări de variabile, la forma (2'') a lui B i a n c h i.*

Ne vom ocupa acum de cazul în care $f_2(x'^2) \neq 0$, deci grupul este tranzitiv.

În acest caz vom face transformarea

$$x = x'^1,\ y = x'^2,\ z = x'^3 + f_1(x'^2) - \frac{\pi}{2}.$$

Cu aceasta expresiile (38) devin

$$\zeta_1^1 = -1,\ \zeta_1^2 = \zeta_1^3 = 0$$

$$\zeta_2^1 = -\sin x \operatorname{cotg} z,\ \zeta_2^2 = -\frac{\lambda(y) \sin x}{\sin z},\ \zeta_2^3 = \cos x - \frac{\mu(y) \sin x}{\sin z}$$

$$\zeta_3^1 = \cos x \operatorname{cotg} z,\ \zeta_3^2 = \frac{\lambda(y) \cos x}{\sin z},\ \zeta_3^3 = \sin x + \frac{\mu(y) \cos x}{\sin z}$$

unde am pus $\lambda(y) = f_2(y)$, $\mu(y) = f_2(y) \frac{df_1}{dy} + f_3(y)$.

Vom face acum schimbarea de variabile

$$u = x + f(y, z),\ v = \varphi(y, z),\ w = \psi(y, z)$$

și vom determina funcțiile f, φ și ψ astfel încît transformările infinitezimale ale grupului să devină

$$X_1 f = -\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$X_2 f = -\sin u \operatorname{cotg} w \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\sin u}{\sin w} \frac{\partial f}{\partial v} + \cos u \frac{\partial f}{\partial w} \tag{40}$$

$$X_3 f = \cos u \operatorname{cotg} w \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\cos u}{\sin w} \frac{\partial f}{\partial v} + \sin u \frac{\partial f}{\partial w}$$

Pentru aceasta trebuie să avem

$$\left\{\begin{array}{l} -\sin x \operatorname{cotg} z - \dfrac{\lambda(y)\sin x}{\sin z}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \left[\cos x - \dfrac{\mu(y)\sin x}{\sin z}\right]\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\sin u \operatorname{cotg} w \\ \cos x \operatorname{cotg} z + \dfrac{\lambda(y)\cos x}{\sin z}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \left[\sin x + \dfrac{\mu(y)\cos x}{\sin z}\right]\dfrac{\partial f}{\partial z} = \cos u \operatorname{cotg} w \\ -\dfrac{\lambda(y)\sin x}{\sin z}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \left[\cos x - \dfrac{\mu(y)\sin x}{\sin z}\right]\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = -\dfrac{\sin u}{\sin w} \\ \dfrac{\lambda(y)\cos x}{\sin z}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \left[\sin x - \dfrac{\mu(y)\cos x}{\sin z}\right]\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \dfrac{\cos u}{\sin w} \\ -\dfrac{\lambda(y)\sin x}{\sin z}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \left[\cos x - \dfrac{\mu(y)\sin x}{\sin z}\right]\dfrac{\partial \psi}{\partial z} = \cos u \\ \dfrac{\lambda(y)\cos x}{\sin z}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \left[\sin x + \dfrac{\mu(y)\cos x}{\sin z}\right]\dfrac{\partial \psi}{\partial z} = \sin u \end{array}\right. \tag{41}$$

Sistemul (41) se mai poate scrie

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{[\mu(y)\sin f + \cos f \sin z]\operatorname{cotg}\psi - \cos z}{\lambda(y)}\,; \quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = -\sin f \operatorname{cotg}\psi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\mu(y)\sin f + \cos f \sin z}{\lambda(y)\sin\psi}\,; \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = -\dfrac{\sin f}{\sin\psi} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{\sin f \sin z - \mu(y)\cos f}{\lambda(y)}\,; \quad \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = \cos f. \end{array}\right. \tag{42}$$

Sistemul (42) este un sistem cu diferențiale totale complet integrabil, deci admite soluții depinzînd de constante arbitrare.

Rezultă că putem găsi o schimbare de variabile astfel încît transformările infinitezimale ale grupului să fie puse sub forma (40) care este identică cu forma (2′).

Avem deci

T e o r e m a 7. *Orice grup real G_3 în trei variabile, tranzitiv, cu structura (1) poate fi adus, prin schimbări de variabile la forma (2′) a lui B i a n c h i.*

Vom presupune acum că grupul (33) are structura (5) ($k = -1$) și că am făcut schimbarea de variabile astfel încît să avem

$$X_1 f = -\frac{\partial f}{\partial x^1}.$$

Înlocuind această relație în ecuațiile $(X_1 X_2) = -X_3$ și $(X_3 X_1) = X_2$, obținem

$$\frac{\partial \xi_2^i}{\partial x^1} = \xi_3^i, \quad \frac{\partial \xi_3^i}{\partial x^1} = \xi_2^i.$$

De aici deducem

$$\frac{\partial^2 \xi_2^i}{\partial (x^1)^2} - \xi_2^i = 0$$

și deci

$$\begin{cases} \xi_2^i(x) = A_i(x^2, x^3)\, e^{x^1} + B_i(x^2, x^3)\, e^{-x^1} \\ \xi_3^i(x) = A_i(x^2, x^3)\, e^{x^1} - B_i(x^2, x^3)\, e^{-x^1} \end{cases}$$

Avînd în vedere aceste relații, ecuația $(X_2\ X_3) = X_1$ ne dă

$$\begin{cases} 2\, A_1 B_1 - A_2 \frac{\partial B_1}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - A_3 \frac{\partial B_1}{\partial x^3} + B_3 \frac{\partial A_1}{\partial x^3} + \frac{1}{2} = 0 \\ A_1 B_2 + A_2 B_1 - A_2 \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial A_2}{\partial x^2} - A_3 \frac{\partial B_2}{\partial x^3} + B_3 \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = 0 \\ A_1 B_3 + A_3 B_1 - A_2 \frac{\partial B_3}{\partial x^2} + B_2 \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - A_3 \frac{\partial B_3}{\partial x^3} + B_3 \frac{\partial A_3}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Făcînd schimbarea de variabile (36), coeficienții transformărilor infinitezimale devin

$$\eta_1^1 = -1, \quad \eta_1^2 = \eta_1^3 = 0$$

$$\eta_2^i = \bar{A}_i e^{x'^1} + \bar{B}_i e^{-x'^1}$$

$$\eta_3^i = \bar{A}_i e^{x'^1} - \bar{B}_i e^{-x'^1}$$

unde am pus

$$\bar{A}_1 = \left(A_1 + A_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^3}\right) e^{-\varphi^1}, \quad \bar{B}_1 = \left(B_1 + B_2 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} + B_3 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^3}\right) e^{\varphi^1}$$

$$\bar{A}_k = \left(A_2 \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^3}\right) e^{-\varphi^1}, \quad \bar{B}_k = \left(B_2 \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^2} + B_3 \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^3}\right) e^{\varphi^1}. \quad (k = 2, 3)$$

Vom determina funcțiile $\varphi^i(x^2, x^3)$ $(i = 1, 2, 3)$ din ecuațiile

$$\begin{cases} A_2 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^3} + A_1 = 0 \\ A_2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^3} = 0 \\ \left(B_1 + B_2 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} + B_3 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^3}\right)\left(A_2 \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^3}\right) = 1. \end{cases} \quad (44)$$

Deci, făcînd schimbarea de variabile (36), (44) obținem

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = 0, \quad \bar{A}_3 \bar{B}_1 = 1.$$

Sistemul (43) devine în acest caz

$$\frac{\partial \operatorname{Ln} \bar{B}_1}{\partial x'^3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \bar{B}_2}{\partial x'^3} = 0, \quad \bar{B}_2 \frac{\partial \bar{A}_3}{\partial x'^2} - \bar{A}_3 \frac{\partial \bar{B}_3}{\partial x'^3} + \bar{B}_3 \frac{\partial \bar{A}_3}{\partial x'^3} = -1$$

care ne dă

$$\bar{B}_1 = e^{\lambda_1(x'^2) + \frac{x'^3}{2}}, \quad \bar{B}_2 = \lambda_2(x'^2), \quad \bar{A}_3 = e^{-\lambda_1(x'^2) - \frac{x'^3}{2}},$$

$$\bar{B}_3 = -2\lambda_2(x'^2) \frac{d\lambda_1}{dx'^2} + \lambda_3(x'^2) e^{-\frac{x'^3}{2}} + e^{\lambda_1(x'^2) + \frac{x'^3}{2}}.$$

Rezultă că coeficienții transformărilor infinitezimale sînt

$$\eta_1^1 = -1, \quad \eta_2^1 = e^{\lambda_1 - x'^1 + \frac{x'^3}{2}}, \quad \eta_3' = -e^{\lambda_1 - x'^1 + \frac{x'^3}{2}},$$

$$\eta_1^2 = 0, \quad \eta_2^2 = \lambda_2 e^{-x'^1}, \quad \eta_3^2 = -\lambda_2 e^{-x'^1},$$

$$\eta_1^3 = 0, \quad \eta_2^3 = e^{x'^1 - \frac{x'^3}{2} - \lambda_1} - 2\lambda_2 \frac{d\lambda_1}{dx'^2} e^{-x'^1} + \lambda_3 e^{-\frac{x'^3}{2} - x'^1} + e^{\lambda_1 - x'^1 + \frac{x'^3}{2}}$$

$$\eta_3^3 = e^{x'^1 - \frac{x'^3}{2} - \lambda_1} + 2\lambda_2 \frac{d\lambda_1}{dx'^2} e^{-x'^1} - \lambda_3 e^{-\frac{x'^3}{2} - x'^1} - e^{\lambda_1 - x'^1 + \frac{x'^3}{2}}.$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$x = -x'^1 + \frac{\lambda_1(x'^2)}{2}, \quad y = x'^2, \quad z = \frac{x'^3}{2} + \frac{\lambda_1(x'^2)}{2}$$

transformările infinitezimale devin

$$\begin{aligned}
Xf &= \frac{\partial f}{\partial x} \\
Yf &= -[e^{x+z} + \psi_1(y) e^x] \frac{\partial f}{\partial x} + \psi_2(y) e^x \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}[e^{-x-z} + e^{x+z} + \\
&\quad + 2\psi_1(y) e^x + \psi_3(y) e^{x-z}] \frac{\partial f}{\partial z} \\
Zf &= [e^{x+z} + \psi_1(y) e^x] \frac{\partial f}{\partial x} - \psi_2(y) e^x \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}[e^{-x-z} - e^{x+z} - \\
&\quad - 2\psi_1(y) e^x - \psi_3(y) e^{x-z}] \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned} \tag{45}$$

unde am pus $\psi_1(y) = \lambda_2 \frac{de^{-\frac{\lambda_1}{2}}}{dy}$, $\psi_2(y) = \lambda_2 e^{-\frac{\lambda_1}{2}}$, $\psi_3(y) = \lambda_3$.

Cu aceste valori avem $\det \| \xi_h^i \| = \frac{\psi_2(y)}{e^z}$.

Vom presupune întîi că $\psi_2(y) \neq 0$, deci că grupul este tranzitiv. În acest caz vom determina schimbarea de variabile

$$u = \varphi_1(x, y, z), \quad v = \varphi_2(x, y, z), \quad w = \varphi_3(x, y, z)$$

astfel încît să avem

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -1, \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0 \\ e^x [e^z + \psi_1(y)] + e^x \psi_2(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{1}{2} [e^{-x-z} + e^{x+z} + 2\psi_1(y) e^x + \\ \quad + \psi_3(y) e^{x-z}] \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \varphi_2 \cdot e^{-\varphi_1} \\ -e^x [e^z + \psi_1(y)] - e^x \psi_2(y) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{1}{2} [e^{-x-z} - e^{x+z} - 2\psi_1(y) e^x - \\ \quad - \psi_3(y) e^{x-z}] \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\varphi_2 e^{-\varphi_1} \\ 2e^x \psi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + [e^{-x-z} + e^{x+z} + 2\psi_1(y) e^x + \psi_3(y) e^{x-z}] \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = e^{\varphi_1} + \varphi_2^2 e^{-\varphi_1} \\ -2e^x \psi_2(y) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + [e^{-x-z} - e^{x+z} - 2\psi_1(y) e^x - \psi_3(y) e^{x-z}] \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = e^{\varphi_1} - \varphi_2^2 e^{-\varphi_1} \\ 2e^x \psi_2(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + [e^{-x-z} + e^{x+z} + 2\psi_1(y) e^x + \psi_3(y) e^{x-z}] \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = -e^{-\varphi_1} \\ -2e^x \psi_2(y) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + [e^{-x-z} - e^{x+z} - 2\psi_1(y) e^x - \psi_3(y) e^{x-z}] \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = e^{-\varphi_1}. \end{cases} \tag{46}$$

Din acest sistem deducem

$$\varphi_1(x, y, z) = -x + \mu_1(y), \ \varphi_2(x, y, z) = e^{z+\mu_1(y)} + \mu_2(y), \ \varphi_3(x, y, z) = \mu_3(y)$$

unde funcțiile $\mu_i(y)$ $(i = 1, 2, 3)$ sînt date de sistemul

$$\begin{cases} \frac{d\mu_1}{dy} = \frac{\mu_2 e^{-\mu_1} - \psi_1}{\psi_2} \\ \frac{d\mu_2}{dy} = \frac{\mu_2^2 e^{-\mu_1} - \psi_3 e^{\mu_1}}{2\psi_2} \\ \frac{d\mu_3}{dy} = -\frac{e^{-\mu_1}}{2\psi_2} \end{cases} \tag{47}$$

Făcînd deci schimbarea de variabile

$$u = -x + \mu_1(y),\ v = e^{z+\mu_1(y)} + \mu_2(y),\ w = \mu_3(y) \tag{48}$$

unde $\mu_i(y)$ $(i = 1, 2, 3)$ sînt dați de sistemul (47), transformările infinitezimale ale grupului devin

$$\begin{aligned} Xf &= -\frac{\partial f}{\partial u} \\ Yf &= ve^{-u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}(e^u + v^2e^{-u})\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}e^{-u}\frac{\partial f}{\partial w} \\ Zf &= -ve^u\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}(e^u - v^2e^{-u})\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2}e^{-u}\frac{\partial f}{\partial w} \end{aligned} \tag{49}$$

Făcînd acum transformarea

$$X_1 = Z - Y,\ X_2 = -X,\ X_3 = Y + Z,$$

structura (5) $(k = -1)$ devine structura (3) iar transformările infinitezimale (49) devin identice cu (4′).

Avem deci

Teorema 8. *Orice grup real G_3 în trei variabile, tranzitiv, cu structura (3), poate fi adus, prin schimbări de variabile, la forma (4′) a lui Bianchi.*

Ne vom ocupa acum de cazul în care grupul este intranzitiv, deci $\psi_2(y) = 0$.

În acest caz făcînd schimbarea de variabile

$$u = e^{x+z} + \psi_1(y)\,e^x,\ v = e^{-x-z} + \alpha(y),\ w = e^{x+z} + 2\psi_1(y)e^x + \psi_3(y)e^{x-z},$$

unde $\alpha(y)$ este o funcție arbitrară care satisface la condiția

$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \neq 0$, expresiile (45) devin

$$\begin{aligned} X_1f &= u\frac{\partial f}{\partial u} - v\frac{\partial f}{\partial v} + w\frac{\partial f}{\partial w} \\ X_2f &= \left(\frac{1}{2} - u^2 + \frac{w}{2v}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{v}{2}(2u - v - w)\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{2uv - vw - w^2}{2}\frac{\partial f}{\partial w} \\ X_3f &= \left(\frac{1}{2} + u^2 - \frac{w}{2v}\right)\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{v}{2}(2u + v - w)\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{2uv - vw + w^2}{2}\frac{\partial f}{\partial w}. \end{aligned} \tag{50}$$

Avem deci

Teorema 9. *Grupurile reale G_3 în trei variabile, intranzitive, cu structura (5) $(k = -1)$, au transformările infinitezimale (50).*

О ГРУППАХ ДВИЖЕНИЙ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ V_2 ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

РЕЗЮМЕ

Известно, что группа движений риманового пространства V_2 постоянной кривизны является трехпараметрической группой.

В 1928 Л. Бианки доказал, что пространство V_2 положительной постоянной кривизны $K = 1$ обладает группой движений со строением (1) и с бесконечно малыми преобразованиями (2), а пространство V_2 отрицательной кривизны — группой G_3 со строением (3) и бесконечно малыми преобразованиями (4).

В 1957 году проф. Г. Врэнчану доказал, что группа движений пространства V_2 постоянной кривизны K обладает строением (5) и бесконечно малыми преобразованиями (6).

В первой части настоящей работы автор определяет замены переменных, преобразующие данную Врэнчану группу (6) в группы (2) и (4) Бианки.

Во второй части работы доказывается, что любая действительная группа с двумя переменными и со строением (1) транзитивна и при помощи замены переменных можно добиться, чтобы она обладала бесконечно малыми преобразованиями (2). Кроме этого, определяются бесконечно малые преобразования интранзитивных действительных групп с двумя переменными и со строением (3) и доказывается, что транзитивные группы с этим строением могут быть приведены к виду, в котором они допускают бесконечно малые преобразования (4).

В третьей части доказывается, что любая просто транзитивная группа с тремя переменными и со строением (1) или(3), может быть приведена при помощи замен переменных к виду (2′), соответственно (4′) Бианки, а любая интранзитивная группа G_3 с тремя переменными и со строением (1) к виду (2″) Бианки. Затем определяются бесконечно малые преобразования интранзитивных групп с тремя переменными и со строением (3).

SUR LES GROUPES DE MOUVEMENT DES ESPACES RIEMANNIENS V_2 À COURBURE CONSTANTE

RÉSUMÉ

On sait que le groupe de mouvement d'un espace riemannien V_2 à courbure constante est un groupe à trois paramètres.

L. Bianchi a démontré en 1928 qu'un espace V_2 à courbure constante positive $K = 1$, a comme groupe de mouvement un groupe G_3 à structure (1) et à transformations infinitésimales (2), tandis qu'un espace

V_2 à courbure constante négative a un groupe G_3 ayant la structure (3) et les transformations infinitésimales (4).

G. Vrănceanu a prouvé en 1957 que le groupe de mouvement d'un espace V_2, à courbure constante K, a la structure (5) et les transformations infinitésimales (6).

Dans la première partie du travail, l'auteur a déterminé les changements de variables transformant le groupe (6) de Vrănceanu en groupes (2) et (4) de Bianchi.

Dans la seconde partie, il montre que tout groupe à deux variables, réel, et ayant la structure (1), est transitif, et que des changements de variables peuvent lui valoir les transformations infinitésimales (2). Il détermine également les transformations infinitésimales des groupes réels, à deux variables, intransitifs et ayant structure (3); il montre aussi que les groupes transitifs de même structure peuvent acquérir les transformations infinitésimales (4).

Dans la troisième partie, il démontre que tout groupe simplement transitif et ayant trois variables à structure (1) ou (3), peut être amené, par des changements de variables, à la forme (2′) respectivement (4′), de Bianchi; et tout groupe intransitif G_3, à trois variables, ayant la structure (1), a la forme (2″) de Bianchi. Il détermine ensuite les transformations infinitésimales des groupes intransitifs G_3 à trois variables à structure (3).

BIBLIOGRAFIE

1. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni*. Bologna, 1928.
2. G. VRĂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, vol. I, Bucarest, 1957.
3. M. STOKA, *Integralgeometrie in einem Riemannschen Raum V_n*, Revue de Mathématiques pures et appliquées Acad. R.P.R., 1960, **5**, *1*.

ASUPRA UNEI DEFINIȚII A GRUPULUI DE COOMOLOGIE AL UNUI SPAȚIU TOPOLOGIC

DE

ARISTIDE DELEANU

Jean Leray a dat în 1944, în memoriul [1], prima definiție a inelului de coomologie al unui spațiu topologic bazată pe noțiunea de cuvertură. De atunci, teoria cuverturilor a fost mult perfecționată; totuși definiția dată în [1] rămîne importantă datorită faptului că ea servește la construirea teoriei punctelor fixe. Scopul notei de față este de a relua și preciza această definiție, în lumina dezvoltărilor ulterioare ale teoriei axiomatice a coomologiei.

Fie E un spațiu topologic și A un inel comutativ cu element unitate, care este domeniu de integritate. Fie $\mathfrak{K}$ un A-modul liber avînd o bază $(e_i^p)_{i,p=0,1\ldots}$; p se numește dimensiunea elementului e_i^p.

Definiție. *Vom numi A-cuvertură bazică de tip finit canonică pe spațiul E și vom nota $K = \{\mathfrak{K}, S, d\}$ un sistem format din A-modulul $\mathfrak{K}$ și:*

1°. *O funcție S care atașează fiecărui element $k \in \mathfrak{K}$ o parte închisă $S(k) \subset E$, suportul lui k, satisfăcînd următoarele condiții:*

S_1. $S(e_i^p) \neq \emptyset$ *numai pentru un număr finit de perechi de indici* (i, p).

$$S_2 \cdot S\left(\sum_{i,p} a_i^p e_i^p\right) = \bigcup_{a_i^p \neq 0} S(e_i^p) \qquad (a_i^p \in A).$$

2°. *O diferențială d de grad $+1$ definită pe submodulul K al lui $\mathfrak{K}$ generat de acei e_i^p pentru care $S(e_i^p) \neq \emptyset$, satisfăcînd următoarele condiții:*

$d_1 \cdot S(dk) \subset S(k)$, $k \in K$.

d_2. *Suma $u_k = \sum_i e_i^0$ a elementelor zero-dimensionale ale lui K este un cociclu, numit cociclu unitate:* $du_k = 0$.

d_3. *Pentru orice* $x \in E$, $H^p(xK) = 0$ *dacă* $p > 0$, $H^0(xK) \approx A$, *elementului unitate al lui* A *corespunzîndu-i prin acest izomorfism cociclul* $x\,(\sum_i e_i^0)$ *al lui* xK.*)

Este evident că o A-cuvertură bazică de tip finit canonică verifică toate axiomele noțiunii de A-cuvertură [2]**).

Dacă $K = \{\mathcal{K}, S, d\}$ și $K' = \{\mathcal{K}, S', d'\}$ sînt două A-cuverturi bazice de tip finit canonice, se știe [2]***) că intersecția lor $K \circ K'$ este o cuvertură care, din punct de vedere algebric este un A-modul cît al produsului tensorial $K \otimes K'$.

Lema 1. Fie $C = K_1 \circ K_2 \circ \ldots \circ K_r$, *unde* $K_i = \{\mathcal{K}, S_i, d_i\}$ $(i = 1, \ldots r)$ *sînt* A*-cuverturi bazice de tip finit canonice. Atunci* C *este un* A*-modul liber, avînd o bază formată de elementele*

$$e^{p_1}_{i_1} \circ \ldots \circ e^{p_r}_{i_r} \text{ astfel încît } \bigcap_{\tau=1}^{r} S_\tau(e^{p_\tau}_{i_\tau}) \neq \varnothing \text{ ; în plus}$$

$$S\Big(\sum a^{p_1 \ldots p_r}_{i_1 \ldots i_r} e^{p_1}_{i_1} \circ \ldots \circ e^{p_r}_{i_r}\Big) = \bigcup_{a^{p_1 \ldots p_r}_{i_1 \ldots i_r} \neq 0} S_1(e^{p_1}_{i_1}) \cap \ldots \cap S_r(e^{p_r}_{i_r}).$$

Demonstrație. Prima aserțiune a lemei rezultă imediat din faptul că produsul tensorial a două module libere e liber [4]****). Din faptul că xK_τ este, pentru orice τ, un A-modul liber generat de elementele $x\,e^{p_\tau}_{i_\tau}$ cu proprietatea $S_\tau(e^{p_\tau}_{i_\tau}) \ni x$, rezultă că modulul $x(K_1 \circ \ldots \circ K_r) = xK_1 \otimes \ldots \otimes xK_r$ este liber și are o bază formată din elementele de forma $x\,e^{p_1}_{i_1} \otimes \ldots \otimes x\,e^{p_r}_{i_r}$ cu proprietatea :

$$x \in \bigcap_{\tau=1}^{r} S_\tau(e^{p_\tau}_{i_\tau}).$$

De aici urmează că $x \in S(\sum a^{p_1 \ldots p_r}_{i_1 \ldots i_r} e^{p_1}_{i_1} \circ \ldots \circ e^{p_r}_{i_r})$ este echivalentă cu $x(\sum a^{p_1 \ldots p_r}_{i_1 \ldots i_r} e^{p_1}_{i_1} \circ \ldots \circ e^{p_r}_{i_r}) = \sum a^{p_1 \ldots p_r}_{i_1 \ldots i_r} x\,e^{p_1}_{i_1} \otimes \ldots \otimes x\,e^{p_r}_{i_r} \neq 0$, ceea ce este echivalent cu afirmația : „există un sistem de indici $i_1, \ldots, i_r, p_1, \ldots, p_r$ astfel încît : $a^{p_1 \ldots p_r}_{i_1 \ldots i_r} \neq 0$ și $x \in \bigcap_{\tau=1}^{r} S_\tau(e^{p_\tau}_{i_\tau})$" și această ultimă afirmație este echivalentă cu : $x \in \bigcup_{a^{p_1 \ldots p_r}_{i_1 \ldots i_r} \neq 0} S_1(e^{p_1}_{i_1}) \cap \ldots \cap S_r(e^{p_r}_{i_r})$. Cu aceasta lema este demonstrată.

Vom nota prin $\bar{A}$ cuvertura bazică de tip finit canonică $\{\mathcal{K}, S, d\}$ definită prin : $S(e^0_0) = E$, $S(e^p_i) = \varnothing$ dacă $i \neq 0$ sau $p \neq 0$, $d(e^p_i) = 0$ $(i,\ p = 0, 1, \ldots)$.

---

*) Prin xK se notează, ca de obicei [2, p. 138], modulul cît al lui K prin submodulul elementelor al căror suport nu conține pe x ; xk este imaginea lui $k \in K$ prin omomorfismul canonic $K \to xK$. Dacă D este un modul diferențial graduat, prin $H^p(D)$ se notează modulul de coomologie de dimensiune p al său.

**) p. 144.

***) p. 164.

****) p. 142.

Convenim să identificăm cuverturile K și $\bar{A} \circ K$ prin izomorfismul: $e_i^p \longleftrightarrow e_0^0 \circ e_i^p$ $(S(e_i^p) \neq \emptyset)$.

De asemenea convenim să identificăm cuverturile $K \circ K'$ și $K' \circ K$ prin izomorfismul: $e_i^p \circ e_j^q \longleftrightarrow (-1)^{pq} e_j^q \circ e_i^p$ $(S(e_i^p) \cap S'(e_j^q) \neq \emptyset)$.

În fine, convenim să identificăm cuverturile $(K \circ K') \circ K''$ și $K \circ (K' \circ K'')$ prin izomorfismul: $(e_i^p \circ e_j^q) \circ e_h^r \longleftrightarrow e_i^p \circ (e_j^q \circ e_h^r)$ $(S(e_i^p) \cap S'(e_j^q) \cap S''(e_h^r) \neq \emptyset)$.

Să considerăm acum mulțimea Φ a tuturor A-cuverturilor bazice de tip finit canonice pe spațiul E și a tuturor intersecțiilor finite de astfel de cuverturi (ținînd seamă de identificările făcute mai sus). Mulțimea Φ nu este contradictorie *).

În mulțimea Φ introducem următoarea relație de ordine „$>$”: $C' > C$ dacă și numai dacă C' este de forma $C' = C'' \circ C$, $C'' \in \Phi$ (sau, ceea ce este tot una în baza convenției de mai sus: $C' = C \circ C''$). Relația „$>$” este:

1°. Reflexivă: $C > C$, căci $C = \bar{A} \circ C$.

2°. Tranzitivă: Dacă $C' > C$, $C'' > C'$, atunci $C' = C_1 \circ C$, $C'' = C_2 \circ C'$, deci $C'' = (C_1 \circ C_2) \circ C$, deci $C'' > C$.

3°. Filtrantă: C și C' fiind date, elementul $C'' = C \circ C'$ al lui Φ verifică: $C'' > C$, $C'' > C'$.

Să considerăm un element oarecare al mulțimii Φ:

$C = K_1 \circ K_2 \circ \ldots \circ K_r$, $K_i = \{\mathfrak{K}, S_i, d_i\}$ fiind A-cuverturi bazice de tip finit canonice. Pentru fiecare K_i, elementul $u_{K_i} = \sum_{S_i(e_j^0) \neq \emptyset} e_j^0$ este un cociclu (axioma d_2); elementul $u_C = u_{K_1} \circ u_{K_2} \circ \ldots \circ u_{K_r}$ este un cociclu zero-dimensional al lui C, pe care îl numim *cociclu unitate*.

Fie acum o pereche C, $C' \in \Phi$, astfel încît $C' > C$, deci: $C' = C'' \circ C$, $C'' \in \Phi$. Vom defini un omomorfism $\pi_C^{C'}$ al lui C în C' prin relația:

$$\pi_C^{C'}(c) = u_{C''} \circ c, \quad c \in C.$$

Lema 2. *Omomorfismul $\pi_C^{C'}$ este un izomorfism injectiv.*

Demonstrație. Omomorfismul $\pi_C^{C'}$ conservă suporții:

$$S(u_{C''} \circ c) = S(c), \quad c \in C.$$

Într-adevăr, se știe că $S(u_{C''} \circ c) \subset S(u_{C''}) \cap S(c) = S(c)$. Să presupunem că $C = K_1 \circ \ldots \circ K_r$ și $C'' = K_{r+1} \circ \ldots \ldots \circ K_m$, $K_i = \{\mathfrak{K}, S_i, d_i\}$ fiind A-cuverturi bazice de tip finit canonice, și că: $c = \sum a_{i_1 \ldots i_r}^{p_1 \ldots p_r} e_{i_1}^{p_1} \circ \ldots \circ e_{i_r}^{p_r}$ $u_{C''} = \sum e_{i_{r+1}}^0 \circ \ldots \circ e_{i_m}^0$. Atunci:

$$u_{C''} \circ c = \sum a_{i_1 \ldots i_r}^{p_1 \ldots p_r} e_{i_{r+1}}^0 \circ \ldots \circ e_{i_m}^0 \circ e_{i_1}^{p_1} \circ \ldots \circ e_{i_r}^{p_r}.$$

*) Întrucît diferențiala d poate fi definită printr-o „matrice de incidență” $(e_i^p, e_j^q) = a_{ij}^{pq} \in A$, iar suportul S poate fi considerat o aplicație a lui N^2, unde $N = \{0, 1, \ldots\}$, în mulțimea $\mathfrak{L}(E)$ a părților lui E, mulțimea $\mathfrak{M}$ a tuturor A-cuverturilor bazice de tip finit canonice este bine definită ca parte a mulțimii $A^{N^4} \times \mathfrak{L}(E)^{N^2}$. Mulțimea Φ este atunci bine definită ca mulțime a tuturor intersecțiilor finite de elemente din $\mathfrak{M}$.

Dacă $x \in S(c)$, din lema 1 rezultă că există un sistem de indici $i_1, \ldots, i_r, p_1, \ldots, p_r$ cu proprietatea: $a_{i_1 \ldots i_r}^{p_1 \ldots p_r} \neq 0$, $x \in \bigcap_{\tau=1}^{r} S_\tau(e_{i_\tau}^{p_\tau})$; dar există un sistem de indici $i_{r+1}, \ldots, i_m$ astfel încît $x \in \bigcap_{\tau=r+1}^{m} S_\tau(e_{i_\tau}^{o})$ căci pentru un τ oarecare dar fix: $\bigcup_{i_\tau} S_\tau(e_{i_\tau}^{o}) = S_\tau(\sum_{i_\tau} e_{i_\tau}^{o}) = S_\tau(u_{K_\tau}) = E$. Tot în baza lemei 1, se deduce că

$$x \in S(u_{C''} \circ c), \text{ deci } S(c) \subset S(u_{C''} \circ c).$$

Din faptul că $\pi_C^{C'}$ conservă suporții rezultă că relația $\pi_C^{C'}(c) = 0$ atrage după sine $c = 0$ și lema 2 este astfel demonstrată.

Este evident că omomorfismele $\pi_C^{C'}$ satisfac condițiile:

1°. Pentru orice $C \in \Phi$: π_C^C = aplicația identică.

2°. Pentru $C'' > C' > C$: $\pi_{C'}^{C''} \circ \pi_C^{C'} = \pi_C^{C''}$.

Urmează că mulțimea Φ, împreună cu relația de ordine „$>$" și omomorfismele $\pi_C^{C'}$ constituie un sistem direct de A-module [4]*). Să considerăm limita acestui sistem:

$$\mathcal{C} = \lim_{C \in \Phi} \text{dir } C.$$

Pentru orice $C \in \Phi$ este definit un omomorfism π_C al lui C în $\mathcal{C}$ [4]**). Din lema 2 și din teorema 4.7 din [4]***) se deduce imediat că, fiind date $c \in C \in \Phi$ și $c' \in C' \in \Phi$, pentru ca $\pi_C(c) = \pi_{C'}(c')$, este necesar și suficient ca $\pi_C^{C \circ C'}(c) = \pi_{C'}^{C \circ C'}(c')$, adică: $c \circ u_{C'} = u_C \circ c'$.

Vom defini acum în A-modulul $\mathcal{C}$ o structură de algebră cu suporți în spațiul E [2]****). Definim o înmulțire în $\mathcal{C}$ în modul următor: dacă $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}$ și dacă $c_1 \in C_1 \in \Phi$ și $c_2 \in C_2 \in \Phi$ sînt astfel încît $\pi_{C_1}(c_1) = \alpha_1$, $\pi_{C_2}(c_2) = \alpha_2$, atunci, prin definiție:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \pi_{C_1 \circ C_2}(c_1 \circ c_2).$$

Trebuie să arătăm că definiția nu depinde de alegerea lui c_1 și c_2. Pentru aceasta, fie $c_1' \in C_1' \in \Phi$ și $c_2' \in C_2' \in \Phi$, astfel încît: $\pi_{C_1'}(c_1') = \alpha_1$, $\pi_{C_2'}(c_2') = \alpha_2$. Rezultă că $c_1 \circ u_{C_1'} = u_{C_1} \circ c_1'$, $c_2 \circ u_{C_2'} = u_{C_2} \circ c_2'$, deci, în cuvertura $C_1 \circ C_1' \circ C_2 \circ C_2'$ avem: $c_1 \circ u_{C_1'} \circ c_2 \circ u_{C_2'} = u_{C_1} \circ c_1' \circ u_{C_2} \circ c_2'$ sau, în baza convențiilor făcute: $c_1 \circ c_2 \circ u_{C_1'} \circ u_{C_2'} = u_{C_1} \circ u_{C_2} \circ c_1' \circ c_2'$.

Dar această relație e echivalentă cu:

$$\pi_{C_1 \circ C_2}(c_1 \circ c_2) = \pi_{C_1' \circ C_2'}(c_1' \circ c_2'),$$

deci definiția înmulțirii este independentă de alegerea lui c_1 și c_2.

*) p. 212.
**) p. 221.
***) p. 222.
****) p. 136.

Definim suportul, diferențiala și graduarea în $\mathcal{C}$ în modul următor: fie $\alpha \in \mathcal{C}$ și $c \in C \in \Phi$ astfel încît $\pi_C(c) = \alpha$. Atunci prin definiție $S(\alpha) = S(c)$ și $d\alpha = \pi_C(dc)$. Elementul $\alpha \in \mathcal{C}$ se numește omogen de gradul p, dacă există $C \in \Phi$ și $c \in C$ astfel încît c este omogen de gradul p și $\pi_C(c) = \alpha$. Se arată ușor că toate aceste definiții nu depind de alegerea lui c și că ele satisfac axiomele noțiunii de algebră cu suporți [2]*).

Lema 3. *Algebra cu suporți $\mathcal{C}$ este o cuvertură a spațiului E.*

Demonstrație. În primul rînd, pentru orice $C \in \Phi$, $\pi_C(u_C) = u$ este element neutru al algebrei $\mathcal{C}$, iar suportul său este întreg spațiul E.

Să demonstrăm acum că $\mathcal{C}$ este local coomologic banală [2]**).

Fie $\alpha^p \in \mathcal{C}$ un element omogen de gradul p și $x \in E$ astfel încît $x \notin S(d\alpha^p)$. Fie $c^p \in C \in \Phi$ astfel încît $\pi_C(c^p) = \alpha^p$. Urmează că $x \notin S(\pi_C(dc^p)) = S(dc^p)$. Întrucît C este local coomologic banală, rezultă: *a*) dacă $p > 0$, există $c^{p+1} \in C$ astfel încît $x \notin S(c^p - dc^{p+1}) = S(\pi_C(c^p - dc^{p+1}))$, deci, dacă punem $\alpha^{p+1} = \pi_C(c^{p+1})$, atunci $x \notin S(\alpha^p - d\alpha^{p+1})$; *b*) dacă $p = 0$, există $a \in A$ astfel încît

$$x \notin S(c^0 - au_C) = S(\pi_C(c^0 - au_C)) \text{ deci } x \notin S(\alpha^0 - au). \quad \text{c.c.t.d.}$$

Teorema 1. *Dacă spațiul E este local-compact, atunci cuvertura $\mathcal{C}$ este fină.*

Demonstrație. Fie $\{U_0, \ldots, U_n\}$ o acoperire veritabilă a lui E[2]***). Pornind de la această acoperire, se poate determina o A-cuvertură bazică de tip finit canonică $K_0 = \{\mathcal{K}, S_0, d_0\}$ în modul următor: se consideră A-modulul colanțurilor nervului acoperirii închise $\{\overline{U}_0, \ldots, \overline{U}_n\}$ cu coeficienți în inelul A; se definește ca suport al unui simplex al nervului intersecția mulțimilor $\overline{U}_i$ care constituie vîrfurile simplexului, iar ca suport al unui colanț se ia reuniunea suporturilor simplexelor pe care colanțul are o valoare diferită de zero; ca diferențială d_0 se ia operatorul de cofrontieră; în fine, se alege o ordine totală pentru simplexele ordonate ale nervului și se identifică colanțul care ia valoarea 1 pe al $(i+1)$-lea simplex ordonat de dimensiune p și valoarea 0 pe toate celelalte simplexe ordonate cu elementul e_i^p.

Atunci avem:

$$S(\pi_{K_0}(e_i^0)) = S_0(e_i^0) = \overline{U}_i \qquad (i = 0,1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_{K_0}(e_i^0) = \pi_{K_0}\left(\sum_{i=0}^{n} e_i^0\right) = \pi_{K_0}(u_{K_0}) = u,$$

deci am găsit o partiție a unității lui $\mathcal{C}$ subordonată acoperirii date și prin urmare $\mathcal{C}$ este fină [2]****).

*) p. 136.
**) p. 144.
***) p. 140.
****) p. 141.

Teorema 2. *Să presupunem că inelul A este cu ideale principale. Fie $\widehat{\mathcal{C}}$ cuvertura formată de elementele lui $\mathcal{C}$ care au suport compact și M o A-algebră arbitrară. Atunci algebra de coomologie a lui $\widehat{\mathcal{C}} \otimes M$ este izomorfă cu algebra de coomologie a spațiului local-compact E în sensul lui Alexander-Čech cu suporți compacți și cu coeficienți în M.*

Demonstrație. Fiind dată o acoperire proprie [3]*) a spațiului E: $\{U_0, \ldots, U_n\}$, să considerăm A-cuvertura bazică de tip finit canonică K_0 construită în demonstrația teoremei 1; putem defini niște endomorfisme A-lineare r_i $(i = 0, \ldots, n)$ ale lui $\mathcal{C}$ în ea însăși prin relațiile:

$$r_i(\alpha) = \pi_{K_0}(e_i^0) \cdot \alpha \qquad (\alpha \in \mathcal{C};\ i = 0, 1, \ldots, n).$$

Atunci: $\sum_{i=0}^{n} r_i(\alpha) = \sum_i \pi_{K_0}(e_i^0) \cdot \alpha = \pi_{K_0}(u_{K_0}) \cdot \alpha = u\alpha = \alpha$ și $S(r_i(\alpha)) \subset S(\pi_{K_0}(e_i^0)) \cap S(\alpha) = \overline{U}_i \cap S(\alpha)$, deci fiecare r_i aplică pe $\widehat{\mathcal{C}}$ în ea însăși.

Rezultă că cuvertura compactă $\widehat{\mathcal{C}}$ este fină [3]**) și teorema este atunci o consecință a teoremei de unicitate din teoria cuverturilor [2]***) [3]****).

Observație. Se poate enunța și următoarea teoremă mai generală:

Teorema 2'. *Să presupunem că inelul A este cu ideale principale. Fie $\widehat{\mathcal{C}}$ cuvertura formată de elementele lui $\mathcal{C}$ care au suport compact și $\mathcal{F}$ un fascicol de A-algebre pe spațiul E. Atunci algebra de coomologie a lui $\widehat{\mathcal{C}} \circ \mathcal{F}$ este izomorfă cu algebra de coomologie a spațiului local-compact E cu suporți compacți și coeficienți în fascicolul $\mathcal{F}$.*

În acest enunț, $\widehat{\mathcal{C}} \circ \mathcal{F}$ înseamnă „intersecția dintre cuvertura $\widehat{\mathcal{C}}$ și fascicolul $\mathcal{F}$". [3]*****).

Demonstrația rezultă pe ace aşi cale din teorema de unicitate [3]******). Teorema 2 se obține considerînd cazul particular în care fascicolul $\mathcal{F}$ este izomorf cu fascicolul constant de fibră M.

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРУППЫ КОГОМОЛОГИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

РЕЗЮМЕ

Автор возвращается к первому определению кольца когомологий топологического пространства, основанного на понятии перекрытия и данного Ж. Лерэ в работе [1], и уточняет его в свете последующего

*) II p. 1.
**) II p. 6.
***) p. 153.
****) IV. p. 1.
*****) V. p. 8.
******) V. p. 9.

развития аксиоматической теории когомологии. Доказывается, что в случае локально-компактного пространства это построение приводит к алгебре когомологий пространства с компактными носителями и с коэффициентами в пучке.

SUR UNE DÉFINITION DU GROUPE DE COHOMOLOGIE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

RÉSUMÉ

L'auteur reprend la première définition de l'anneau de cohomologie d'un espace topologique fondée sur la notion de couverture, donnée par Jean Leray dans le mémoire [1], et la rend plus précise en tenant compte du développement ultérieur de la théorie axiomatique de la cohomologie. On montre que, dans le cas d'un espace localement compact, la construction conduit à l'algèbre de cohomologie de l'espace, à supports compacts et à coefficients dans un faisceau.

BIBLIOGRAFIE

1. JEAN LERAY, *Sur la forme des espaces topologiques et les points fixes des représentations.* Journal de Math. pures et appl., **XXIV**, 95—167 (1945).
2. М. М. ПОСТНИКОВ, *Теория гомологий гладких многообразий и ее обобщения.* Успехи математических наук, **XI**, вып. I (67), 115—166.
3. A. BOREL, *Cohomologie des espaces localement compacts, d'après J. Leray.* Ecole Polyt. Fédérale, 1951 (litografiat).
4. S. EILENBERG, N. STEENROD, *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton Univ. Press, 1952.

ASUPRA UNUI SISTEM DE AXIOME DE INCIDENȚĂ

DE

HORIA BODNĂRESCU

În prezenta lucrare se propune o listă de axiome de legătură (incidență), ale geometriei, diferită de cea a lui Hilbert dar echivalentă cu aceasta; se expun teoremele rezultînd din aceste axiome.

În continuare se consideră clase H^i, ale unei mulțimi S, cu ajutorul cărora se definește i- dimensiunea pentru mulțimi; se demonstrează că spațiul S_p este tridimensional și aceasta datorită exclusiv axiomei $L\,9$.

I. ELEMENTELE FUNDAMENTALE ALE GEOMETRIEI. DEFINIȚII. SIMBOLURI

Există trei sisteme diferite de obiecte : puncte, drepte, plane.

Se consideră punctele ca singure elemente primitive și se notează cu S_p mulțimea punctelor; dreptele și planele sînt considerate părți din S_p ale căror proprietăți rezultă din axiomele geometriei.

În expunerile ce urmează se folosesc simbolurile obișnuite din teoria mulțimilor (a se vedea de exemplu lucrarea [1]).

Se vor nota punctele cu A, B, C, ..., dreptele cu a, b, c, ... și planele cu α, β, γ, ...

Pentru relațiile $A \in a$, $A \in \alpha$ și $a \subset \alpha$ se folosesc exprimările clasice, cu observația că expresiile *dreapta aparține punctului* sau *planul aparține dreptei sau punctului* nu sînt acceptate.

Spațiul S_p este prin definiție nevid $S_p \neq \varnothing$.

II. AXIOME DE LEGĂTURĂ L

L. 1. *Pentru oricare punct A există o dreaptă a cu relația $A \in a$ (și evident $[A] \subset a$).*

L. 2. *Pentru oricare punct A și dreaptă a există relația $a \not\subset [A]$.*

L. 3. *Pentru oricare puncte A și B $(A \neq B)$ există o dreaptă unică a cu relația : $A \in a$ și $B \in a$ (și evident $(A, B) \subset a$).*

L 3. implică oricare dintre relațiile ($A \neq B$ și $A, B \in a$) $\Rightarrow$ (a unică) sau ($A \neq B$; $A, B \in a$ și $A, B \in b$) $\Rightarrow (a = b)$ *sau* ($A \neq B$ și $A, B \in a \cap b$) $\Rightarrow (a = b)$; se justifică astfel scrierea AB*) pentru dreaptă și expresia *dreapta este definită de punctele A și B.*

Din *L*3 rezultă de asemenea că oricare două puncte sînt coliniare (pentru $A = B$ coliniaritatea este implicată de *L*1).

L. 4. *Pentru oricare dreaptă a există un plan* α *cu relația* $a \subset \alpha$.

L. 5. *Pentru oricare dreaptă a și plan* α *există relația* $\alpha \not\subset a$.

L. 6. *Pentru oricare punct A și dreapta a cu relația* $A \notin a$ *există un plan unic* α *cu relația* ($A \in \alpha$ *și* $a \subset \alpha$).

*L*6 implică oricare dintre relațiile ($A \notin a$, $A \in \alpha$, $a \subset \alpha$) $\Rightarrow$ (α unic) sau ($A \notin a$, $A \in \alpha$, $a \subset \alpha$, $A \in \beta$, $a \subset \beta$) $\Rightarrow (\alpha = \beta)$ sau ($A \notin a$, $A \in \alpha \cap \beta$, și $a \subset \alpha \cap \beta$) $\Rightarrow (\alpha = \beta)$.

Din *L6* rezultă că oricare punct *A* și dreaptă *a* sînt coplanare (dacă $A \in a$ coplanaritatea este implicată de *L*4).

L. 7. *Pentru oricare plan* α *există relația* $S_p \not\subset \alpha$.

L. 8. *Există relația* :

$$(A \neq B;\ A, B \in a \text{ și } A, B \in \alpha) \Rightarrow (a \subset \alpha)$$

pentru oricare dreaptă a, plan α *și puncte A și B ce satisfac membrul întîi al implicației.*

Relația de mai sus se poate scrie și sub forma echivalentă

$$(A \neq B \text{ și } A,\ B \in a \cap \alpha) \Rightarrow (a \subset \alpha).$$

L9. *Există relația* :

$$(A \in \alpha \text{ și } A \in \beta) \Rightarrow (\text{există } B \neq A \text{ și } B \in \alpha,\ B \in \beta)$$

pentru oricare punct A și plane α, β ce satisfac membrul întîi al implicației.

Relația de mai sus se poate scrie și sub forma echivalentă

$$(A \in \alpha \cap \beta) \Rightarrow (\text{există } B \neq A \text{ și } B \in \alpha \cap \beta).$$

III. TEOREME REZULTÎND DIN AXIOMELE DE LEGATURĂ L

T1. *Pe oricare dreaptă a există două puncte A, B* ($A \neq B$).

Demonstrație. Dacă pe dreapta a nu există nici un punct atunci $a = \varnothing$; dar ($\varnothing \subset [A]$ și $a = \varnothing$) $\Rightarrow (a \subset [A])$ ceea ce contrazice *L*2 ; există deci un punct A pe dreapta a. Dacă $a = [A]$ atunci ($a = [A]$ și $[A] \subset [A]$) $\Rightarrow (a \subset [A])$ ceea ce contrazice *L*2 deci pe dreapta a există cel puțin două puncte A, B ($A \neq B$) *c.c.t.d.*

T 2. *Oricare plan* α *conține trei puncte necoliniare.*

Demonstrație. — dacă $\alpha = \theta$ atunci :

($\alpha = \theta$ și $\theta \subset a$) $\Rightarrow (\alpha \subset a)$ ceea ce contrazice *L*5, deci există un punct $A \in \alpha$.

*) În cele ce vor urma se va considera că : (dreapta AB) $\Rightarrow (A \neq B)$.

— dacă $\alpha = (A, B)$ atunci există a astfel ca $A, B \in a$ conf. $L3$ și $(A, B \in a) \Rightarrow (A, B) \subset a$.

$[\alpha = (A, B)$ și $(A, B) \subset a] \Rightarrow (\alpha \subset a)$ ceea ce contrazice $L5$, deci există un punct $C \in \alpha$ și $C \notin a$ (dacă $C \in a$ atunci pentru $\alpha = (A, B, C)$ și $(A, B, C) \in a$ ar rezulta $\alpha \subset a$). Deci exi tă în α trei puncte necoliniare A, B, C*) ($C \notin a = AB$ vezi $L3$).

T 3. *Pentru oricare trei puncte diferite A, B, C există un plan α cu relația $A, B, C \in \alpha$.*

Demonstrație. Două oarecare din puncte, de exemplu B și C, determină dreapta unică $a = BC$ (vezi $L3$). Se pot ivi următoarele cazuri:

I. $A \in a$; în acest caz: $A, B, C \in a$; există un plan α cu relația $a \subset \alpha$, conf. L_4; $(A, B, C \in a$ și $a \subset \alpha) \Rightarrow (A, B, C \in \alpha)$ *c.c.t.d.*

II. $A \notin a = BC$; în acest caz există un plan α cu relația ($a \subset \alpha$ *și* $A \in \alpha$) *conf.* $L6$; $(B, C \in a$ și $a \subset \alpha) \Rightarrow (B, C \in \alpha)$ deci $A, B, C \in \alpha$ *c.c.t.d.*

Din $T3$ rezultă evident teoremele:

T 3′. *Pentru oricare punct A există un plan α cu relația $A \in \alpha$.*

T 3″. *Pentru oricare puncte A, B există un plan α cu relația $A, B \in \alpha$.*

T 4. *Pentru oricare trei puncte A, B, C necoliniare există un plan unic α cu relația $A, B, C \in \alpha$.*

Demonstrație. Există un plan α cu relația $A, B, C \in \alpha$ conf. $T3$. Este deci suficient să demonstrăm relația:

$(A, B, C$ necoliniare și $A, B, C \in \alpha$ și $A, B, C \in \beta) \Rightarrow (\alpha = \beta)$

$(A, B, C$ necoliniare$) \Rightarrow A \neq B \neq C \neq A$ (vezi $T2$), rezultă: există o dreaptă unică $a = BC$ (conf. $L3$) — evident $B, C \in a$ — și $A \notin a$.

$(B \neq C$; $B, C \in a$ și $B, C \in \alpha) \Rightarrow (a \subset \alpha)$ conf. $L8$.

$(B \neq C$; $B, C \in a$ și $B, C \in \beta) \Rightarrow (a \subset \beta)$ conf. $L8$.

$(A \notin a$; $A \in \alpha$; $A \in \beta$; $a \subset \alpha$ și $a \subset \beta) \Rightarrow (\alpha = \beta)$ conf. $L6$ *c.c.t.d.*

$T4$ justifică expresia *planul determinat de punctele ABC necoliniare* și scrierea *planul ABC.*

T 5. *În spațiul S_p există patru puncte necoplanare A, B, C, D.*

Demonstrație. Prin definiție $S_p \neq \emptyset$, există un punct $A \in S_p$; conf. $L1$ există o dreaptă a astfel ca $A \in a$ și conf. $T1$ există două puncte $A, B \in a$ $(A \neq B)$; conf. $L4$ există un plan α astfel ca $a \subset \alpha$ și conf. $T2$ există un punct $C \notin a$ și $C \in \alpha$. Deci în S_p există trei puncte necoliniare A, B, C conținute în planul $\alpha = ABC$ (vezi $T4$). Să arătăm că există un punct $D \notin \alpha$; într-adevăr dacă pentru oricare punct $D \in S_p$ avem $D \in \alpha$ ar rezulta $S_p \subset \alpha$ ceea ce contrazice $L7$. Deci există un punct D cu relația $D \notin \alpha = ABC$, deci există patru puncte necoplanare A, B, C, D.

Observația 1. Se atrage atenția că (A, B, C, D sînt necoplanare) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (oricare trei puncte din cele patru sînt necoliniare) $\Rightarrow$ (oricare două puncte din cele patru nu sînt confundate).

---

*) Se atrage atenția că (A, B, C necoliniare) $\Rightarrow (A \neq B \neq C \neq A)$ într-adevăr dacă $A = C$ și $A \neq B$, atunci ($A, B, \in a$ unic) conf. $L3$ și $(C = A, A \in a) \Rightarrow (C \in a)$ și deci $A, B, C \in a$ ceea ce contrazice ipoteza. De asemenea $(A \in BC) \Leftrightarrow (B \in AC) \Leftrightarrow (C \in AB)$.

Ultima inplicație s-a demonstrat o dată cu teorema $T2$. Prima implicație rezultă din : dacă trei puncte, de exemplu A, B, C sînt coliniare atunci $A, B, C \in a$; există un plan α care conține punctul D și dreapta a (vezi $L6$) ; deci $D \in \alpha$ și $a \subset \alpha$ ceea ce contrazice ipoteza și deci prima implicație este demonstrată.

Observația 2. Teorema $T5$ implică teoremele :

T 5'. *Pentru oricare dreaptă a există un punct A cu relația $A \notin a$.*

T 5''. *Pentru oricare plan α există un punct A cu relația $A \notin \alpha$.*

T 6. *În spațiul S_p există șase drepte distincte.*

Demonstrație. Existența punctelor necoplanare A, B, C, D (vezi $T5$) implică existența dreptelor distincte AB, AC, BC, BD, CD, AD (într-adevăr dacă două oricare din aceste drepte sînt confundate rezultă că cel puțin trei din cele patru puncte sînt coliniare, ceea ce nu este posibil — vezi $T5$ obs. 1. —).

T 7. *În spațiul S_p există patru plane distincte.*

Demonstrație. Rezultă din $T5$ existența planelor distincte ABC, ABD, ACD, BCD (într-adevăr dacă două din aceste trei plane ar fi confundate atunci punctele A, B, C, D ar fi coplanare).

T 8. *Există relația* $(a \subset b) \Rightarrow (a = b)$.

Demonstrație. Există două puncte A și $B\,(A \neq B)$ cu relația $(A, B \in a)$ — conf. $T1$ — .

$$(A, B \in a \text{ și } a \subset b) \Rightarrow (A, B \in b) \text{ și } (A \neq B ; A, B \in a \text{ și}$$

$$A, B \in b) \Rightarrow (a = b) \text{ conf. } L3$$

prin urmare relația este demonstrată.

T 9. *Există relația* $(\alpha \subset \beta) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

Demonstrație. Există trei puncte A, B, C cu relația $(A \notin BC$ și $A, B, C \in \alpha)$ — conf. $T2$ —. $(A, B, C \in \alpha$ și $\alpha \subset \beta) \Rightarrow (A, B, C \in \beta)$; $(A \notin BC$; $A, B, C \in \alpha$; $A, B, C \in \beta) \Rightarrow (\alpha = \beta)$ conf. $T4$ și deci relația este demonstrată.

T 10. *Pentru oricare drepte a și $b\,(a \neq b)$ există relația* : $(a \cap b = \varnothing$ *sau* $a \cap b = [A])$.

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm că nu există două puncte A și $B\,(A \neq B)$ cu relația $(A, B \in a \cap b)$; într-adevăr : $(A \neq B$ și $A, B \in a \cap b) \Rightarrow (a = b)$ conf. $L3$ ceea ce contrazice ipoteza $a \neq b$ și deci relația este demonstrată.

Definiții :

— dacă $a \cap b = 0$ dreptele se numesc *disjuncte*

— dacă $a \cap b = [A]$ dreptele se numesc *concurente*

— dacă $a = b$ dreptele se numesc *confundate.*

Teorema $T10$ se poate enunța deci și astfel : două drepte pot fi : sau *confundate* sau *concurente* sau *disjuncte.* Sau încă : pentru oricare drepte a și b există relația :

$$(a \cap b = a = b \text{ sau } a \cap b = [A] \text{ sau } a \cap b = 0).$$

T 11. *Oricare două drepte concurente a și b sînt coplanare iar planul α ce le conține este unic.*

Demonstrație. Trebuie demonstrate relațiile :

$$(a \cap b = [A]) \Rightarrow (\text{există } \alpha \text{ astfel ca } a, b \subset \alpha)$$

$$(a, b \subset \alpha\,;\ a, b \subset \beta) \Rightarrow (\alpha = \beta).$$

Într-adevăr :

$$(a \cap b = [A]) \Rightarrow (A \in a \text{ și } A \in b)$$

$$(A \in a) \Rightarrow (\text{există } B \neq A \text{ și } B \in a) \text{ conf. } T1.$$

$$(A \in b) \Rightarrow (\text{există } C \neq A \text{ și } C \in b) \text{ conf. } T1.$$

Evident $C \notin a$ căci $(C \in a,\ A \in a,\ C \in b,\ A \in b$ și $C \neq A) \Rightarrow (a = b)$ conf $L3$ și $(a = b) \Rightarrow (a \cap b = a)$ deci $a \cap b \neq [A]$ și deci se contrazice ipoteza ; așadar $C \notin a$.

$(C \notin a) \Rightarrow$ (există un plan unic α cu relațiile $C \in \alpha$ și $a \subset \alpha$) conf. $L6$. Dar :

$$(a \subset \alpha \text{ și } A \in a) \Rightarrow (A \in \alpha)$$

$(A \neq C\,;\ A, C \in \alpha$ și $A, C \in b) \Rightarrow (b \subset \alpha)$ conf. $L8$ și deci $a \cap b = [A])$ (există α astfel ca $a, b \subset \alpha$).

Planul α este unic, deoarece pentru $a, b \subset \beta$ avem : $(b \subset \beta$ și $C \in b) \Rightarrow (C \in \beta)$ iar $(C \notin a,\ C \in \alpha,\ a \subset \alpha,\ C \in \beta,\ a \subset \beta) \Rightarrow (\alpha = \beta)$ conf. $L6$ și astfel teorema este demonstrată.

T 12. *În S_p există drepte concurente și drepte disjuncte.*

Demonstrație. În S_p există patru puncte necoplanare A, B, C, D conf. $T5$ și dreptele $AB \neq AC \neq AD \neq BC$ conf. $T6$.

— Perechile de drepte (AB, AC), (AB, AD), sînt concurente ; într-adevăr $(A \in AB$ și $A \in AC) \Rightarrow ([A] \subset AB \cap AC)$ și cum $AB \neq AC$ rezultă $[A] = AB \cap AC$ (vezi $T10$) ; și analog pentru celelalte perechi.

— Perechile de drepte (AB, CD), (AC, BD) și (AD, BC) sînt disjuncte ; într-adevăr $AB \neq CD$ și dacă $AB \cap CD = [E]$ ar rezulta că există un plan α cu relația $(AB, CD \subset \alpha)$ și deci punctele A, B, C, D ar fi coplanare ceea ce contrazice ipoteza ; rezultă deci $AB \cap CD = \theta$ și analog pentru celelalte perechi.

T 13. Pentru orice dreaptă a și plan α există relația :

$$(a \cap \alpha = \theta \text{ sau } a \cap \alpha = [A] \text{ sau } a \cap \alpha = a)$$

Demonstrație. Este suficient să arătăm că

$$(A \neq B \text{ și } A, B \in a \cap \alpha) \Rightarrow (a \cap \alpha = a)\,;$$

într-adevăr

$$(A \neq B\,;\ A, B \in a \cap \alpha) \Rightarrow (a \subset \alpha) \text{ conf. } L8.$$

$$(a \subset \alpha) \Rightarrow (a \cap \alpha = a) \ c.c.t.d.$$

Definiții. Dacă

— $a \cap \alpha = \theta$ se spune că *dreapta și planul sînt disjuncte* ;

— $a \cap \alpha = [A]$ se spune că *dreapta și planul sînt concurente* sau *dreapta taie planul* sau *dreapta înțeapă planul.*

— deoarece $(a \cap \alpha = a) \Leftrightarrow (a \subset \alpha)$, se folosesc termenii : *dreapta este conținută în plan* etc.

Observație: Se demonstrează fără dificultate existența în S_p a unor drepte a și plane α în relațiile $a \cap \alpha = [A]$ sau $a \cap \alpha = a$; pe baza axiomelor de legătură nu se poate confirma sau infirma existența unor drepte și plane în relația $a \cap \alpha = \emptyset$.

T 14. *Pentru oricare două plane* α *și* β $(\alpha \neq \beta)$ *există relația*:

$$(\alpha \cap \beta = \varnothing \text{ sau } \alpha \cap \beta = a)$$

Demonstrație: Este suficient să demonstrăm că

$$(\alpha \neq \beta \text{ și } A \in \alpha \cap \beta) \Rightarrow (\alpha \cap \beta = a)$$

Într-adevăr:

$(A \in \alpha\,\beta) \Rightarrow$ (există $B \neq A$ și $B \in \alpha \cap \beta$) conf. $L9$ și deci

$A, B \in \alpha \cap \beta$ dar $(A, B \in \alpha \cap \beta) \Rightarrow (A, B \in \alpha$ și $A, B \in \beta)$.

Există o dreaptă unică $AB = a$ conf. $L3$. $(A \in a$ și $B \in a)$.

$$\left.\begin{array}{l}(A \neq B, \text{ și } A, B \in \alpha \text{ și } A, B \in a) \Rightarrow (a \subset \alpha) \\ (A \neq B, \text{ și } A, B \in \beta \text{ și } A, B \in a) \Rightarrow (a \subset \beta)\end{array}\right\} \text{conf. } L8$$

$$(a \subset \alpha \text{ și } a \subset \beta) \Rightarrow (a \subset \alpha \cap \beta).$$

Să arătăm că $a = \alpha \cap \beta$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că nu este posibilă relația $(C \notin a$ și $C \in \alpha \cap \beta)$.

Într-adevăr, $(C \notin a$ și $C \in \alpha \cap \beta$ și $a \subset \alpha \cap \beta) \Rightarrow (\alpha = \beta)$ conf $L6$, ceea ce contrazice $\alpha \neq \beta$ și deci teorema este demonstrată.

Definiții. Dacă:

— $\alpha \cap \beta = \emptyset$ planele se numesc *disjuncte*

— $\alpha \cap \beta = a$ planele se numesc *concurente*.

Dacă $\alpha = \beta$ planele se numesc *confundate* $(\alpha \cap \beta = \alpha = \beta)$.

Observație: Se poate demonstra fără dificultate existența în S_p a unor plane cu relația $\alpha \cap \beta = a$; pe baza axiomelor de legătură nu se poate confirma sau infirma existența unor plane cu relația $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Se precizează că axiomelor*) Hilbert le corespund în prezenta lucrare axiomele și teoremele: axiomei Hilbert Nr. 1 — $T1$; 2 — $L3$ 3 — $T2$, 4 — $T4$, 5 — $L8$; 6 — $L9$; 7 — $T5$. Axiomele din prezenta lucrare și care nu fac parte din axiomele Hilbert, sînt teoreme în raport cu aceste axiome.

Cele de mai sus arată că echivalența sistemului L cu sistemul Hilbert poate fi stabilită fără dificultate; o consecință a echivalenței celor două sisteme este: *sistemul* L *este necontradictoriu dacă sistemul Hilbert (pentru incidență) este necontradictoriu.*

De altfel sistemul L poate fi realizat pe un model reprezentat de patrupunctul $ABCD$; demonstrarea necontradicției pentru sistemul L folosind modelul $ABCD$ nu va fi redată aci deoarece este analoagă celei clasice folosite pentru grupul de axiome de incidență ale lui Hilbert (vezi lucrarea [3]**).

*) Numerotările axiomelor Hilbert sînt conforme celor din lucrarea [2].

**) p. 132, § 56.

IV. MULȚIMI S ȘI CLASE H^i

Fie o mulțime S ale cărei elemente le notăm cu $A^\circ, B^\circ, C^\circ \ldots$ fie PS mulțimea părților lui S și H^i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ clasa părților $A^i, B^i, C^i \ldots$ ale mulțimii S care satisfac relațiile :

(H^i) $\quad I = i$

I_1. *Pentru oricare parte* A^{i-1} *există o parte* A^i *cu relația* $A^{i-1} \subset A^i$.

I_2. *Pentru oricare părți* A^{i-1} *și* A^i *există relația* $A^i \not\subset A^{i-1}$.

I_3. *Pentru oricare* A^0 *și* A^{i-1} *cu relația* $A^\circ \notin A^{i-1}$ *există o parte unică* A^i *cu relația :* $(A^0 \in A^i$ *și* $A^{i-1} \subset A^i)$.

I_4. *Pentru oricare elemente independente* $A_1^0, A_2^0, \ldots A_i^0$ *există relația*

$$(A_1^0, A_2^0, A_3^0, \ldots, A_i^0 \in A^{i-1} \text{ și } A_1^0, A_2^0, \ldots, A_i^0 \in A^i) \Rightarrow (A^{i-1} \subset A^i).$$

În enunțarea axiomei I_4 s-a folosit definiția :

— Oricare i elemente $(i > 2)$ ce nu aparțin niciunei părți A^{i-2} se numesc independente.

Se convine a se nota cu H^0 clasa mulțimilor $[A^0], [B^0] \ldots$; pentru $i = 1$ relațiile (H^1) sînt :

(H^1)

I_1. *Pentru oricare element* A^0 *există o parte* A^1 *cu relația* $A^0 \in A^1$.

I_2. *Pentru oricare element* A^0 *și parte* A^1 *există relația* $A^1 \not\subset [A^0]$.

I_3. *Pentru oricare element* A^0 *și* $B^0 (A^0 \neq B^0)$ *există o parte unică* A^1 *cu relația :* $(A^0, B^0 \in A^1)$.

Pentru $i = 2$ relația I_4 se scrie :

$$(A^0 \neq B^0 ;\ A^0, B^0 \in A^1 \text{ și } A^0, B^0 \in A^2) \Rightarrow (A^1 \subset A^2)$$

Se enunță teoremele :

— *Oricare parte* A^i *conține cel puțin* $i + 1$ *elemente independente.*

— *Dacă* i *elemente sînt independente oricare* p *elemente dintre acestea sînt independente ; două elemente diferite sînt considerate independente.*

— *Oricare parte* A^i *conține* $i + 1$ *elemente independente și nu mai multe ; oricare* $i + 1$ *elemente independente sînt conținute într-o parte unică* A^i.

— *Dacă* S *conține* p *elemente atunci* $i \leqslant p - 1$, *unde* p *este un întreg finit.*

Relația de mai sus se poate extinde la mulțimi infinite introducîndu-se numerele cardinale ; de exemplu teorema : Dacă mulțimea claselor H^i este o mulțime infinită numărabilă, atunci mulțimea S este cel puțin numărabilă.

Dacă $A^i = S$, atunci clasele $H^{i+1}, H^{i+2} \ldots$ sînt vide de elemente ; dacă clasa H^{i+1} este vidă și H^i nu este vidă atunci

$$A^i = S.$$

Definiții :

D_1. *Dacă* H^i *nu este vidă și* H^{i+1} *este vidă de părți ale lui* S *atunci mulțimea* S *se numește i-dimensională*

D_2. *Oricare parte* A^i *din* S *se numește submulțime i-dimensională a lui* S; *mulțimea* $[A^\circ]$ *se consideră zero-dimensională.* Se enunță în continuare teorema :

— *Două mulțimi* S *și* S' *având fiecare cîte* p *elemente independente (și nu mai multe) sînt idem dimensionale și au dimensiunea* $p-1$. Teoremele enunțate în acest capitol nu au fost demonstrate ; demonstrarea acestor teoreme se va face în cadrul unei lucrări viitoare, în care se va expune „incidența" în spații n-dimensionale.

Cele de mai sus sînt necesare expunerii ce urmează.

V. CLASELE H^i ALE MULȚIMII S_p

Există în S_p elementele (punctele) $A, B, C \ldots$ și clasa H^0 a mulțimilor $[A], [B] \ldots$

Dreptele $a, b, \ldots$ sînt elemente ale clasei H^1 deoarece sînt satisfăcute relațiile : 1_1 conform $L1$, 1_2 conform $L2$ și 1_3 conform $L3$.

Planele $\alpha, \beta, \ldots$ sînt elemente ale clasei H^2, deoarece sînt satisfăcute relațiile : 2_1 conform $L4$, 2_2 conform $L5$, 2_3 conform $L6$ și 2_4 conform $L8$.

Fie $u, v \ldots$ părți din S_p și care sînt elemente ale clasei H^3. Sînt deci satisfăcute relațiile (axiomele) :

L 10. *Pentru oricare plan* α *există o parte* u *cu relația* $\alpha \subset u$.

L 11. *Pentru oricare plan* α *și parte* u *există relația* $u \not\subset \alpha$.

L 12. *Pentru oricare punct* A *și plan* α *cu relația* $A \notin \alpha$ *există o parte unică* u *cu relația* $(A \in u$ *și* $\alpha \subset u)$.

L13. *Există relația* :

$$(A, B, C \text{ necoliniare};\ A, B, C \in \alpha \text{ și } A, B, C \in u) \Rightarrow (\alpha \subset u).$$

Din particularizarea unor teoreme enunțate mai sus rezultă teoremele :

T 15. *Oricare parte* u *conține patru puncte independente (necoplanare) și deci trei puncte necoliniare.*

T 16. *Pentru oricare patru puncte necoplanare* A, B, C, D, *există o parte unică* u *cu relația* $(A, B, C, D \in u)$.

Evident din $T16$ rezultă :

T 16′. *Pentru oricare punct* A *există o parte* u *cu relația* $A \in u$.

T 16″. *Pentru oricare puncte* A, B *există o parte* u *cu relația* $A, B \in u$.

T 16‴. *Pentru oricare puncte* A, B, C *există o parte* u *cu relația* $A, B, C \in u$.

Se demonstrează teoremele :

T 17. *Există relația* :

$$(A \neq B;\ A, B \in a;\ A, B \in u) \Rightarrow (a \subset u).$$

Demonstrație. Există un punct C cu relația $(C \notin a,\ C \in u)$ vezi $T15$. Există planul unic α cu relația $(A,\ B,\ C \in \alpha)$ vezi T_4.

$(A,\ B,\ C$ necoliniare, $A,\ B,\ C \in \alpha$ și $A,\ B,\ C \in u) \Rightarrow (\alpha \subset u)$ conf. $L13$.

Dar : $(A \neq B;\ A,\ B \in a;\ A,\ B \in \alpha) \Rightarrow (a \subset \alpha)$ conf. $L8$.

$$(a \subset \alpha \text{ și } \alpha \subset u) \Rightarrow (a \subset u) \quad c.c.t.d.$$

T 18. *Există relația* $u = S_p$

Demonstrație. Prin definiție $u \subset S_p$; este deci suficient să se demonstreze relația $S_p \subset u$ sau : pentru oricare punct M (evident $M \in S_p$) există relația $M \in u$.

Într-adevăr : Există patru puncte $A,\ B,\ C,\ D$ necoplanare aparținînd părții u. Fie $M \in S_p$. Dacă M aparține uneia din dreptele $AB,\ AC \ldots$ (dreapta AB conf. $L3$) atunci $M \in u$ căci : $(A \neq B;\ A,\ B \in AB$ și $A,\ B \in u) \Rightarrow$ $\Rightarrow (AB \subset u)$, conf. $T17$ și $(M \in AB$ și $AB \subset u) \Rightarrow (M \in u)$ *c.c.t.d.*

Dacă M aparține unuia din planele $ABC,\ ABD \ldots$ (planul $ABC \ldots$ conf. $T4$) atunci $M \in u$, căci : $(A \notin BC$ și $A,\ B,\ C \in ABC$ și $A,\ B,\ C \in u) \Rightarrow$ $\Rightarrow (ABC \subset u)$ conf. $L13$ și $(M \in ABC;\ ABC \subset u) \Rightarrow (M \in u)$ *c.c.t.d.*

Presupunem că M nu este în niciunul din cazurile precedente : Fie planul $ABC = \alpha$ (conf. $T4$); $D \notin \alpha$ (deoarece $A,\ B,\ C,\ D$, sînt necoplanare). Prin ipoteză $M \notin AD$; dar : $(M \notin AD) \Rightarrow$ (există planul unic $\beta =$ $= MAD$) vezi $T4$. $(A \in \alpha$ și $A \in \beta) \Rightarrow$ (există $N \neq A$ și $N \in \alpha;\ N \in \beta)$ conf. $L9$.

Punctul N satisface relația $N \notin AD$; într-adevăr, dacă $N \in AD$ atunci : $(N \neq A;\ N \in AD;\ A \in AD$ și $N \in \alpha;\ A \in \alpha) \Rightarrow (AD \subset \alpha)$, conf. $L8$; $(AD \subset \alpha$ și $D \in AD) \Rightarrow (D \in \alpha)$ ceea ce contrazice ipoteza $D \notin \alpha$; deci $N \notin AD$.

S-a arătat mai sus că $\alpha = ABC \subset u$; dar : $(N \in \alpha$ și $\alpha \subset u) \Rightarrow$ $\Rightarrow (N \in u) \cdot (N \notin AD$ și $N,\ A,\ D \in \beta$ și $N,\ A,\ D \in u) \Rightarrow (\beta \subset u)$ conf. $L13$ $(M \in \beta$ și $\beta \subset u) \Rightarrow (M \in u)$ *c.c.t.d.*

T 19. *Spațiul* S_p *este tridimensional în sensul claselor* H^i.

Demonstrație. În spațiul S_p sînt patru puncte $A,\ B,\ C,\ D$, independente (necoplanare) conf. $T5$.

Clasa H^3 nu este vidă, deoarece conține elementul u (pentru oricare puncte necoplanare $A,\ B,\ C,\ D$, există o parte unică u cu relația $A,\ B,\ C,\ D \in u$ conf. $T16$ și vezi $T5$).

Există relația $u = S_p$ conf. $T18$ și conform unei teoreme enunțat rezultă că H^4 este vidă (de părți ale lui S_p); conform definiției $D1$ rezultă că S_p este tridimensional în sensul claselor H^i.

Conform definiției $D2$:

punctele sînt zerodimensionale ale lui S_p.

dreptele sînt unidimensionale ale lui S_p.

planele sînt bidimensionale ale lui S_p.

CONCLUZII

Interpretarea dreptelor și planelor ca *părți* ale spațiului S_p a condus la un nou sistem de axiome de incidență : teoremele rezultînd din aceasta sînt demonstrate sub o formă simplificată, ca scriere datorită simbolismului introdus.

Separarea din mulțimea S a *părților* grupate în clase conf. $I_1 - I_4$, a permis o nouă definiție dată *dimensiunii* și *elementelor independente*; Relațiile $I_1 - I_4$ generalizează axiomele L și conduc la o axiomatizare simplificată (față de cea clasică) pentru spațiul de incidență cu n dimensiuni, spațiu al cărui studiu va face obiectul unei lucrări viitoare; aceasta scoate în evidență unul dintre importantele avantaje pe care le aduce folosirea sistemului L față de cel al lui Hilbert.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ АКСИОМ ИНЦИДЕНТНОСТИ

РЕЗЮМЕ

Данная работа состоит из пяти частей и содержит новый список аксиом инцидентности, отличающийся от предложенного Гильбертом, однако эквивалентный ему. В отличие от системы Гильберта, как показывается в первой части работы, прямые и плоскости рассматриваются как „части" множества точек S_p, называемого и пространством S_p. Вторая часть работы содержит новую систему аксиом инцидентности, состоящую из 9 аксиом, $L\,1 - L\,9$, фиксирующих свойства разделяющие в множестве S_p „части", называемые прямыми и плоскостями. В третьей части работы доказываются 14 теорем, $T\,1 - T\,14$, следующих из аксиом инцидентности. В конце этой части указывается соответствие между „системой L" и системой Гильберта.

В четвертой части рассматривается множество S с элементами A^0, B^0. Части множества S группируются в „классы" H^i и определяются согласно соотношениям $I_1 - I_4$. Здесь определяются новые понятия „независимых элементов" и „размерности". В работе излагается пять теорем, доказательство которых является предметом следующей работы „n-мерные пространства инцидентности". В пятой части доказывается, что точки, прямые и плоскости являются элементами классов H^0, H^1, H^2 множества S_p. Доказывается, что класс H^3 множества S_p содержит единственный элемент, а именно S_p, и выводится, что класс H^4 множества S_p пуст, что и доказывает, что пространство S_p трехмерно.

В работе не рассматривается вопрос об эквивалентности новых введенных понятий „независимости" и размерности" классическим понятиям с тем же названием.

SUR UN SYSTÈME D'AXIOMES D'INCIDENCE

RÉSUMÉ

Ce travail, divisé en cinq parties, comprend une nouvelle liste d'axiomes d'incidence, différente de celle de Hilbert mais sensiblement équivalente. A la différence du «système de Hilbert», dit l'auteur dans

la première partie de son article, les droites et les plans sont considérés comme des « parties » de l'ensemble de points S_p, ensemble dénommé aussi espace S_p. La seconde partie comprend le nouveau système d'axiomes d'incidence, composé de 9 axiomes, L 1 — L 9, par lesquels on fixe les propriétés qui séparent, dans l'ensemble S_p, les « parties » dénomées droites et plans. La troisième partie comprend les démonstrations de 14 théorèmes ,T 1 — T 14, résultant des axiomes d'incidence ; à la fin de cette partie, l'auteur montre la correspondance entre le « système L » et le système de Hilbert. A la quatrième partie on considère un ensemble S ayant les éléments A^0, B^0, ... Les parties de cet ensemble S sont groupées par « classes » H^i, définies conformément aux relations $I_1 - I_4$. On y définit les notions nouvelles « d'éléments indépendants » et de « dimension ». On fait l'exposé de cinq théorèmes, dont la démonstration fera l'objet du prochain travail, qui sera intitulé *Espace d'incidence à n dimensions*. La cinquième partie s'occupe des points, droites et plans en tant qu'éléments des classes H^0, H^1, H^2 de l'ensemble S_p. On y démontre que la classe H^3 de l'ensemble S contient un seul élément — à savoir S_p —, et on déduit que la classe H^4 de l'ensemble S_p est vide, ce qui démontre que l'espace S_p est tridimensionnel.

L'auteur précise qu'il n'a pas abordé le problème de l'équivalence des notions nouvellement introduites — « indépendance » et « dimension » — avec les notions classiques du même nom.

BIBLIOGRAFIE

1. S. VASILACHE, *Elemente de teoria mulțimilor și a structurilor algebrice*. Acad. R.P.R., 1956.
2. BÉLA KERÉKJÁRTÓ, *Les fondements de la géométrie*. Akademiai Kiado, Budapest, 1955.
3. N. V. EFIMOV, *Geometrie superioară*. Ed. tehnică, București, 1952.

SOLUȚIA ELEMENTARĂ A ECUAȚIEI CU DERIVATE PARȚIALE LINIARE DE ORDINUL ȘASE, DE TIP HIPERBOLIC, CU PÎNZA CARACTERISTICĂ TRIPLĂ

DE

VERONICA ANTOHI-TEODORESCU

De la apariția lucrărilor lui J. Hadamard [1] rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuațiile cu derivate parțiale de tip hiperbolic, se bazează pe cunoașterea unei soluții elementare cu singularitate algebrică de-a lungul suprafețelor caracteristice.

Pentru ecuațiile liniare cu derivate parțiale de tip hiperbolic de ordinul n, cu formă caracteristică descompusă în produsul unei forme pătratice cu o formă de grad $n-2$, soluția elementară a fost determinată de N. Teodorescu [2], [3].

Ecuația cu derivate parțiale de ordin $2p$, obținută prin iterarea ecuației cu derivate parțiale de ordinul doi de tip hiperbolic, a fost studiată de I. P. Elianu [4], care a rezolvat și problema lui Cauchy.

Conform unei observații făcute de J. Hadamard, în [1], nu orice ecuație liniară cu derivate parțiale cu pînză caracteristică multiplă admite soluție cu singularitate algebrică de-a lungul hiper-suprafeței caracteristice.

N. Teodorescu [5] a determinat forma ecuației cu derivate parțiale de ordinul patru de tip hiperbolic cu pînză caracteristică dublă, astfel încît să admită o soluție elementară. Soluția elementară a fost obținută de V. Antohi-Teodorescu [6], [7].

În această notă se construiește soluția elementară a ecuației care admite o hipersuprafață caracteristică $G(x^i) = 0$, triplă, soluție a ecuației

$$P = p^{ij} \frac{\partial G}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j} = p^{ij} \pi_i \pi_j = 0 \tag{1}$$

I. FORMA ECUAȚIEI

Să considerăm ecuația omogenă

$$F(u)=p^{i_1i_2}\,p^{i_3i_4}\,p^{i_5i_6}\,\frac{\partial^6 u}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_6}}+b_5^{i_1i_2\cdots i_5}\frac{\partial^5 u}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_5}}+\ldots+b_1^{i_1}\frac{\partial u}{\partial x^{i_1}}+b_0u=0$$

$$(i_1,\ldots,i_6=1,2,\ldots,m) \tag{2}$$

în spațiul m-dimensional, cu coeficienții funcții analitice olomorfe în variabilele x^i, într-o regiune D a spațiului. Asociem coeficienților ecuației (2) formele multiliniare

$$A=p^{i_1i_2}\,p^{i_3i_4}\,p^{i_5i_6}\,\pi_{i_1}\,\pi_{i_2}\ldots\pi_{i_6}=(p^{i_1i_2}\,\pi_{i_1}\,\pi_{i_2})^{\,3};\quad B_j=b_j^{i_1\cdots i_j}\,\pi_{i_1}\ldots\pi_{i_j}$$

Să căutăm pentru ecuația (2) o soluție de forma

$$u=v\,F(G)+w \tag{3}$$

cu v și w funcții regulate de-a lungul hipersuprafeței $G=0$. Atunci

$$F(u)=F^{(\mathrm{VI})}Av+\left[A^{i_1}v_{i_1}+\left(\frac{1}{2}A^{i_1i_2}\pi_{i_1i_2}+B_5\right)v\right]F^{(\mathrm{V})}+..+F(v)F+F(w)=0 \tag{4}$$

cu

$$M^{i_1\ldots i_l}=\frac{\partial^l M}{\partial\pi_{i_1}\ldots\partial\pi_{i_l}},\quad v_{i_1\ldots i_l}=\frac{\partial^l v}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_l}}$$

În cazul particular, $F(G)=G^p$, $w=0$, relația (4) devine:

$$\begin{aligned}F(u)=\;&p(p-1)\ldots(p-5)\,G^{p-6}Av+p(p-1)\ldots(p-4)\,G^{p-5}\left[A^{i_1}v_{i_1}+\right.\\&+\left.\left(\frac{1}{2}A^{i_1i_2}\pi_{i_1i_2}+B_5\right)v\right]+p(p-1)\ldots(p-3)\,G^{p-4}\left[\frac{1}{2}A^{i_1i_2}v_{i_1i_2}+\right.\\&+\left(\frac{1}{2}A^{i_1i_2i_3}\pi_{i_2i_3}+B_5^{i_1}\right)v_{i_1}+\left(\frac{1}{8}A^{i_1i_2i_3i_4}\pi_{i_1i_2}\,\pi_{i_3i_4}+\frac{1}{6}A^{i_1i_2i_3}\,\pi_{i_1i_2i_3}+\right.\\&+\left.\left.\frac{1}{2}B_5^{i_1i_2}\,\pi_{i_1i_2}+B_4\right)v\right]+p(p-1)(p-2)\,G^{p-3}\left[\frac{1}{6}A^{i_1i_2i_3}v_{i_1i_2i_3}+\ldots\right]+\\&+\ldots+F(v)\,G^p=0\end{aligned} \tag{5}$$

Pentru ca funcția (5) să fie regulată pentru $G=0$, cu $p\neq 0,1,\ldots,5$, este necesară anularea coeficientului puterii $p-6$ a lui G. Deci:

$$A=p^3=0\quad\text{pentru } G=0 \tag{6}$$

de unde rezultă că $P=P'G$, P' fiind o funcție regulată și diferită de zero pentru $G=0$.

În consecință, teorema lui Le Roux-Delassus este satisfăcută, iar termenul de grad $p-6$ în G, devine de grad $p-3$.

De asemenea, coeficientul puterii $p-5$ a lui G trebuie să fie nul. Rezultă că forma multiliniară B_5, se anulează de-a lungul hipersuprafeței $G=0$, deci,

$$B_5 = \mathfrak{V}_1 P^2 + \mathfrak{V}_3 P \tag{7}$$

unde $\mathfrak{V}_1$ și $\mathfrak{V}_3$ sînt forme de gradul întîi, respectiv trei, în π_i

Introducem operatorii:

$$\Delta = p^{i_1 i_2} \frac{\partial^2}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}}; \quad \Theta = b^{i_1 i_2 i_3} \frac{\partial^3}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_3}}; \quad \widetilde{\Theta} = t^{i_1} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \tag{8}$$

cu formele corespunzătoare asociate

$$P = p^{i_1 i_2} \pi_{i_1} \pi_{i_2}; \quad \mathfrak{V} = b^{i_1 i_2 i_3} \pi_{i_1} \pi_{i_2} \pi_{i_3}; \quad \widetilde{\mathfrak{V}} = t^{i_1} \pi_{i_1} \tag{9}$$

Formăm ecuația cu derivate parțiale

$$F(u) = \Delta^3 u + (\Theta + \widetilde{\Theta}\,\Delta)\,\Delta u + Hu = 0 \tag{10}$$

unde Hu este o formă diferențială de ordinul patru în u. Pentru această ecuație

$$B_5 = \left(3 \frac{\delta P}{\delta x^{i_1}} \frac{\partial P}{\partial \pi_{i_1}} + \mathfrak{V}\right) P + \widetilde{\mathfrak{V}}\, P^2 = \mathfrak{V}_3 P + \mathfrak{V}_1 P^2 \text{ *)} \tag{11}$$

ceea ce corespunde condiției (7).

Funcția v se detemină cu ajutorul ecuației diferențiale cu derivate parțiale liniară și omogenă de ordinul întîi,

$$\left(\frac{1}{2} A^{i_2 i_2 i_3} \pi_{i_2 i_3} + B_5^{i_1}\right) v_{i_1} +$$

$$+ \left(\frac{1}{8} A^{i_1 \dots i_4} \pi_{i_1 i_2} \pi_{i_3 i_4} + \frac{1}{6} A^{i_1 i_2 i_3} \pi_{i_1 i_2 i_3} + \frac{1}{2} B_5^{i_1 i_2} \pi_{i_1 i_2} + B_4\right) v = 0. \tag{12}$$

Rezultă propoziția următoare:

Pentru ca ecuația cu derivate parțiale de tip hiperbolic de ordinul șase cu pînză caracteristică triplă, să admită o soluție cu singularitate algebrică de-a lungul hipersuprafeței caracteristice $G=0$, trebuie ca ea să fie de forma (10).

Ecuația diferențială ce determină funcția v poate fi de un ordin mai mare, dacă anulăm în (12) coeficientul derivatei de ordinul întîi v_{i_1},

$$\frac{1}{2} A^{i_1 i_2 i_3} \pi_{i_2 i_3} + B_5^{i_1} = 0 \qquad \text{pentru } G = 0 \tag{13}$$

---

*) Prin $\frac{\delta M}{\delta x^i}$ se înțelege derivarea în raport cu x^i a formei multiliniare M, numai prin intermediul coeficienților formei.

Cu această condiție, forma multiliniară B_4 nu mai este arbitrară ci trebuie să fie de forma

$$B_4 = \frac{\delta P}{\delta x^{i_1}} \frac{\delta P}{\delta x^{i_2}} \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_{i_1} \partial \pi_{i_2}} + \frac{\partial P}{\partial \pi_{i_1}} \frac{\partial P}{\partial \pi_{i_2}} \frac{\delta^2 P}{\delta x^{i_1} \delta x^{i_2}} +$$

$$+ \frac{\delta P}{\delta x^{i_1}} \frac{\delta P}{\partial \pi_{i_2}} \frac{\delta}{\delta x^{i_2}} \left(\frac{\partial P}{\partial \pi_{i_1}} \right) + \tilde{\mathfrak{B}} \frac{\delta P}{\partial x^{i_1}} \frac{\delta P}{\delta \pi_{i_1}} + CP + cP^2 \tag{14}$$

unde C este formă biliniară asociată operatorului $T = c^{i_1 i_2} \frac{\partial^2}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}}$ și c o funcție analitică și olomorfă în variabilele x^i.

Ecuația cu derivate parțiale

$$F(u) = \Delta^3 u + \tilde{\Theta} \Delta^2 u + (T + c\Delta)\Delta u + \overline{H} u = 0 \tag{15}$$

cu $\overline{H} u$ o formă diferențială de ordinul trei în u, are formele B_5 respectiv B_4 de forma (13), respectiv (14).

În acest caz funcția v este soluția unei ecuații diferențiale cu derivate parțiale liniară omogenă de ordinul trei,

$$\frac{1}{6} A^{i_2 i_2 i_3} v_{i_1 i_2 i_3} + \left[\frac{1}{4} A^{i_1 i_2 i_3 i_4} \pi_{i_3 i_4} + \frac{1}{2} B^{i_1 i_2} \right] v_{i_1 i_2} +$$

$$+ \left[\frac{1}{8} A^{i_1 i_2 \ldots i_5} \pi_{i_2 i_3} \pi_{i_4 i_5} + \ldots \right] v_{i_1} + [\ldots] v = 0.$$

Deoarece coeficientul derivatei $v_{i_1 i_2 i_3}$ nu se anulează de-a lungul suprafeței caracteristice $S = 0$, rezultă că ordinul cel mai mare al ecuației diferențiale ce intervine în determinarea funcției v este trei.

Ecuația (15) este un caz particular al ecuației (10), dar date fiind formele speciale ale lui B_5 și B_4 rezolvarea ei necesită o tratare separată.

II. DETERMINAREA FUNCȚIEI v

§ 1. Să căutăm pentru ecuația (10) o soluție de forma

$$u = v\Gamma^p \tag{16}$$

$\Gamma = 0$ fiind ecuația conoidului caracteristic.

Ținînd seama de relațiile :

$$P = 4\Gamma, \quad \pi_{i_1} = 2sp_{i_1}, \quad \frac{\partial P}{\partial \pi_{i_1}} = 4s \frac{dx^{i_1}}{ds}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \pi_{i_1} \partial \pi_{i_2}} \pi_{i_1 i_2} = 4m + \ldots,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \pi_{i_1}} \frac{\partial P}{\partial \pi_{i_2}} \pi_{i_1 i_2} = 8P - \frac{\delta P}{\delta x^{i_1}} \frac{\partial P}{\partial \pi_{i_1}} \tag{17}$$

verificate de-a lungul conoidului $\Gamma = 0$, prin anularea coeficientului puterii $p - 4$ a lui Γ, obținem ecuația diferențială*),

$$4s\overline{\mathfrak{B}}\frac{dv}{ds} + \left[\left(4(p-4) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial\pi_{i_1}\partial\pi_{i_2}}\pi_{i_1 i_2}\right)\overline{\mathfrak{B}} + 4s\frac{d\overline{\mathfrak{B}}}{ds} + 6p^{i_1 i_2}\frac{\delta P}{\delta x^{i_1}}\frac{\partial P}{\partial\pi_{i_1}} + \right.$$

$$\left. + 8s\frac{\partial P}{\partial\pi_{i_1}}\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta P}{\delta x^{i_1}}\right) - 16\frac{\delta P}{\delta x^{i_1}}\frac{\partial P}{\partial\pi_{i_1}} - \widetilde{\mathfrak{B}}\frac{\delta P}{\delta x^{i_1}}\frac{\partial P}{\partial\pi_{i_1}} - \frac{\delta\mathfrak{B}_3}{\delta x^{i_1}}\frac{\partial P}{\partial\pi_{i_1}} + B_4\right] v = 0 \quad (18)$$

cu

$$\overline{\mathfrak{B}} = -3\frac{\delta P}{\delta x^{i_1}}\frac{\partial P}{\partial\pi_{i_1}} + \mathfrak{B}_3.$$

Ecuația (18) se mai scrie :

$$s^4\frac{dv}{ds} + s^3[a_0 + s\alpha(s)]v = 0 \quad \text{cu} \quad a_0 = 4(p-1) + 2m \quad (18')$$

și $\alpha(s)$ o funcție olomorfă în s.

Pentru ca funcția $v(s)$ să fie regulată pe conoid și diferită de zero în vîrful conoidului ($s = 0$), a_0 trebuie să fie nul, deci

$$p = -\frac{m}{2} + 1. \quad (19)$$

Rezultă că pentru ecuația (10), soluția elementară este de forma

$$u = v\Gamma^{-\frac{m}{2}+1}$$

§ 2. În același mod se deduce ecuația diferențială pe care o satisface funcția $v(s)$ în cazul ecuației (15). Se obține :

$$s^3\frac{d^3v}{ds^3} + s^2(a_0 + sL(s))\frac{d^2v}{ds^2} + s[b_0 + sM(s)]\frac{dv}{ds} + [c_0 + sN(s)]v = 0 \quad (20)$$

cu $L(s)$, $M(s)$, $N(s)$ funcții olomorfe în s,

$$a_0 = 3(p-1) + \frac{3m}{2}; \quad b_0 = 3\left[(p-3)(p-4) + 4(p-3) + (p-3)m + \frac{3m}{2} + \frac{m^2}{4} + 2\right]$$

$$c_0 = (p-3)(p-4)(p-5) + 6(p-3)(p-4) + \frac{3}{2}(p-3)(p-4)m +$$

$$+ 6(p-3) + \frac{3(p-3)}{2}m + m + \frac{3(p-2)}{4}m^2 + \frac{m^3}{8}.$$

*) Prin $\frac{dM}{ds}$ se înțelege derivarea totală în raport cu s.

Ecuația diferențială (20) este de tip Fuchs, cu ecuația determinantă

$$\rho(\rho-1)(\rho-2)+\rho(\rho-1)a_0+b_0\rho+c_0=0 \tag{21}$$

satisfăcută de

$$\rho_1=\frac{-2p+2-m}{2};\quad \rho_2=\frac{-2p+4-m}{2};\quad \rho_3=\frac{-2p+6-m}{2}.$$

Deoarece diferența rădăcinilor ρ_1, ρ_2, ρ_3, este un număr întreg, soluția ecuației (20) corespunzătoare rădăcinii celei mai mari, nu va conține termen logaritmic. Cum însă funcția $v(s)$ trebuie să fie regulată pentru $s=0$ și $v(0)\neq 0$, e necesar ca

$$\rho_3=0 \quad \text{de unde} \quad p=-\frac{m}{2}+3. \tag{22}$$

În acest caz, soluția elementară a ecuației (15) este de forma :

$$u=v\Gamma^{-\frac{m}{2}+3}.$$

III. FORMA INVARIANTĂ ȘI SOLUȚIA ELEMENTARĂ A ECUAȚIEI (10)

§ 1. Fie elementul de arc riemannian

$$ds^2=g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta \tag{23}$$

unde g_{ij} sînt minorii normalizați ai determinantului $|p^{ij}|$ iar u_α, $u_{\alpha\beta}$, ... derivatele covariante ale funcției $u(x^1,\ldots,x^m)$ în raport cu metrica (23). Atunci, termenul de ordinul șase din ecuația cu derivate parțiale (10) se scrie

$$g^{\alpha\beta}[g^{\gamma\delta}(g^{\mu\nu}u_{\mu\nu})_{\gamma\delta}]_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}g^{\mu\nu}u_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu}$$

deoarece $(g^{\alpha\beta})_\gamma=0$.

Introducem operatorii

$$\Delta_2u=g^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta},\quad \Theta_3u=\beta^{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\beta\gamma},\quad \Theta_1u=\beta^\alpha u_\alpha \tag{24}$$

cu formele

$$P=g^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta,\quad B=\beta^{\alpha\beta\gamma}\pi_\alpha\pi_\beta\pi_\gamma,\quad T=\beta^\alpha\pi_\alpha$$

și tensorii contravarianți $c^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $d^{\alpha\beta\gamma}$, $e^{\alpha\beta}$, f^α cu

$$C=c^{\alpha\beta\gamma\delta}\pi_\alpha\pi_\beta\pi_\gamma\pi_\delta,\quad D=d^{\alpha\beta\gamma}\pi_\alpha\pi_\beta\pi_\gamma,\quad E=e^{\alpha\gamma}\pi_\alpha\pi_\beta,\quad F=f^\alpha\pi_\alpha.$$

Deci, ecuația (10) poate fi scrisă sub forma invariantă :

$$F(u)=\Delta_2^3u+(\Theta_3+\Theta_1\Delta_2)\Delta u+c^{\alpha\beta\gamma\delta}u_{\alpha\beta\gamma\delta}+d^{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\beta\gamma}+e^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}+f^\alpha u_\alpha+gu=0 \tag{25}$$

Coeficienții ecuației (25) se calculează cu ajutorul coeficienților ecuației (10) și simbolii lui Cristoffell de speța I-a și a II-a.

§ 2. Să căutăm pentru ecuația (25) o soluție elementară

$$u = \varphi \Gamma^p \tag{26}$$

Obținem

$$F(u) = p(p-1)(p-2)(p-3)\,\Gamma^{p-4} B\Omega_p\varphi + p(p-1)(p-2)\times \Gamma^{p-3} A_p(\varphi) + p(p-1)\Gamma^{p-2} B_p(\varphi) + p\Gamma^{p-1} C_p(\varphi) + \Gamma^p F(\varphi) = 0$$

unde

$$\Omega'_p = 4s\frac{d.}{ds} + \left[4(p-1) + \Delta_2\Gamma + \frac{C}{B}\right]. \tag{27}$$

Pentru ca $F(u)$ să fie regulată de-a lungul conoidului $\Gamma = 0$, e necesar ca funcția φ să fie soluție a ecuației diferențiale de ordinul întîi :

$$\Omega_p\varphi = 0 \tag{28}$$

Deoarece funcția $\varphi(s)$ trebuie să fie regulată pentru $s = 0$, obținem $p = -\frac{m}{2} + 1$, rezultat ce concordă cu cel din (II, § 1).

Funcția φ astfel obținută, pe care o notăm $\overset{0}{\varphi}$ este definită doar pe hipersuprafața conoidului $\Gamma = 0$, nu și în afara lui.

Pentru a determina soluția în orice punct din vecinătatea vîrfului conoidului, se caută funcția φ sub forma unei serii de puteri ale lui Γ, care să se reducă la $\overset{0}{\varphi}$ pentru $\Gamma = 0$,

$$\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \overset{j}{\varphi}\Gamma^j \tag{29}$$

Funcțiile $\overset{j}{\varphi}$ sînt soluții ale ecuațiilor diferențiale :

$$\Omega_{p+j}\overset{j}{\varphi} = -\frac{1}{(p+j)B}\left[A_{p+j-1}\left(\overset{j-1}{\varphi}\right) + \frac{B_{p+j-2}\left(\overset{j-2}{\varphi}\right)}{p+j-1} + \frac{C_{p+j-3}\left(\overset{j-3}{\varphi}\right)}{(p+j-1)(p+j-2)} + \frac{F\left(\overset{j-4}{\varphi}\right)}{(p+j-1)(p+j-2(p+j-3)}\right] = f_{p+j} \tag{30}$$

$$A_{p-1} = B_{p-2} = B_{p-1} = C_{p-3} = C_{p-2} = C_{p-1} = 0$$

Prin combinarea ecuațiilor (28) cu (30) obținem ecuația diferențială :

$$\frac{d}{ds}\left(s^j \frac{\overset{j}{\varphi}}{\overset{0}{\varphi}}\right) = \frac{s^{j-1}}{4\overset{0}{\varphi}} f_{p+j}. \tag{31}$$

Funcțile $\overset{j}{\varphi}$ se comportă în origine ca $s^{-2j+1}\ln s$, dar produsul $\overset{j}{\varphi}\Gamma^j$ se anulează pentru $s = 0$.

Seria (29) este uniform convergentă în domeniul

$$\Gamma(p_\alpha, x^\alpha) \leqslant \frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^q \tag{32}$$

unde s-a notat cu ρ raza minimă a domeniilor de convergență ale coeficienților ecuației (25), cu σ suma valorilor absolute ale coordonatelor normale atașate vîrfului conoidului în spațiul riemannian R_m, iar ξ o constantă.

Dar ecuația (30) nu poate fi rezolvată decît dacă

$$p + j \neq 0, \quad \text{adică} \quad m \neq 2(j+1) \tag{33}$$

Rezultă că soluția $u = \sum_{j=0}^{\infty} \overset{j}{\varphi}\Gamma^{p+j}$, $p = -\frac{m}{2} + 1$ poate fi calculată numai într-un spațiu riemannian R_m cu un număr impar de dimensiuni.

§ 3. Dacă spațiul R_m are un număr par de dimensiuni $m = 2n$, soluția elementară a ecuației (25), are singularitate algebrico-logaritmică dacă $p < 0$, sau singularitate logaritmică dacă $p \geqslant 0$.

a) $p < 0$, $m = 2n > 2$

Căutăm pentru ecuația (25) o soluție de forma :

$$u = \varphi\Gamma^p + \psi \log \Gamma, \qquad p = -\frac{m}{2} + 1 \tag{34}$$

Dezvoltăm funcțiile φ și ψ în serii de puteri ale lui Γ

$$\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \overset{j}{\varphi}\Gamma^j, \quad \psi = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{k}{\psi}\Gamma^k \tag{35}$$

Funcțiile $\overset{j}{\varphi}$ pentru $0 \leqslant j \leqslant -p-1$ sînt soluții ale ecuației (30). Pentru $-p \leqslant j \leqslant -p+3$ aceste funcții rămîn nedeterminate și le vom considera egale cu zero pentru simplificarea calculelor, fără a restrînge generalitatea. Atunci :

$$F(u) = F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \overset{k}{\psi}\Gamma^k\right)\log\Gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\Gamma^{k-4}[T_k(\overset{k}{\psi}) + \Gamma S_k(\overset{k}{\psi}) + \Gamma^2 R_k(\overset{k}{\psi}) + \Gamma^3 P_k(\overset{k}{\psi})] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}(k+4)\ldots(k+1)\,\Gamma^k[\Omega_{k+4}\overset{-p+k+4}{\varphi} - f_{k+4}] + \Gamma^{-4}\mathfrak{P}_4(\overset{-p-1}{\varphi}, \ldots, \overset{-p-4}{\varphi}) +$$

$$+ \Gamma^{-3}\mathfrak{P}_3(\overset{-p-1}{\varphi}, \ldots \overset{-p-3}{\varphi}) + \Gamma^{-2}\mathfrak{P}_2(\overset{-p-1}{\varphi}, \overset{-p-2}{\varphi}) + \Gamma^{-1}\mathfrak{P}_1(\overset{-p-1}{\varphi}) = 0 \tag{36}$$

$$T_k(\overset{k}{\psi}) = \Omega_k\overset{k}{\psi} + k(k-1)(k-2)(k-3)\,V(\overset{k}{\psi}).$$

Pentru regularitatea funcției $F(u)$ pe $\Gamma = 0$, e necesar ca

$$F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\overset{k}{\psi}\Gamma^k\right) = 0 \tag{37 a}$$

$$T_i(\overset{i}{\psi}) = -[S_{i-1}(\overset{i-1}{\psi}) + R_{i-2}(\overset{i-2}{\psi}) + P_{i-3}(\overset{i-3}{\psi}) + \mathfrak{P}_{4-i}(\overset{-p-1}{\varphi}, \ldots, \overset{-p-4+i}{\varphi})] = \overline{f_i}$$

$$0 \leqslant i \leqslant 3. \tag{37 b)'}$$

Relația (37 a) cere ca funcția ψ să satisfacă ecuația (25) pentru $p = 0$. Deci, funcțiile $\overset{k}{\psi}$ sînt soluții ale ecuațiilor diferențiale

$$\Omega_k \overset{k}{\psi} = f_k(\psi) \quad \text{pentru} \quad k \geqslant 4 \tag{38}$$

Relațiile (37 b) determină funcțiile $\overset{0}{\psi}, \overset{1}{\psi}, \overset{2}{\psi}, \overset{3}{\psi}$, prin

$$\Omega_i \overset{i}{\psi} = \bar{f}_i(\varphi, \psi), \qquad 0 \leqslant i \leqslant 3 \tag{39}$$

Relațiile (37 a), (37 b) fiind satisfăcute, $F(u)$ se reduce la o serie de puteri pozitive ale lui Γ. Prin anularea coeficienților, obținem,

$$\Omega_k \overset{-p+k}{\varphi} = \tilde{f}_k(\varphi, \psi) \qquad k \geqslant 4 \tag{40}$$

Ecuațiile (38), (39), (40) pot fi scrise și

$$\frac{d}{ds}\left(s^{-p+k}\frac{\overset{k}{\psi}}{\overset{0}{\varphi}}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\overset{0}{\varphi}}\, s^{-p+k-1}\bar{f}_k(\varphi, \psi) & 0 \leqslant k \leqslant 3 \\ \dfrac{1}{4\overset{0}{\varphi}}\, s^{-p+k-1} f_k(\psi) & k \geqslant 4 \end{cases}$$

$$\frac{d}{ds}\left(s^{-p+k}\frac{\overset{-p+k}{\varphi}}{\overset{0}{\varphi}}\right) = \frac{1}{4\overset{0}{\varphi}}\, s^{-p+k-1}\tilde{f}_k(\varphi, \psi) \qquad k \geqslant 4.$$

Soluțiile acestor ecuații devin infinite în origine ca $s^{2p-2k+1}\ln s$.

b) $p \geqslant 0$, $m = 2$ $n \leqslant 2$.

Căutăm pentru (25) o soluție cu singularitate logaritmică

$$u = \psi \Gamma^p \log \Gamma \quad , \quad p = -\frac{m}{2} + 1. \tag{41}$$

Ca și în a), factorul $\psi\Gamma^p$ trebuie să satisfacă ecuația $F(u) = 0$. Aparent nu este posibil, deoarece ecuația este considerată într-un spațiu cu un număr par de dimensiuni. Dacă însă în (34) considerăm

$$\varphi = 0, \quad \psi = \sum_{h=0}^{\infty} \overset{p+h}{\psi}\, \Gamma^{p+h}, \quad \overset{p+h}{\psi} = 0 \text{ pentru } h < 0,$$

atunci

$$\Omega_{p+h} \overset{p+h}{\psi} = f_{p+h} \ , \quad p + h \geqslant 4 \text{ sau } h \geqslant 3 + n \tag{42}$$

Din relațiile

$$T_p(\overset{p}{\psi}) = \Omega_p \overset{p}{\psi} = 0 \tag{43}$$

$$T_{p+h}(\overset{p+h}{\psi}) = \Omega_{p+h} \overset{p+h}{\psi} = g_{p+h}(\overset{p+h-1}{\psi}, \ldots \overset{p}{\psi}),\ 0 \leqslant h < 3 + n \tag{44}$$

se determină funcțiile $\overset{p}{\psi}, \overset{p+1}{\psi}, \overset{p+2}{\psi}, \ldots, \overset{p+2+n}{\psi}$. Se știe din (III, 2) că ecuația (43) admite o soluție regulată și diferită de zero pentru $s = 0$.

Funcția $\psi\Gamma^p$ fiind determinată, $F(u)$ se reduce la o funcție olomorfă în Γ.

$$F(\psi\Gamma^p \log \Gamma) = T(\psi, \Gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k \Gamma^k . \tag{45}$$

Pentru determinarea efectivă a soluției ecuației (25) adăugăm funcției (41) o funcție de corecție w, pentru care

$$F(w) = F\left(\sum_{h=0}^{\infty} \overset{h}{w}\Gamma^h\right) = -T(\psi, \Gamma) \tag{46}$$

Funcția w, olomorfă în Γ, există conform teoremei de existență Cauchy-Kowalewskaia.

Relațiile

$$\Omega_h(\overset{h}{\omega}) = f_h(\omega) + H_{h-3}(\psi) = \bar{g}_h(\omega, \psi) \tag{47}$$

determină funcțiile $\overset{h}{\omega}$, $h \geqslant 4$. Rămîn nedeterminate funcțiile $\overset{0}{\omega}, \overset{1}{\omega}, \overset{2}{\omega}, \overset{3}{\omega}$, dar supuse condiției de a fi olomorfe în jurul lui $s = 0$.

Combinînd ecuațiile (42), (44), (47) cu (43) obținem :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left(s^h \dfrac{\overset{p+h}{\psi}}{\overset{p}{\psi}}\right) = \dfrac{1}{\overset{p}{4\psi}} s^{h-1} g_{p+h} & h = 0, 1, \ldots \\ \dfrac{d}{ds}\left(s^{h-p} \dfrac{\overset{h}{\omega}}{\overset{p}{\psi}}\right) = \dfrac{1}{\overset{p}{4\psi}} s^{h-p-1} \bar{g}_h & h \geqslant 4. \end{cases} \tag{48}$$

Funcțiile $\overset{p+h}{\psi}$, respectiv $\overset{h}{\omega}$, se comportă în origine ca $s^{-2h+1} \ln s$, respectiv $s^{-2h+2p+1} \ln s$.

Seriile de puteri ale lui Γ, ce intervin sînt uniform convergente într-un domeniu de forma (32), constanta ξ variind de la caz la caz.

IV. FORMA INVARIANTĂ ȘI SOLUȚIA ELEMENTARĂ A ECUAȚIEI (15)

§ 1. Folosind aceeași metodă ca în (III), forma invariantă a ecuației (15) este

$$F(u) = \Delta_2^3 u + \Theta_1 \Delta_2^2 u + (\Theta_2 + c\Delta_2)\Delta_2 u + d^{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha\beta\gamma} + e^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} + f^{\alpha} u_{\alpha} + gu = 0 \tag{49}$$

Θ_2 fiind un operator diferențial de ordinul doi, căruia i se asociază forma biliniară $T = c^{\alpha\beta}\pi_\alpha \pi_\beta$.

§ 2. Ecuația (49) are o soluție elementară de forma (26), unde funcția φ satisface ecuația :

$$\overline{\Omega}_p\varphi = 64s^3\frac{d^3\varphi}{ds^3} + 16s^2[12(p-1)+M]\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 4s[48(p-1)(p-2)+$$

$$+8(p-2)M+Q]\frac{d\varphi}{ds} + [64(p-1)(p-2)(p-3)+$$

$$+16(p-2)(p-3)M+4(p-1)Q+R]\varphi = 0$$

$$M = 3\Delta_2\Gamma + B; \quad Q = (M+B)(\Delta_2\Gamma+4)+\ldots;$$

$$R = 32\Delta_2\Gamma - 4M(\Delta_2\Gamma+4)+\ldots \tag{50}$$

care este o ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul trei, de tip Fuchs, a cărei ecuație determinată este (21). Conform concluziilor din (II, 2) ordinul de singularitate al soluției este $p = -\frac{m}{2}+3$.

Funcțiile $\overset{j}{\varphi}$ corespunzătoare lui (29) sînt determinate de

$$\frac{d}{ds}\left\{s^3\beta^3\overset{0}{\varphi}{}^3 S\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2}{\beta}\frac{d}{ds}\left(s^j\frac{\overset{j}{\varphi}}{\overset{0}{\varphi}}\right)\right]\right\} = \frac{1}{64}s^{2+j}\beta^2\overset{0}{\varphi}{}^2 S f_{p+j}(\overset{j-1}{\varphi},\overset{j-2}{\varphi},\overset{j-3}{\varphi}) \tag{51}$$

$\overset{0}{\varphi}$ fiind soluția regulată și diferită de zero în vîrful conoidului, a ecuației $\Omega_p\varphi = 0$, $\beta(s)$ o funcție olomorfă în s, iar

$$S = e^{\int_0^s \frac{1}{4s}[B+3(\Delta_2\Gamma-2m)]ds}.$$

Ecuațiile (51) definesc funcțiile $\overset{j}{\varphi}$ numai într-un spațiu R_m cu un număr impar de dimensiuni.

§ 3. În cazul cînd ecuația (49) este considerată într-un spațiu cu un număr par de dimensiuni, se obțin rezultatele următoare :

a) $p < 0, \qquad m = 2n > 6.$

Funcțiile $\overset{j}{\varphi}$, respectiv $\overset{k}{\psi}$, corespunzătoare soluției de forma (35) sînt soluții ale ecuațiilor diferențiale :

$\overset{j}{\varphi}$, $0 \leqslant j \leqslant -p-1$, soluții ale ecuațiilor (51)

$$\frac{d}{ds}\left\{s^3\beta^3\overset{0}{\varphi}{}^3 S\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2}{\beta}\frac{d}{ds}\left(s^{-p+k}\frac{\overset{-p+k}{\varphi}}{\overset{0}{\varphi}}\right)\right]\right\} = \frac{1}{64}s^{-p+k+2}\beta^2\overset{0}{\varphi}{}^2\overline{f}_k, \quad k \geqslant 3$$

$$\frac{d}{ds}\left\{s^3\beta^3\overset{0}{\varphi}{}^3 S\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2}{\beta}\frac{d}{ds}\left(s^{-p+k}\frac{\overset{k}{\psi}}{\overset{0}{\varphi}}\right)\right]\right\} = \frac{1}{64}s^{-p+k+2}\beta^2\overset{0}{\varphi}{}^2\widetilde{f}_k, \quad k \geqslant 0. \tag{52}$$

Funcțiile $\overset{-p}{\varphi}$, $\overset{-p+1}{\varphi}$, $\overset{-p+2}{\varphi}$ rămîn nedeterminate și în calcule au fost considerate egale cu zero.

b) $p \geqslant 0, \qquad m = 2n \leqslant 6.$

Ecuațiile diferențiale

$$\Omega_p(\overset{p}{\psi}) = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left\{s^3\beta^3\overset{p}{\psi}{}^3 S\,\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2}{\beta}\,\frac{d}{ds}\left(s^h\,\frac{\overset{p+h}{\psi}}{\overset{p}{\psi}}\right)\right]\right\} = \frac{1}{64}\,s^{h+2}\beta^2\overset{p}{\psi}{}^2 g_{p+h}, \qquad h \geqslant 0$$

$$\frac{d}{ds}\left\{s^3\beta^3\overset{p}{\psi}{}^3 S\,\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2}{\beta}\,\frac{d}{ds}\left(s^{h-p}\,\frac{\overset{h}{\omega}}{\overset{p}{\psi}}\right)\right]\right\} = \frac{1}{64}\,s^{h-p+2}\,\beta^2\overset{p^2}{\psi}\,\bar{g}_h \qquad h \geqslant 3 \tag{53}$$

au ca soluții funcțiile $\overset{p+h}{\psi}$ și $\overset{h}{\omega}$. Funcțiile $\overset{0}{\omega}$, $\overset{1}{\omega}$, $\overset{2}{\omega}$ sînt funcții arbitrare, olomorfe în jurul punctului $s = 0$.

În vîrful conoidului, funcțiile $\overset{j}{\varphi}$, $\overset{j}{\psi}$, $\overset{j}{\omega}$, din (IV, 2, 3) se comportă ca funcțiile corespunzătoare din (III, 2, 3). Domeniul de convergență al seriilor de puteri în Γ, este de aceeași natură cu (32), exceptînd constanta ξ, respectiv σ, care diferă de la caz la caz.

§ 4. Pentru anumite valori ale coeficienților ecuația (15) devine forma iterată de ordinul trei a unui operator de ordinul doi

$$F(u) = \left(p^{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} + h^i\,\frac{\partial u}{\partial x^i} + du\right)^{(3)}. \tag{54}$$

Ori (54) se obține din $F^{2p}(u)$, studiată în [4], pentru $p = 3$. Rezultatele obținute coincid.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ТРОЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ

РЕЗЮМЕ

Доказывается: для того, чтобы уравнение в частных производных шестого порядка с тройной характеристической полостью обладало решением с алгебраической особенностью на характеристической поверхности $G = 0$, оно должно иметь вид (10) или (15).

Строятся электронные решения в случае четного и нечетного числа измерений, причем особенность является алгебраической, соответственно алгебраически-логарифмической.

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE SIX, DU TYPE HYPERBOLIQUE, À CARACTÉRISTIQUE TRIPLE

RÉSUME

On démontre que, pour que l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique d'ordre six et à caractéristique triple, puisse admettre une solution à singularité algébrique le long de l'hypersurface caractéristique $G = 0$, elle doit revêtir la forme (10) ou (15).

On construit les solutions élémentaires, aussi bien dans le cas d'un nombre pair qu'impair de dimensions de l'espace, la singularité étant algébrique, respectivement algébrico-logarithmique.

BIBLIOGRAFIE

1. J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hiperboliques.* Paris, 1932.
2. N. TEODORESCO, *Les solutions élémentaires d'une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre supérieur.* Comm. math. helv., **11**, 1—42 (1937—1938).
3. — *Recherches sur les équations aux dérivées partielles linéaires, d'ordre quelconque. Les solutions élémentaires.* Ann. Sci. de l'Univ. de Iassy, 1938, **XXIV**, II, 236—321 (1938).
4. I. P. ELIANU, *Problema lui Cauchy pentru ecuațiile cu derivate parțiale lineare polihiperbolice normale.* Studii și cercetări matematice, **III**, *3—4* (1952).
5. N. TEODORESCO, *Sur les solutions élémentaires des équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples.* Journ. de Math. pures et appl., **XIV**, *102*, 329—343 (1937).
6. V. ANTOHI-TEODORESCU, *Soluția elementară a ecuației cu derivate parțiale de ordinul al IV-lea cu pînză caracteristică dublă.* **(I)**, An. Univ. „C. I. Parhon", Buc. seria șt. mat., *15*, 9—23 (1957).
7. — *Soluția elementară a ecuației cu derivate parțiale de ordinul al VI-lea cu pînză caracteristică dublă* **(II)**, An. Univ. „C. I. Parhon", Buc., seria șt. mat., *17*, 9—21 (1958).

CERCETĂRI DE GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ ÎN ROMÎNIA *)

La al IV-lea Congres al Matematicienilor Romîni, care a avut loc în București de la 27 mai la 5 iunie a.c., și la care au luat parte G. Cimmino, B. Segre și M. Villa din Italia, s-au prezentat cinci rapoarte asupra rezultatelor obținute de matematicienii romîni în diferite domenii, în special după 1940. Aceste rapoarte se refereau la 1) geometria diferențială; 2) ecuații diferențiale ordinare și cu derivate parțiale și ecuații funcționale; 3) teorema funcțiilor; 4) algebra, topologie, analiză funcțională, logică matematică; 5) matematici aplicate.

Raportul asupra geometriei diferențiale a fost făcut prin colaborare de G. T. Gheorghiu, O. Mayer, T. Mihăilescu, G. Vrănceanu și a fost ținut la Congres de G. Vrănceanu.

Dăm în cele ce urmează cîteva note referitor la raportul asupra geometriei diferențiale, domeniu de cercetări cultivat în mod special în Romînia și în care matematicienii romîni au adus importante contribuții.

★

Primele cercetări de geometrie diferențială în Romînia se datoresc lui E. Bacaloglu și se referă la o nouă formulă pentru curbura suprafețelor.

Fondatorul geometriei diferențiale în Romînia este considerat G. Țițeica, profesor la Universitatea din București de la 1900 la 1930. Opera lui Țițeica se axează pe studiul proprietăților proiective ale suprafețelor cu ajutorul ecuației lui Laplace care se asociază familiilor de curbe și congruențelor de drepte. Țițeica este considerat și unul din fondatorii geometriei diferențiale centro-afine **).

Cercetările în geometria diferențială a spațiilor lui Riemann inițială în Romînia cu lucrările lui A. Myller, profesor la Universitatea din Iași de la 1911.

În 1942, A. Myller a dat noțiunea de paralelism al unei familii de plane și noțiunea de concurență, care generalizează noțiunea de paralelism a lui Levi-Civita.

În același timp A. Myller și O. Mayer au inițiat o serie de cercetări asupra geometriei centro-afine și alte geometrii definite prin diferite subgrupuri ale grupului proiectiv ***) La aceste cercetări au participat apoi I. Popa, I. Creangă, G. Gheorghiev, E. Arghiriade și alții și au format un domeniu de studiu pe care romînii îl numesc „al

*) Acest articol a apărut în limba italiană în Bolletino dell'Unione Matematica Italiana, Ser III An XI, Nr. 4, p. 591 și semnat M. V. Pentru interesul pe care-l prezintă pentru cititorii romîni am socotit să-l publicăm în limba romînă.

**) Țițeica a considerat suprafețele numite sfere centro-afine, suprafețe pentru care raportul K/d^4 este constant, în care K este curbura lui Gauss iar d distanța la un punct fix.

***) Lucrările de geometrie diferențială centro-afină hiperbolică se datoresc lui O. Mayer și se referă la teoria suprafețelor și a congruențelor de drepte. Mayer se ocupă de asemenea de geometria diferențială a grupului proiectiv biaxial determinînd invarianții curbelor și ai suprafețelor riglate. În această direcție mai există și rezultatele lui E. Arghiriade asupra curbelor isotrope ale acestei geometrii.

Şcolii de geometrie din Iaşi", studii care au avut o mare rezonanţă şi în multe lucrări ale geometrilor ruşi.

A. Pantazi (1896—1948) a dezvoltat cercetările asupra proprietăţilor proiective ale suprafeţelor şi a ipersuprafeţelor prin metoda reperului mobil, pe care el o introduce pentru prima oară în Romînia. Ultimele cercetări ale lui Pantazi, privesc proprietăţile proiective ale suprafeţelor neolonome, domeniu de studiu a lui E. Bompiani.

Cercetările lui Pantazi au fost continuate de T. Mihăilescu de la Universitatea din Cluj şi cele ale lui Ţiţeica de G. T. Gheorghiu de la Universitatea din Timişoara şi de unii elevii ai săi.

Studiul spaţiilor lui Riemann şi al spaţiilor cu conexiune au făcut obiectul cercetărilor lui G. Vrănceanu de la Universitatea din Bucureşti. Pornind de la studiul stabilităţi[i] anumitor sisteme mecanice neolonome, problemă pusă de Levi-Civita, Vrănceanu introduce în 1926 spaţiile neolonome, definite într-un spaţiu al lui Riemann V_n printr-un sistem necomplet integrabil de $n - m$ ecuaţii Pfaff. Spaţiile neolonome au interesat mulţi geometrii romîni (M. Haimovici, S. Petrescu şi alţii) şi italieni printre care Enea Bortolotti şi A. Maxia.

Cercetările recente ale lui G. Vrănceanu şi ale elevilor săi (P. Mocanu, C. Teleman şi alţii) se referă la grupurile de mişcări în spaţiile cu conexiune afină şi la grupurile lui Lie. Multe din aceste rezultate sînt conţinute în cartea lui G. Vrănceanu *Leçons de Géométrie différentielle* din care primul volum a apărut în limba franceză în 1947 şi al doilea în limba romînă în 1951 *).

Sînt de remarcat acele spaţii pe care G. Vrănceanu le numeşte spaţii cu conexiune afină constantă **).

În perioada 1940—1955 (la care se referă în special raportul a arătat) şi fără a lăsa la o parte vechile direcţii de cercetare în care au adus importante contribuţii (în afară de autorii citaţi A. Haimovici, F. Marcus şi alţii), noi domenii au fost cercetate de geometrii romîni ca cel al geometriei diferenţiale globale (G. Vrănceanu), teoria obiectelor geometrice (N. Teodorescu, G. Vrănceanu, O. Gheorghiu, N. Mihăileanu), geometria anumitor spaţii cu grup fundamental (O. Mayer şi alţii) şi geometria familiilor de transformări (M. Haimovici).

Mai sînt încă şi alte feluri de geometrie diferenţială care au fost cultivate de geometrii romîni în ultimul timp, ca geometria diferenţială a transformărilor punctuale între spaţii liniare (I. Creangă), teoria quasi-asimptotelor (C. Bogdan) etc. Putem afirma că cercetările dezvoltate de geometrii romîni privesc cea mai mare parte a domeniilor geometriei diferenţiale.

★

La această înflorire a studiului geometriei diferenţiale în Romînia nu este străină, intensa colaborare care a avut loc în trecut între matematicienii romîni şi cei italieni, colaborare căreia îi urăm să poată continua şi să se intensifice în viitor.

*) O nouă ediţie va apare în curînd în limba franceză.

**) Sînt spaţiile cu conexiune afină A^n care posedă un grup simplu tranzitiv abelian. Luînd acest grup ca grupul translaţiilor $x'^i = x^i + a^i$, componentele Γ^i_{jk} ale conexiunii spaţiului A_n sînt constante. Aceste spaţii se pot pune în legătură cu o algebră de numere ipercomplexe e_i a cărei lege de multiplicare este $e_j e_k = \Gamma^s_{jk} e_s$; algebra este comutativă dacă spaţiul este fără torsiune şi asociativă dacă spaţiul este fără curbură. Dacă algebra este asociativă şi comutativă spaţiul $A_n(x^1, \ldots, x^n)$ este cu conexiune afină constantă şi local euclidian. Este interesant faptul că dacă spaţiul A_n este echivalent în mare cu spaţiul euclidian afin $E_n(u^1 \ldots, u^n)$ trecerea de coordonate de la A_n la E_n este realizată de anumite transformări cremaniene întregi. Transformările cremaniene întregi au fost studiate recent în Germania şi în Italia de B. Segre şi au făcut obiect de discuţie în Congresul de la Bucureşti.

SERGE LANG, *Introduction to algebraic geometry* (Introducere în geometria algebrică) Interscience Tracts on Pure and Applied Mathematics, Number 5, 260 p.

Geometria algebrică studiază diversele structuri ce se pot defini în mod natural pornind de la mulțimea de zero-uri dintr-un spațiu afin sau proiectiv (în raport cu un corp dat) a unui ideal de polinoame. Cele mai însemnate tipuri de structuri ce se introduc în acest mod sînt cele *algebrice*, *geometrice* sau *topologice*. (Dacă considerăm — de exemplu — corpul complex C, atunci mulțimea zerou-rilor din spațiul proiectiv complex P^m al unui ideal omogen al inelului $C[X_0, \ldots, X_m]$ poate fi înzestrat, în anumite condiții, cu o structură de varietate kähleriană).

Cartea de față constituie o excelentă introducere în studiul modern al structurilor algebrico-geometrice întîlnite în Geometria Algebrică. Capitolul I conține expunerea principalelor definiții și rezultate din teoria inelelor de valuare. Autorul își creează din teoria inelelor de valuare o tehnică prețioasă utilizată foarte des în capitolele următoare ale cărții.

În capitolul II se studiază noțiunile de mulțime și k-varietate algebrică ($k \subset \Omega$). Aici spre deosebire de capitolul următor, este dezvoltată o teorie a varietăților algebrice relativă la un corp de bază fix k. Principalele teoreme demonstrate în acest capitol sînt : teorema zero-urilor a lui Hilbert și teoreme asupra dimensiunii varietăților algebrice.

Capitolul mai include un paragraf privitor la teoria clasică a eliminării dar tratată pe baza rezultatelor despre inelele de valuare obținute în capitolul I.

Între noțiunile fundamentale introduse în capitolul I este și aceea de punct generic al unei k-varietăți algebrice. Această noțiune se dovedește a fi de o supleță deosebită în teoria k-varietăților algebrică și justifică în mare măsură considerarea acestora din urmă. Totuși noțiunea de k-varietăți prezintă unele dezavantaje. Dacă V este, de exemplu o k-varietăți și $k \subset k' \subset \Omega$, atunci V nu este în general o k'-varietate algebrică. Dificultăți apar de asemenea, la considerarea varietății produs, în teoria corespondențelor etc. Pentru înlăturarea acestor dificultăți se introduce noțiunea de varietate absolută în sensul lui A. Weil. Capitolul III al cărții este consacrat introducerii și studiului noțiunii de varietate absolută a corpului de definiție asociat unei varietăți absolute, punct generic etc. Capitolul III mai conține un paragraf despre topologia lui Zariski și unul despre noțiunea de raționalitate a unui ciclu în raport cu un corp.

În capitolul IV sînt expuse teoremele principale privitoare la produsele de varietăți, proiecții, corespondențe etc. În încheierea capitolului se expune și se analizează noțiunea de varietate abstractă în sensul lui A. Weil.

Capitolul V, dedicat varietăților normale încheie oarecum partea privitoare la teoria generală algebrico-geometrică a varietăților algebrice.

În celelalte capitole se expun chestiuni mai speciale :

Devizori și sisteme liniare (Cap. VI), Forme diferențiale (Cap. VII), Teoria punctelor simple (Cap. VIII), Grupuri algebrice (Cap. IX), Teorema lui Riemann-Roch (Cap. X).

În alegerea noțiunilor și a teoremelor expuse în aceste capitole precum și a metodelor utilizate autorul a avut în vedere cercetările conținute în memoriile recente. Scopul acestor capitole este de a ușura cititorului studiul lucrărilor recente de geometrie algebrică. Fiecare capitol este însoțit de un comentariu istoric precum și de indicații bibliografice.

I. Bucur

ROGER GODEMENT, *Théorie des faisceaux* (Teoria fasciculelor). Actualités scientifiques et industrielles 1952, Hermann, Paris, 1958, 280 p.

Cartea lui R. Godement e prima expunere sistematică cu demonstrații complete a teoriei fascicolelor.

Originile „istorice" ale teoriei fascicolelor sînt pe de o parte teoria coeficienților locali ai lui Steenrod, pe de altă parte lucrările lui Oka asupra problemei lui Cousin.

Dezvoltarea propriu-zisă a teoriei începe însă de abia cu lucrările fundamentale ale lui Jean Leray (L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue. Journ. math. pur. et appl. 1950, p. 1 — 139). J. Leray a dezvoltat teoria fascicolelor în toată generalitatea ei (ceea ce numește Leray fascicol este echivalent cu ceea ce se numește astăzi prefascicol) și a aplicat-o la studiul coomologiei spațiilor fibrate. Teoria coomologiei în raport cu un fascicol, construită de J. Leray permite să se demonstreze o teoremă de unicitate a teoriei coomologiei foarte generală, care cuprinde drept caz particular, teorema lui de Rham.

Lucrările lui Leray au fost reluate și generalizate în seminarul H. Cartan (Sém. de l'Ec. Norm. Sup. 1950—1951, anul III). Teoria lui H. Cartan introduce o familie Φ, de părți paracompacte ale spațiului considerat (el însuși paracompact) ; această familie joacă rol de suporți. Cazul lui Leray corespunde familiei Φ compacte. De asemenea, H. Cartan construiește o teorie axiomatică a coomologiei în raport cu un fascicol și cu o familie Φ. Această teorie permite fundamentarea în toată generalitatea a teoriei dualității pe varietăți (fără nici o ipoteză de triangulabilitate, diferențiabilitate etc).

În fine, lucrările diferiților autori (H. Cartan, J. P. Serre, Kinkuho-Kodaira, Spencer, F. Hierzenbruch, A. Grothendieck etc.) au arătat rolul fundamental pe care-l joacă teoria fascicolelor în alte ramuri ale matematicii, în mod esențial în teoria funcțiilor analitice de mai multe variabile complexe și în geometria algebrică.

Dată fiind inexistența pînă în momentul prezent al unui tratat didactic și sistematic de teoria fascicolelor, cartea lui R. Godement umple o lacună foarte importantă.

Cartea este împărțită în două părți.

Prima parte, cu caracter mai mult introductiv, conține o extindere succintă a algebrei omologice. Autorul folosește cadrul cel mai general posibil, adică acel al categoriilor abeliene. Aceasta este natural, căci se pare că numai în acest mod, teoria fascicolelor, teoria coomologiei pe grupuri etc. pot fi unificate (vezi de ex. A. Heller: Omological algebra in abelian categories). Annals of Mathematicas, nov. 1958, p. 484—526, vol. 68, nr. 3).

Primul paragraf tratează atît teoria categoriilor și a functorilor, în general, cît și unii functori particulari : Hom și produsul tensorial. Se demonstrează de asemenea rezultatele

clasice relative la modulele proiective şi injective. Prefascicolele sînt şi ele introduse în acest prim paragraf, ca un functor contravariant pe categoria mulţimilor deschise a unui spaţiu topologic cu valori într-o categorie oarecare.

Un al doilea paragraf tratează teoria complexelor (module graduale diferenţiale). Se demonstrează teorema modulelor aciclice Eilenberg-Mac Lane.

Un al treilea paragraf introduce complexele simpliciale ale lui Eilenberg şi Silber. În mod special se studiază complexele singulare. În fine, utilizînd teorema modelelor aciclice, se arată echivalenţa produsului cartezian şi tensorial (Eilenberg, Silber), ceea ce permite formularea unei teorii satisfăcătoare a cup-produsului.

Al patrulea paragraf este o scurtă expunere a teoriei şirului spectral.

Ultimul paragraf tratează functorii ext şi tor.

Partea a doua este dedicată teoriei fascicolelor. Definiţia autorului diferă de cea a lui Lazard, folosită în seminarul Cartan şi este mai apropiată de definiţia lui Leray. Un fascicol în sensul lui Godement este un prefascicol $\mathcal{F}$ peste X aşa ca:

a) dacă U_i este o acoperire a lui X şi s, $s' \in \mathcal{F}$ sînt aşa ca restricţiile lor în raport cu orice U_i să coincidă: $s = s'$

b) Dacă U_i este o acoperire a lui X, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ şi restricţiile lui s_i şi s_j relativ la $U_i \cap U_j$ coincid, atunci există $s \in \mathcal{F}$ aşa ca restricţia sa relativ la orice să fie s_i.

Se studiază separat fascicolele de mulţimi şi fascicolele de module.

Un al treilea paragraf al părţii a doua este dedicat problemei foarte importante a prelungirii şi ridicării secţiunii. Autorul utilizează noţiunea de fascicol flasc a lui A. Grothendieck. Un fascicol se zice că e flasc dacă orice secţiune peste un deschis se prelungeşte la întreg spaţiul. Orice fascicol se poate scufunda într-un fascicol flasc. În plus, dacă avem un şir exact de fascicole flasce

$$O \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \dots$$

de grupuri abeliene, modulele secţiunilor formează la rîndul lor un şir exact. Pentru spaţii paracompacte, este utilă introducerea noţiunii de fascicol moale. Un fascicol este moale dacă orice secţiune peste un închis se prelungeşte la întreg spaţiul. Această noţiune înlocuieşte aceea de fascicol fin care a jucat un rol important în teoriile lui Leray şi Cartan.

Utilizînd ideile lui A. Grothendieck, autorul construieşte o teorie a coomologiei cu coeficienţi într-un fascicol pentru un spaţiu topologic oarecare, fără ipoteze de paracompactitate.

O asemenea extensiune este foarte utilă pentru aplicaţiile teoriei la geometria algebrică, unde este foarte util de construit o teorie de coomologie pentru spaţii de tipul următor: I este un inel comutativ cu element unitate, iar O este mulţimea idealelor primare ale lui I. O parte a lui O este închisă dacă şi numai dacă ea este mulţimea idealelor primare conţinînd un ideal dat. (Topologia lui Zariski). Se ajunge la o asemenea teorie de coomologie, substituind rezoluţiilor fine nişte rezoluţii flasce canonice ale unui fascicol oarecare, ceea ce e posibil, fascicolele flasce fiind obiecte injective. Şirul corespunzător de secţiuni formează ca de obicei, un complex, ale cărui grupuri de coomologie sînt, prin definiţie, grupurile de coomologie ale spaţiului respectiv, în raport cu fascicolul dat.

Teoria de coomologie, a cărei existenţă a fost astfel dovedită, are proprietăţile obişnuite.

a) $H^0(X, \mathcal{F})$ coincide cu grupul secţiunilor lui.

b) la un şir exact de fascicole

$$O \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

se ataşează un şir exact de coomologie.

c) $H^n(X, F) = 0$ dacă $n \geqslant 1$, $\mathcal{F}$ flasc.

Se demonstrează, bineînțeles, o teoremă de unicitate, care arată că alegerea unei rezoluții canonice este inutilă.

Autorul dezvoltă în acest nou cadru rezultatele clasice: „teoremele fundamentale", „dimensiunea coomologică", șirul exact atașat lui $(A, \complement A)$, A închis (v. H. Cartan, Sém. 1950—1951).

Un alt paragraf studiază legătura cu teoria lui Cech. Cele două teorii coincid pentru spații paracompacte sau cu anumite ipoteze restrictive chiar pentru un caz mai general.

Autorul obține pentru cazul general teorema lui Leray, relativă la acoperirea simplă.

Cartea se termină prin considerații foarte interesante, relative la subprodus.

Teoria multiplicativă a fascicolelor poate fi legată de teoria clasică, observînd că pentru orice fascicol există o rezoluție flască, a cărei diferențială rezultă dintr-o structură semi-simplicială. Aceasta indică faptul că operațiile coomologice pot fi aplicate în teoria fascicolelor.

E de sperat, că autorul își va ține promisiunea de a scrie și al doilea volum.

Valentin Poenaru

GR. C. MOISIL, *Scheme cu comandă directă cu contacte și relee*. Editura Academiei R.P.R., 1959 (litografiat), 201 p.

Matematicianul sau inginerul doritor să abordeze lucrările românești de teoria algebrică a mecanismelor automate se lovea de lipsa unui text în limba română, în care să se expună principiile și metodele acestei teorii. Volumul „Scheme cu comandă directă cu contacte și relee" tinde să umple acest gol.

Capitolul I este consacrat elementelor schemelor cu comandă directă: butoni de comandă și elemente executive.

În capitolul II se indică diferite moduri de a desena o schemă și se definesc riguros schemele π, dipolii π cu contacte, formula de structură a unei scheme π, schemele π cu lămpile și releele controlate direct.

În capitolele III—IV, autorul studiază funcția de lucru a unui dipol cu contacte, arătînd că în cazul unui dipol π, ea este funcția generată de formula de structură. Cu această pregătire se trece la rezolvarea primei probleme de analiză pentru dipolii π cu contacte.

Capitolul V tratează echivalența dipolilor π (funcțională și algebrică). Se arată că doi dipoli π algebric echivalenți sînt funcțional echivalenți (reciproca va fi demonstrată în cap. VIII). Aceste considerații sînt folosite la rezolvarea primei probleme de analiză (pentru schemele π cu lămpile controlate direct sau prin șunt) și la prima problemă de simplificare.

Capitolul VI este consacrat proprietăților statice ale releelor (în special ale releelor cu înfășurări multiple).

Capitolele VII—VIII arată cum se poate reduce o expresie booleană la forma normala sau canonică (disjunctivă sau conjunctivă). Urmează apoi, tratate amănunțit, cea de-a doua problemă de analiză și problema sintezei pentru schemele π cu comandă directă.

În capitolul IX autorul studiază mai amănunțit relația de incluziune, cu aplicații la problema sintezei.

Capitolul X este consacrat reprezentării geometrice a componentelor unității pe vîrfurile cubului de dimensiune n (unde $2 \leqslant n \leqslant 4$) și aplicării acestui procedeu de reprezentare la problema simplificării. Este expusă și metoda de simplificare cu ajutorul cartoanelor perforate, datorită lui A. Svoboda. Se rezolvă de asemenea problema următoare: dîndu-se

funcția de lucru a unui dipol π cu contacte, care dintre cele două forme canonice, disjunctivă și conjunctivă, este mai simplă?

Capitolul XI conține un scurt istoric și indicații bibliografice.

În afară de exemplele care ilustrează textul, volumul mai conține o bogată colecție de exerciții, însoțite de indicații și răspunsuri.

S. Rudeanu

Я. В. БЫКОВ, *О некоторых задачах теорий интегро-дифференциальных уравнений* — (Asupra unor probleme din teoria ecuațiilor integro-diferențiale). Киркизский Государственный Университет, Фрунзе, 1957.

Această lucrare sistematică și detaliată este consacrată studiului unor clase de sisteme de ecuații integro-diferențiale liniare sau neliniare în spații Banach sau spații Hilbert.

În primul capitol, autorul se ocupă de teoria generală a ecuațiilor liniare cu operatori, în spații Banach, introducînd, în acest scop, noțiunile noi și importante de punct singular și de varietate singulară și dă condițiile de rezolubilitate a problemei Cauchy într-un punct singular x_0 (teorema 1.3.1), pentru ecuația diferențială

$$\frac{du}{dx} = A(x)\, u(\,), \tag{1}$$

unde $A(x)$ este un operator liniar care acționează în spațiul Banach.

Autorul studiază comportarea soluțiilor ecuației (1) în vecinătatea unui punct singular, cît și soluțiile caracteristice intrînd pentru $x \to x_0$ în varietatea singulară $S(x_0)$. (Teoremele 1.3.2 și 1.3.3) și dă (§ 1.4) o metodă originală de construire a varietății singulare cît și o interpretare geometrică a teoremelor privind varietățile singulare ale sistemelor de ecuații integrale de forma

$$\frac{du}{dx} = H(x)\, u(x) + \int_{x_0}^{x} N(x, s)\, u(s)\, ds + \lambda \int_a^b K(x, s)\, L_k(\cdot)\, ds \tag{1.4.1}$$

unde $H(x)$, $K(x, s)$, $N(x, s)$ sînt matrici patrate de funcții, L_k fiind o matrice patrată de ordinul n, ale cărei elemente sînt operatorii liniari care transformă funcții numerice în funcții numerice.

În § 1.2, autorul stabilește o metodă de rezolvare a ecuațiilor integro-diferențiale neomogene cu ajutorul soluțiilor ecuațiilor omogene asociate și aplică această metodă la ecuațiile de forma

$$\frac{du}{dx} = H(x)\, u(x) + \int_a^x K(x, s)\, u(s)\, ds + f(x) \tag{1.2.5}$$

unde $H(x)$ este un operator liniar iar $K(x, s)$ un operator liniar și mărginit, și arată (teorema 1.2.14) că dacă $V(x, t)$ este o soluție a ecuației omogene

$$\frac{du}{dx} = H(x)\, u(x) + \int_t^x K(x, s)\, u(s)\, ds, \tag{1.2.4}$$

normale pentru $x = t$ (adică $V(t, t) = I$ = operator identic), t = parametru, atunci soluția generală a ecuației (1.2.5) este dată de

$$u(x) = V(x, a)\, u(a) + \int_a^x V(x, s)\, f(s)\, ds,$$

integralele fiind luate în sensul lui B o c h n e r.

Această metodă generală de trecere de la ecuațiile omogene la ecuațiile neomogene este utilizată des în această monografie.

Ea este aplicată mai ales la studiul comportării asimptotice a soluțiilor ecuațiilor integro-diferențiale liniare, sau neliniare pentru $x \to \infty$.

În capitolul II, după ce a definit (§ 2.2) un calcul simbolic de rezolvare a unor clase de ecuații integro-diferențiale cu coeficienți constanți, autorul expune (§ 2.4) o metodă de construire a matricei fundamentale a sistemelor de ecuații integro-diferențiale de forma

$$L(u) = \frac{du}{dx} - Au - \int_a^x K(x - s)\, u(s)\, ds = 0 \tag{2.4.1}$$

unde A este o matrice patrată de ordinul n, cu termeni constanți și

$$K(v) = \sum_{k=1}^{n} Q_k(v)\, e^{-B_k v}$$

unde $Q_k(v)$ sînt polinoame de gradul m_k în v, ai căror coeficienți sînt matrici pătrate de ordinul n.

Autorul utilizează în acest scop rădăcinile polinomului caracteristic al ecuației (2.4.1.) și arată că matricea fundamentală $V(x)$ poate fi construită astfel încît dacă ρ_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sînt rădăcinile polinomului caracteristic, atunci $e^{\rho_k v}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ este conținut numai în aceeași coloană a lui $V(x)$. Se deduce de aici existența (§ 2.5) a unui sistem de soluții a ecuației omogene (2.4.1) liniar independente, de forma

$$u_i^{(j)}(x) = B_{ij}\, e^{\rho_i x} + C_{ij}\,(e^{\rho_{n+i} x}, \ldots, e^{\rho_N x}),$$

unde B_{ij} sînt constante, iar j = numărul soluțiilor. În aceste condiții, soluția generală a ecuației (2.4.1) este dată de

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_i^{(j)}(x),$$

C_j fiind constante.

Construirea unei matrici fundamentale $V(x)$, satisfăcînd condițiile menționate mai sus, are o foarte mare importanță pentru studiul comportării soluțiilor ecuației (2.4.1) în spațiul fazelor $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

În capitolul III, autorul se ocupă mai ales de studiul condițiilor suficiente (§ 3.1) de existență a soluțiilor periodice, aproape periodice, sau mărginite pentru ecuațiile de forma

$$\frac{du}{dx} = H(x)\, u(x) + \int_a^x N(x, s)\, u(s)\, ds + \int_g K(x, s)\, L_k u(\cdot)\, ds, \tag{3.1.2}$$

unde $H(x)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $L_k[\cdot]$, sînt operatori acționînd într-un spațiu B a n a c h liniari cînd x și t iau valori fixe.

Cu ajutorul valorilor proprii ale operatorului de translație X (§ 3.4. definiția de la p. 108), Autorul caracterizează structura soluțiilor ecuației

$$\frac{du}{dx} = A(x)\, u(\cdot) \tag{3.4.1}$$

unde $A(x)$ este un operator liniar pentru orice valoare fixă a lui x, acționînd într-un spațiu Banach.

Se deduc de aici operațiile necesare și suficiente de existență a soluțiilor periodice pentru ecuația (3.4.1) cît și numărul de soluții periodice liniar independente.

Studiul foarte important (capitolul IV) al comportării asimptotice pentru $x \to \infty$ a soluțiilor unor clase de ecuații integro-diferențiale în spații Banach sau în spații Hilbert, este făcut cu ajutorul noțiunii de număr caracteristic a unei ecuații integro-diferențiale liniare. Cu ajutorul unor condiții de majorare a normei $\| V(x, t) \|$, $V(x, t)$ fiind matricea fundamentală (adică soluția normală pentru $x = t$) a ecuației

$$\frac{du}{dx} = H(x)\, u(x) + \int_t^x H(x, s)\, u(s)\, ds,$$

autorul studiază comportarea asimptotică a soluțiilor ecuației

$$\frac{du}{dx} = [H(x) + B(x)]\, u(x) + \int_a^x [K(x, s) + M(x, s)]\, u(s) ds. \tag{4.2.2}$$

În capitolul V autorul studiază unele clase de ecuații integro-diferențiale în domeniu complex, mai ales ecuațiile de forma

$$(z - a)\frac{du}{dz} = H(z)\, u(z) + \int_a^z N(z, t)\, u(t)\, dt, \tag{5.5.9}$$

unde $H(z)$ și $N(z, t)$ sînt operatori funcției olomorfe în domeniile $| z - a | \leqslant R$, $| t - a | \leqslant R$.

Introducînd (§ 5.6) noțiunea de „operatori de rotație X" pentru ecuația

$$\frac{du}{dz} = H(z)\, u(\cdot), \tag{5.6.1}$$

și folosind valorile proprii ale operatorului X, autorul studiază caracterul expresiei analitice a soluțiilor în vecinătatea unui punct singular al acestei ecuații.

Autorul studiază de asemenea caracterul expresiei analitice a soluțiilor ecuației

$$\frac{du}{dz} = H(z)\, u(z) + \int_a^z K(z, t)\, u(t)\, dt + f(z),$$

în vecinătatea unui punct singular $z = a$ al termenului liber $f(z)$, cînd $f(z)$ este olomorfă sau de forma $f(z) = \varphi(z) + \psi(z) \ln (z - a)$, cu $\varphi(z)$, $\psi(z)$ funcții meromorfe și aceasta în ipoteza în care $H(z)$ și $K(z, t)$ sînt operatori olomorfi.

Un studiu analog este făcut pentru sistemele de ecuații integro-diferențiale de forma

$$\frac{du}{dz} = H(z)\, u(z) + \int_{z_0}^z N(z, t)\, u(t)\, dt + \lambda \int_a^b K(z, t)\, L_t u(\cdot)\, dt + f(z)$$

unde $f(z)$ este o matrice cu o coloană, ai cărei termeni sînt funcții analitice uniforme.

În capitolul VI, autorul tratează unele proprietăți ale produselor de operatori liniari acționînd într-un spațiu vectorial (§ 6.1) și aplică aceste rezultate la studiul ecuațiilor integro-diferențiale cu limită fixă de integrare de forma

$$z(P) = \lambda \int_B K(P, Q)\, L_Q(D)\, z(Q)\, dQ + f(P) \tag{6.2.1}$$

cu $z(P)$, $f(P)$ matrice cu o coloană; $K(P, Q)$ matrice patrată de ordinul n; $L(D)$ matrice patrată de ordinul n, ale cărei elemente sînt operatori diferențiali liniari în raport cu coordonatele punctului $Q \in B$; B domeniu fix de integrare. Autorul arată că rezolvarea ecuației (6.2.1) se reduce la aceea a unui sistem de ecuații integrale de tip Fredholm.

În § 6.4, autorul arată cum rezultatele paragrafelor precedente, permit simplificarea studiului unor probleme la limită, astfel ca:

$$(A)\quad \begin{cases} L_n(z) = \lambda\,[p(x)\, z(x) + \displaystyle\int_a^b f(x, t)\, z(t)\, dt + F(a) \\ R_j(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{ij}\, z^{(i)}(a) + \beta_{ij}\, z^{(i)}(b)] = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

unde $f(x, t)$ este o funcție simetrică astfel încît

$$p(x)\, h(x) + \int_a^b f(x, t)\, h(t)\, dt = 0$$

și α_{ij}, β_{ij} constante arbitrare; sau

$$(B)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda\,[r(P)\, u(P) + \int_B f(P, Q)\, u(Q)\, dQ + F(P)$$
$$U|_S = 0,$$

S fiind conturul domeniului B.

În capitolul VII (după părerea noastră, unul din cele mai importante al acestei monografii) consacrat studiului ecuațiilor integro-diferențiale cu domeniu fix de integrare, autorul expune (§ 7.1), proprietățile matricelor nuclee, în particular (§ 7.2), a matricelor nuclee pozitive, ale cărui rezultate sînt aplicate în § 7.3, la dezvoltarea soluțiilor problemei Cauchy pentru unele sisteme de ecuații integro-diferențiale în raport cu sistemele biortogonale ale funcțiilor corespunzătoare matricilor nuclee ale acestor ecuații.

Autorul abordează după aceasta, în § 7.4, studiul foarte interesant al condițiilor (suficiente) de existență a vectorilor proprii pentru anumiți operatori neliniari acționînd într-un spațiu Hilbert.

Există o foarte bogată literatură privind această problemă.

Cu ajutorul rezultatelor din § 7.2, autorul arată că se pot construi demonstrații ale teoremelor de existență pentru vectorii proprii pentru unele sisteme de ecuații integro-diferențiale, mult mai simple decît demonstrațiile date pînă acum.

În § 4.3, care după părerea noastră, și-ar fi avut mai bine locul la sfîrșitul ultimului capitol, autorul studiază stabilitatea asimptotică a soluției banale a ecuației

$$\frac{du}{dx} = H(x)\, u(x) + \int_a^x K(x, s)\, u(s)\, ds + f(x, u(x)) + \int_a^x F(x, t, u(x), u(t))\, dt \tag{4.3.3}$$

(unde: $H(x)$ = operator liniar;

$K(x, s)$ = operator liniar mărginit;

f, F = operatori neliniari, acționînd într-un spațiu B a n a c h B), folosind principiul trecerii de la ecuațiile integro-diferențiale liniare și omogene la operații neomogene (cf. § 1.2).

Autorul studiază prin aceeași metodă stabilitatea, nestabilitatea și stabilitatea asimptotică a soluției banale pentru alte ecuații integro-diferențiale.

Am menționat în acest raport, sub o formă cît mai succintă posibil, rezultatele originale cele mai interesante pe care autorul le-a expus în această monografie.

În ansamblul ei, această lucrare este foarte bogată în probleme importante, referitoare la teoria sistemelor de ecuații integro-diferențiale liniare sau neliniare pentru care se caută soluții în spații B a n a c h sau H i l b e r t.

Metodele generale de rezolvare obținute de autor sînt ilustrate prin exemple concrete de ecuații sau de sisteme de ecuații integro-diferențiale ale căror soluții sînt date, sub formă explicită, calculele fiind împinse atît de departe cît este necesar.

Prin numeroase rezultate noi privind diverse probleme studiate de autor, această lucrare constituie o reală și importantă contribuție originală la teoria ecuațiilor integro-diferențiale. Ea va fi de o mare utilitate tuturor celor pe care îi interesează această teorie, fie din punct de vedere teoretic, fie din punct de vedere al diverselor sale aplicații în științele fizice și tehnice.

Sergiu Vasilache

* * * *Prelegeri de fizică teoretică*. Vol. I. Interscience Publishers, New York, London, 1959.

Volumul de față este publicat sub îngrijirea profesorilor W e s l e y E. B r i t t o n și L i t a G. D u n h a m de la departamentul de fizică al Universității din Colorado, Boulder. El cuprinde materia prelegerilor ținute de diferiți fizicieni la Institutul de vară al acestei Universități, în vara 1958. În general aceste prelegeri au ca obiectiv prezentarea sistematică a stării actuale a unor probleme precum și discutarea perspectivelor care li se deschide, mai cu seamă din punct de vedere experimental.

F. R o h r l i c h., *Producția de perechi și radiația de amortizare* (*Bremsstrahlung*) *în cîmpul unui atom*.

Autorul expune starea actuală a acestei foarte importante probleme de electrodinamică cuantică. El folosește mai cu seamă limbajul experimental, presupunînd că auditorul (e vorba de o expunere orală) nu este prea familiar cu teoriile cuantice ale cîmpului.

Situația actuală a acestei teorii.

Aproximările succesive, calcularea producției de perechi și a radiației de amortizare la atomi pot fi rezumate precum urmează:

a) Aproximația lui B o r n pentru atomul pur; este proporțională cu Z^2 și ne dă cea mai mare parte a secțiunilor eficace (formulele B e t h e-H e i t l e r).

b) Corecțiile C o u l o m b la (*a*); sînt cunoscute pentru energiile înalte.

c) Corecțiile de radiație la (*a*); sînt mici, de ordinul α.

d) Corecțiile de ecran la (*a*); sînt importante la energii înalte. Suma acestor corecții ne dă secțiunea eficace coherentă.

e) Secțiunea eficace în aproximația lui B o r n cu neglijarea schimburilor sînt proporționale cu Z (W h e e l e r-L a m b).

f) Corecții la funcția de împrăștiere incoherentă.

g) Corecțiile de schimb și de recul la (*e*).

h) Corecțiile energiei de legătură la (*e*).

Suma tuturor acestor corecții de la (*a*) la (*f*) ne dă secțiunea eficace teoretică completă. Aceste enumerări ne arată în mod clar lipsurile care mai există în cunoștințele teoretice actuale. Numai (*a*) și (*e*) sînt complet cunoscute. Însă în afară de cazul cînd energiile sînt înalte, aproximația lui B o r n este slabă; (*b*) nu este cunoscută cînd este în regiunea energiilor razelor beta, și (*c*) este cu totul necunoscut.

(*d*) Este cunoscut numai în ce privește funcțiunile de undă după T h o m a s - F e r m i. Măsurări exacte ale elementelor de lumină la energii înalte cer funcții de undă mai bune. Aceeași observație este valabilă pentru (*f*) deoarece funcțiile de împrăștiere incoherentă care sînt folosite de obicei sînt bazate pe modele T h o m a s - F e r m i. Secțiunile incoherente, însă, sînt acolo cele mai mari în ce privește elementele luminei, unde acest model este insuficient; (*g*) este cunoscut numai ca un fel de supraestimație. În fine corecția energiei care leagă (*h*) de (*a*) este total necunoscută. Ar putea să fie o corecție importantă în special pentru regiunea energiei mai joase. O altă formă a insuficienței teoriei noastre este detaliul sub care aceste secțiuni sînt cunoscute. Secțiunile totale sînt mai bine cunoscute, decît cele diferențiale. De exemplu nu se știe nimic despre distribuțiile unghiulare ale secțiunilor incoherente. Chiar distribuția de recul este cunoscută numai în ce privește electronii liberi și $q \ll m$. Alte detalii privesc polarizarea fotonului și orientarea de spin a electronilor. Acestea sînt cunoscute numai în aproximația (*a*). De exemplu nu știm cum corecțiile lui C o u l o m b le afectează.

Este foarte greu să distingem în mod experimental evenimentele coherente de cele incoherente. Toate excitațiile sînt incoherente, însă nu pot fi distinse în mod experimental de evenimentele coherente. Același lucru este valabil pentru ionizările cu recul de electron care sînt prea mici pentru a fi văzuți. Această situație complică comparația cu teoriile existente în momentul de față.

R. H. GOOD JR., *Teoria particulelor cu masa de repaus nulă.*

În ultimul timp s-a ajuns la o teorie care se aplică unor particule fără interacțiune cu masă de repaus nulă, și dă pentru ei o ecuație de undă, proprietăți de transformație și formule pentru energia, impuls și impuls unghiular într-un mod oarecum paralel cu teoria lui Dirac asupra electronului. Iată unele detalii asupra acestui nou punct de vedere.

Putem trata în mod uniform spinii pozitivi fie ei întregi fie semi-întregi. Specializarea pentru spinul $\frac{1}{2}$ corespunde cu teoria enutrino cu două componente și specializarea pentru spinul 1 este teoria lui M a x w e l l pentru photon. Precum se știe particule libere cu spin discret și masă de repaus nulă există numai în două stări, spin paralel sau antiparalel cu impulsul; se discută aici o rotație de spin arbitrar. Pentru photon aceste două stări corespund unei polarizări circulare, de la dreapta la stînga, avînd direcția de propagare pentru spinul paralel sau antiparalel cu impulsul. Ecuațiile de undă sînt

$$H\Phi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi$$

unde

$$H = (c/s)\,\bar{p}\cdot\bar{s}$$

$$\bar{p} = -i\hbar\Delta$$

$\bar{s}$ sînt matricele impulsului unghiular pentru spinul s și Φ este o componentă $2s+1$ a funcției de undă scrisă ca o matrice de coloană. Aceste ecuații au mai mult decît cele două soluții și nu sînt numai covariante prin transformațiile Lorentz (cu excepția spinului $\frac{1}{2}$) Vor trebui să fie suplementate prin condiția auxiliară că se vor reține numai soluțiile cu spini paraleli sau antiparaleli cu impulsul și că ecuația de undă plus această condiție auxiliară constituie o afirmație covariantă.

Ecuația de undă împreună cu condiția auxiliară sînt echivalente cu sistemul Dirac-Pauli-Fiertz relativ la particule cu masă de repaus nulă. Acest sistem de ecuații se aplică la orice mărime spinorială avînd dispersia $w^2 = c^2p^2$, astfel că este, poate, cel mai general sistem ce poate fi luat în considerare. Punctul de vedere studiat aici înlocuiește componentele supraabundente ale spinului prin o matrice de coloană formată de elemente independente, iar operațiile spinoriale prin produse de matrice ordinare, astfel că se va putea face o discuție mai amplă a ecuațiilor.

Se face o distincție între componentele de spin al cîmpului ψ care se transformă linear în raport cu transformările Lorentz și între componentele funcției de undă Φ care sînt folosite pentru a construi energia, impulsul și impulsul unghiular al cîmpului cu valori medii ale operatorilor de deplasare. Relația între ele este

$$\psi = \left|\frac{1}{c}H\right|^{s-\frac{1}{2}}\Phi$$

astfel că este evident că Φ nu se va transforma linear și că nici nu este un spinor. Aceasta este poate cauza pentru care acest gen de teorie nu a fost studiat mai înainte. Totuși Φ este definit în orice cadru Lorentz prin această relație cu ψ astfel că transformările lui reprezintă grupul lui Lorentz. Ambele stări au o valoare proprie $\pm cp$ a lui H.

Pentru un spin întreg particulele sînt Bosoni astfel că nu se poate interpreta H ca o energie și nu se poate aplica o teorie de vid ca a lui Dirac pentru electron. Totuși putem considera că

$$|H|,\quad (H/|H|)\,\bar{p},\quad (H/|H|)\,(\bar{\chi}\times\bar{p}+\hbar\bar{s})$$

sînt energia, impulsul și operatorii de impuls unghiular. Aceasta evită toate dificultățile și este echivalentă cu teoria corespunzătoare unui spin $\frac{1}{2}$. Faptul că ecuațiile Maxwell pot fi scrise ca o formă particulară de ecuații de undă face posibilă studierea lor folosind metode de mecanică cuantică standard. În special problema de a găsi modele pentru o radiație multipolă dintr-o sursă punctuală, poate fi elaborată foarte ușor paralel cu problemele Schröder sau Dirac corespunzătoare folosindu-se de faptul că operatorii impulsului unghiular comută cu Hamiltonianul. Rezultatul interesant este că modelele bine cunoscute ale radiației multipolare sînt funcții proprii ale impulsului unghiular și sînt operatori de reflecție a spațiului pentru cîmpul electromagnetic.

Procesul de cuantizare pentru această teorie poate fi efectuat într-un fel direct și fără înconjur și ne conduce la o legătură simplă și directă între spin și statistica particulelor.

BERTHOLD STECH, *Particule singulare şi interacţiunile lor*

Scopul acestor lecţii este de a prezenta unele fapte tipice şi unele idei despre cîmpul particulelor elementare — în special a unor particule singulare şi interacţiunile lor tari şi slabe. Această examinare a problemelor este, după expresia autorului numai schiţată. Intenţia este de a arăta într-un mod simplificat unele din metodele teoretice ale lucrărilor folosite în acest domeniu interesant.

Prima parte este dedicată unei discuţii a interacţiunii tari care intervine în procesele de producere şi împrăştiere al particulelor singulare. Găsim aici o asemănare izbitoare cu interacţiile pion-nucleon. În special se poate constata că ideea de conservare a unui spin isotopic poate fi generalizată şi ne conduce la conservarea singularităţii. Autorul trimite pentru mai ample informaţii la lucrarea lui R. H. Dalitz în „Rapoarte asupra Progresului în Fizică" Vol. XX (1957).

De la apariţia acestui articol situaţia experimentală cît şi cea teoretică în special în ce priveşte descompunerea beta s-a îmbunătăţit şi mai mult, şi în consecinţă unele din aceste dezvoltări noi au fost incluse în aceste prelegeri.

RYOGO KUBO, *Unele aspecte ale teoriei de mecanică statistică a proceselor ireversibile*

Se spune cîteodată că Termodinamica nu este de fapt dinamică ci mai mult termostatică fiindcă poate da descrieri cantitative numai pentru stări de echilibru sau pentru procese cuasi-statice. În ultimii zece ani s-au făcut progrese în extinderea tratării termodinamice spre un domeniu mai vast a proceselor fizice decît acela al proceselor quasi-statice. Rezumate excelente au fost date pentru rezultatele obţinute de către Groot, Prigogine şi alţii. Teoria fenomenologică corespunzătoare este cîteodată numită teoria quasi-termodinamică.

Autorul nu intră în detaliile termodinamice. Subiectul său priveşte mai mult partea microscopică a teoriei termodinamice, acea parte pe care o vom chema teoria mecanică-statistică a proceselor ireversibile. Ea poate să fie comparată cu Mecanica statistică ordinară ca bază microscopică a Termodinamicei. Autorul descrie mai întîi în trăsături generale Quasi-Termodinamica pentru a da un fond pentru problemele care vor fi discutate mai detaliat în partea a doua care se ocupă de sisteme de disipaţie lineară, considerate în legătură cu procesele de fluactuaţie care au loc în sistemele în echilibru.

G. WATAGHIN, *Producţia multiplă de mesoni şi o teorie nelocală a cîmpurilor*

Ideea unei teorii a unui cîmp nelocal sau a teoriei interacţiunii limitate de către un operator universal relativistic de extirpare (cut-off) a rezultat din studiul dificultăţilor fundamentale întîlnite în teoria interacţiunilor între particule punctuale.

Azi, experimente directe ne arată că „particule fizice" ca protoni şi neutroni au structuri complexe, şi că descrierea statistică cuantică a lor foloseşte conceptul unei interacţiuni nelocalizate sau a unor distribuţii nelocalizate a sarcinilor şi a impulsului magnetic.

A. Marcov şi H. Yukawa sugerează că operatorii care reprezintă în cîmp amplitudini ar putea să fie nelocali adică într-o reprezentare în care x este diagonal, deci aceşti operatori ar putea fi reprezentaţi numai prin matrici nediagonale $< x' \mid \psi \mid x'' >$ nereductibile la forma $f(x')\,\delta^4(x' - x'')$. Astfel de cîmpuri pot comuta întreolaltă. Caracterul nelocal al cîmpurilor se desprinde şi din metoda extirpării relativistive, discutată în expunere. Din experimente cu ciocniri la energii înalte se poate învăţa foarte mult despre interacţiunile nelocale.

Autorul vorbeşte îndeosebi asupra ciocnirilor de particule al căror centru de impulsuri are $E \geqslant 10^9$ e.v. Observaţiile făcute asupra razelor cosmice ne arată că posibilitatea de a cerceta domenii mici de spaţiu-timp cu ajutorul acestor particule este limitată într-un mod foarte specific. Ne putem aştepta la existenţa unei incertitudini sporite la măsurări a distanţelor şi a intervalelor de timp, înăuntrul unor domenii mici. Sub anumite condiţii extinderea liniară a acestor domenii este comparabilă cu lungimea de undă Compton a unui nucleon $l = \frac{\hbar}{Mc} \sim 2 \cdot 10^{-14}$ cm. Este important ca să notăm că existenţa unor astfel de domenii de incertitudine cu patru dimensiuni nu limitează valabilitatea transformărilor Lorentz în spaţiul impulsurilor (p — spaţiu).

În cele ce urmează se presupune valabilitatea strictă a transformărilor omogene Lorentz în variabilele de impuls şi conservarea impulsului-energie precum şi valabilitatea

1) legii de conservare a sarcinii electrice;
2) conservării numărului baryon;
3) conservării impulsului unghiular total.

Studiul începe cu unele probleme cu privire la „jeturi" de raze cosmice şi discută pe scurt despre modelele prezentate de Heisenberg, Fermi şi Landau pentru a putea înţelege mai bine aceste fenomene remarcabile. În încheiere se pune în relief teoria ciocnirilor de înaltă energie care a fost sugerată mai de mult de către autor, derivînd-o din teoria unui cîmp nelocal. Se fac comparaţii cu unele date experimentale.

R. E. Peierls, *Diverse probleme ale teoriei nucleare*

În prima parte se examinează problema mai multor corpuri. Din punctul de vedere istoric, primele încercări de a descrie nuclee au fost bazate pe modelul de bombă (shell) din cauză că această descripţie a fost foarte utilă în cazul atomului. Totuşi valabilitatea acestui model este îndoielnică avînd în vedere puterea şi bătaia scurtă a forţelor nucleare comparate cu forţele mai slabe dar cu lungă bătaie din atom. Aceste îndoieli au fost întărite prin descoperirea rezonanţelor la neutroni-înceţi care arătau clar importanţa sistemelor mai multor corpuri, neglijate în cercetarea bazată pe modelul de obuz, precum şi prin succesul modelului compus a lui Niels Bohr, care în forma lui extremă idealizează nucleul tratîndu-l ca un sistem de particule cu o interacţiune şi corelaţie importantă, precum sînt moleculele într-o picătură lichidă.

A fost o perioadă cînd cei mai mulţi fizicieni erau convinşi că orice model de bombă poate să fie demonstrat ca fiind nevalabil, numai prin argumente pur teoretice. (Autorul examinează aceste argumente mai la urmă). Cu toate aceste obiecţiuni încercările de a lega proprietăţile nucleare cu o structură de bombă au continuat. În special Maria Mayer a izbutit să arate existenţa unor regularităţi care indică în mod clar existenţa unor bombe închise (numere „magice" de neutroni şi protoni). Mai apoi ea însăşi şi independent de ea, Jensen şi colaboratorii săi au arătat că cuplajul unei orbite de spin, acţionînd asupra fiecărei particule, ar putea să fie ţinută drept cauză a valorilor numerilor „magice", a valorilor de spin a nucleilor şi a unui număr de alte caracteristice.

Concordanţa aceasta a fost aşa de impresionantă, că nu a rămas nici o îndoială cu privire la faptul că modelul bombei conţinea în bună parte ceva adevărat. Rămîne deci să conciliem acest rezultat cu obiecţiile teoretice şi pe urmă să hotărîm primii paşi în vederea executării calculului modelului de bombă.

Aceasta cere determinarea sursei (inclusiv partea privitoare la orbita spinului) care va defini stările bombei și de asemenea forțele reziduale de cuplaj care produc corecțiilor la aproximațiile simple ale ipotezei de bombă.

De aceste probleme se ocupă prima parte a conferințelor autorului.

În a doua parte se cercetează relația dintre modelul de nucleu rezultat din considerarea unei particule care se mișcă într-un izvor de potențial mediu, așa-numitul potențial optic și problema a n corpuri.

În ultima parte se cercetează numeroasele teorii relative la mișcarea colectivă a particulelor nucleare, începînd cu acele inițiate de A. Bohr și Miîtelson. Ele n-au dat încă rezultate satisfăcătoare dar au răscolit problemele și se poate spera într-o metodă care să convină la orice fel de mișcare.

R. J. GLAUBER *Teoria ciocnirilor cu energie înaltă*

Tot ce s-a făcut pînă în prezent în legătură cu ciocnirile de înaltă energie a constat mai mult sau mai puțin în studii empirice din felul așa-numitului „model-optic". Acest model care a fost introdus și folosit des din cauze intuitive, reprezintă o încercare de a trata numai problema împrăștierii elastice. Modelul optic înlătură din considerațiile sale acele particule care comportă împrăștieri neelastice pretinzînd că ele ar fi fost absorbite în nucleu. Orice discuție mai amplă matematică a modelului optic, trebuie însă să fie bazată pe o tratare uniformă a deformărilor elastice și neelastice.

Unul dintre aspectele principale al încercării de față constă tocmai în faptul că este unitară și permite, prin aceasta, o privire foarte simplă spre însești bazele modelului optic. Acest model se înfățișează ca un fel mai natural de a descrie rezultatele speciale obținute pentru o împrăștiere elastică și aceasta face posibil de a da o construcție explicită a potențialului optic pentru un nucleu avînd o formă finită. Se folosește pentru a ilustra felul în care potențialul optic depinde de fluctuațiile și corelațiile în poziția nucleilor individuali. Lucrările autorului asupra împrăștierii elastice au fost efectuate în anul 1952 în legătură cu o problemă de interes special în teoria difracției electronului. Ea a dus de fapt la extensiunea și generalizarea unei metode descrisă de Molière în 1947.

Autorul prezintă în lecțiile sale prima încercare sistematică de a sistematiza această vastă materie. El începe cu o discuție generală a problemei simple de împrăștiere elastică printr-un potențial static. Trece în revistă unele din metodele mai cunoscute de a trata această problemă, și dă o atenție specială unor teoreme foarte folositoare cu privire la amplitudinea împrăștierii. Pe urmă prezintă desfășurarea aproximațiilor energiei înalte și ilustrează aplicația ei la o serie de probleme avînd o complexitate crescîndă. Tratează la urmă ciocnirile care privesc sistemele de mai multe corpuri.

O. Onicescu

G. MARINESCU, *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice*. Editura Academiei R.P.R., București, 1959, 217 p.

Aceasta este prima carte în limba romînă despre spațiile vectoriale topologice, și a treia din domeniul analizei funcționale, urmînd după cartea „Spații vectoriale normate" a aceluiași autor și „Spații Hilbert" de C. T. Ionescu Tulcea. Autorul presupune că cititorul este familiarizat cu noțiunile și rezultatele expuse în cartea „Spații vectoriale normate".

Cartea începe cu un capitol introductiv, în care se reamintesc unele noțiuni de teoria mulțimilor și a structurilor algebrice și topologice.

După aceasta, în capitolul I se introduc noțiunile de bază din teoria spațiilor vectoriale și a spațiilor vectoriale topologice, și se dau unele teoreme fundamentale : teoreme de separare a mulțimilor convexe, condițiile de normabilitate ale lui Kolmogorov, condițiile metrizabilității spațiilor vectoriale topologice și, în particular, a celor local convexe etc. Ultimul paragraf, intitulat „Reuniuni pseudotopologice și spații polinormate", conține noțiuni introduse de autor, care constituie principala contribuție a acestuia. Dacă E este un spațiu vectorial și $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ o familie de subspații vectoriale ale lui E, organizate ca spații vectoriale topologice, autorul spune că E este *reuniunea pseudotopologică* a spațiilor E_α, în cazul cînd sînt îndeplinite următoarele condiții :

(1) $$E = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha ;$$

(2) pentru orice pereche de indici $\alpha \in A$, $\alpha' \in A$, există un indice $\alpha'' \in A$ astfel, încît $E_{\alpha''} \supset E_\alpha \cup E_{\alpha'}$ și încît topologiile spațiilor E_α și $E_{\alpha'}$ să fie mai fine decît cele induse de $E_{\alpha''}$.

În E se pot introduce atunci noțiunile corespunzătoare din topologie (completitudine, compacitate, șir dirijat convergent, etc.), recurgîndu-se direct la spațiile E_α.

Dacă spațiile E_α din definiția de mai sus sînt normate, atunci autorul spune că E este un *spațiu polinormat*. Cauza acestei denumiri constă în aceea că un spațiu vectorial E este polinormat dacă și numai dacă pe E se poate da o familie A de norme generalizate (adică norme care pot lua și valoarea $+\infty$) $\| x \|_\alpha$, cu proprietățile următoare :

(3) Pentru orice $x \in E$ există $\alpha \in A$ astfel încît

$$\| x \|_\alpha \neq \infty,$$

(4) pentru orice $\alpha \in A$ și $\alpha' \in A$ există $\alpha'' \in A$ astfel încît

$$\| x \|_{\alpha''} \leqslant \| x \|_\alpha , \ \| x \|_{\alpha''} \leqslant \| x \|_{\alpha'} ,$$

oricare ar fi $x \in E$.

Importanța acestor noțiuni este arătată în capitolul II. Ea constă în aceea că dacă E și F sînt două spații local-convexe, cu topologiile definite de familiile de seminorme A respectiv B, atunci mulțimea $\mathfrak{L}(E, F)$ a operațiilor liniare continue definite pe E și cu valori în F se poate organiza în mod natural ca o reuniune pseudotopologică. Anume, punînd, pentru orice $\beta \in B$ și orice aplicație φ a mulțimii B în A,

(5) $$\mathfrak{L}_\varphi (E, F) = \{ T \in \mathfrak{L}(E, F) \mid \mid T \mid_{\beta, \varphi(\beta)} \neq \infty \},$$

unde $\mid T \mid_{\beta, \varphi(\beta)} = \sup_{|x|_{\varphi(\beta)} \leqslant 1} \mid Tx \mid_\beta$, aceste $\mathfrak{L}_\varphi (E, F)$ vor fi spații local convexe și spațiul $\mathfrak{L}(E, F)$ va fi reuniunea pseudotopologică a tuturor $\mathfrak{L}_\varphi (E, F)$. Dacă, în particular F este normat, atunci $\mathfrak{L}(E, F)$ va fi chiar polinormat.

În același capitol se mai dau rezultatele clasice despre topologiile de convergență uniformă în spațiile de operații liniare, sisteme duale, dualitatea spațiilor local convexe și reflexivitate, precum și o generalizare a teoremei Banach-Steinhaus. De asemenea, se definesc operațiile complet continue în spațiile local convexe și polinormate. În sfîrșit, se dau, pentru spațiile metrizabile complete, principiul aplicațiilor interioare, teorema de invertibilitate și teorema graficului închis.

În capitolul III se introduc, extinzînd procedeul dat de R. Schatten pentru spațiile normate, noțiunile de produs tensorial proiectiv și produs tensorial inductiv a două spații local convexe, și se dau unele proprietăți elementare ale acestora. Se definesc operațiile integrale și nucleare între spații Banach, și spațiile nucleare în sensul lui Grothendieck.

Capitolul IV conține două paragrafe. În primul se expun elementele calculului diferențial și integral pentru funcții de variabilă scalară (reală sau complexă), cu valori în spații local convexe. Paragraful al doilea este consacrat diferențialelor G â t e a u x și F r é c h e t, primele pentru operații între spații vectoriale topologice, iar cele din urmă pentru operații între spații local convexe.

În capitolul V se definesc măsurile vectoriale ca funcții de mulțime numărabil aditive definite pe clanul părților boreliene relativ compacte ale unui spațiu local compact, cu valori într-un spațiu de operații liniare între două spații local convexe. Se definește integrala unei funcții vectoriale în raport cu o măsură vectorială.

În capitolul VI se dau cîteva proprietăți ale algebrelor topologice cu invers continuu și ale unei categorii de algebre local convexe, introduse de autor (algebrele „de tip φ") al căror studiu se reduce la acela al algebrelor normate.

Capitolul VII tratează unele elemente de geometrie diferențială : varietăți diferențiale (pentru care rolul spațiului tangent îl joacă un spațiu local convex), calcul tensorial și spații cu conexiune afină.

Capitolul VIII expune teoria gradului topologic în spațiile local convexe, după M. N a g u m o. Din această teorie rezultă cu ușurință teorema de punct fix a lui T i h o n o v. În sfîrșit, se dă o extensiune a principiului contracțiilor la spațiile local convexe.

În ultimul capitol (IX), după unele propoziții asupra limitelor proiective și inductive, se descriu principalele spații introduse de L. Schwartz, unele spații definite de G h e l f a n d și Ș i l o v precum și unele spații de funcții indefinit derivabile cu valori în spații local convexe. Se descriu spațiile de distribuții și se dă teorema nucleelor. În sfîrșit, ultimul paragraf expune unele rezultate recente ale lui C. F o i a ș asupra descompunerii spectrale a operatorilor liniari continui simetrici definiți în spații nucleare.

La sfîrșitul fiecărui capitol al cărții se află o secțiune intitulată „Referințe și comentarii". La sfîrșitul cărții se află o bibliografie conținînd 281 titluri. Autorul a căutat să scoată în evidență contribuțiile matematicienilor romîni, dar totuși cartea are unele omisiuni în această privință.

Expunerea este concisă. Numeroase teoreme sînt date fără demonstrație. În capitolele I—VIII nu se dau exemplificări concrete.

Cum se vede și din cele de mai sus, cartea conține un material bogat și variat. Unele dintre subiectele tratate, ca de exemplu cele din capitolele VII și VIII își găsesc loc pentru prima oară într-o carte de teoria spațiilor vectoriale topologice.

Datorită calităților ei, cartea este utilă, atît studenților, cît și, mai ales, matematicienilor care posedă nivelul și cunoștințele necesare presupuse de expunere.

I. Singer

39

F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

2

ANUL XI

1960

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

2

ANUL XI

1960

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN S. STOILOW — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — *redactor responsabil adjunct*; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R. P. R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R. P. R.; T. GANEA și A. HALANAY.

Revista STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE
apare de două ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul XI, nr. 2 1960

SUMAR

Pag.

MIRON NICOLESCU, Asupra şirurilor convergente de funcţii poliarmonice . . 287

CAIUS IACOB, Asupra soluţiilor cu singularităţi date ale unor probleme la limită 293

LILLI JEANNE NICOLESCU, Asupra integrabilităţii diferenţialelor Fréchet şi aplicaţii 305

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. I. Studiul unei clase de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi 337

VIOREL DUMITRAŞ, Determinarea spaţiilor A_3 cu grup G_5 cu varietăţi de intranzitivitate unidimensionale 375

N. PRAPORGESCU, O generalizare a ecuaţiei Fredholm şi o nouă metodă pentru studiul acesteia 409

A. HALANAY, Stabilitatea integrală la sistemele de ecuaţii diferenţiale cu argument întîrziat 429

E. BALAŞ şi L. P. HAMMER, În legătură cu problema transporturilor. I. Problema transporturilor cu centre legate 439

SERGIU RUDEANU, Asupra definirii algebrelor booleene prin operaţii binare . 451

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Contribuţii la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip parabolic. II. Ecuaţii iterate 469

ANDREI DOBRESCU, Asupra grupurilor de mişcări ale ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea, în două variabile 505

RECENZII 521

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome XI, n° 2 1960

SOMMAIRE

Page

MIRON NICOLESCU, Sur les suites convergentes de fonctions polyharmoniques 287

CAIUS IACOB, Sur les solutions à singularités données de certains problèmes aux limites 293

LILLY JEANNE NICOLESCU, Sur l'intégrabilité des différentielles au sens de Fréchet et ses applications 305

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Contribuţion à l'étude des équations aux dérivées partielles du type parabolique. I. Etude d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre 337

VIOREL DUMITRAŞ, Détermination des espaces A_3 à groupe G_5, avec des variétés d'intransitivité unidimensionnelles 375

N. PRAPORGESCU, Une généralisation de l'équation de Fredholm et une nouvelle méthode pour l'étudier 409

A. HALANAY, La stabilité intégrale pour les systèmes d'équations différentielles à argument retardé 429

E. BALAŞ and L. P. HAMMER, The transportation problem with interchangeable centres 439

SERGIU RUDEANU, Sur la définition des algèbres booléennes par des opérations binaires 451

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Contribution à l'étude des équations aux dérivées partielles du type parabolique. II. Equations itérées 469

ANDREI DOBRESCU, Sur les groupes de mouvements des équations aux dérivées partielles du second ordre, en deux variables 505

COMPTES RENDUS 521

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том XI, № 2 1960

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МИРОН НИКОЛЕСКУ, О сходящихся последовательностях полигармонических функций 287

КАЮС ЯКОБ, О решениях с заданными особенностями некоторых граничных задач 293

ЛИЛЛИ ЖАН НИКОЛЕСКУ, О интегрируемости дифференциалов Фреше и приложения 305

МАРЧЕЛ Н. РОШКУЛЕЦ, К изучению уравнений в частных производных параболического типа. I. Исследование одного класса уравнений в частных производных второго порядка 337

ВИОРЕЛ ДУМИТРАШ, Определение пространств A_3, обладающих группой G_5 с одномерными многообразиями интранзитивности . . . 375

Н. ПРАПОРДЖЕСКУ, Обобщение уравнения Фредгольма и новый способ его исследования 409

А. ХАЛАНАЙ, Интегральная устойчивость для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом 429

Е. БАЛАШ и Л. П. ХАММЕР, Задача перевозок со связанными центрами 439

СЕРДЖУ РУДЯНУ, Об определении булевых алгебр при помощи бинарных операций 451

МАРЧЕЛ Н. РОШКУЛЕЦ, К изучению уравнений в частных производных параболического типа. II. Интегрированные уравнения . . . 469

АНДРЕЙ ДОБРЕСКУ, О группах движений уравнений в частных производных второго порядка с двумя переменными 505

РЕЦЕНЗИИ 521

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ASUPRA ŞIRURILOR CONVERGENTE DE FUNCŢII POLIARMONICE

DE

ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU

1. Teorema următoare : „*Limita unui şir* $\{u_n\}$ *de funcţii poliarmonice de ordin* $\leqslant p$ *în domeniul mărginit* $D \subset R^q$, *uniform convergent în acest domeniu, este o funcţie poliarmonică de ordin* $\leqslant p$ *în domeniul considerat*" este cunoscută de multă vreme [1] şi a fost deseori citată şi folosită în literatura de specialitate. De aceea, orice lărgire a condiţiilor în care limita unui şir convergent de funcţii poliarmonice de ordin $\leqslant p$ este o funcţie de aceeaşi natură nu poate fi decît binevenită. Evident, o problemă interesantă ar fi definirea unui mod de convergenţă care să constituie o condiţie în acelaşi timp necesară şi suficientă ca limita şirului considerat să fie o funcţie poliarmonică de ordin $\leqslant p$. După cîte ştim, această problemă nu a fost pusă pînă acum. În aşteptarea rezolvării acestei probleme pe care mi-am luat libertatea să o formulez mai sus, nu găsesc lipsit de interes enunţarea unui nou criteriu de păstrare a poliarmonicităţii şi a ordinului de poliarmonicitate, mult mai general decît cel enunţat în 1936.

2. Vom începe prin a trata cazul $p = 1$. Fie, aşadar, $\{u_n(x)\}$ un şir de funcţii armonice în domeniul mărginit $D \subset R^q$. Fie de asemenea, D' un domeniu închis, astfel încît $D' \subset D$ şi $\mathrm{Fr}\, D' \cap \mathrm{Fr}\, D = \theta$.

Să punem $\delta = \rho\,(\mathrm{Fr}\, D,\ \mathrm{Fr}\, D')$. Potrivit teoremei lui Gauss-E. Levi - L. Tonelli, o funcţie $u : D' \to \overline{R}$, integrabilă Lebesgue, este armonică în D' dacă şi numai dacă

$$u(x) = \mu_1((u\,;\ x)\,;\ r)$$

pentru orice punct $x \in D'$ şi pentru orice $r < \delta^*$).

---

*) Simbolul $\mu_1\,(u\,;\ x\,;\ r)$ înseamnă media valorilor funcţiei în sfera $S_r\,(x)$.

Fie, în asemenea condiții, $\{u_n\}_{n \in N}$ un șir convergent de funcții în D' și fie

$$u = \lim u_n. \tag{1}$$

Vom avea, evident, oricare ar fi n,

$$u_n(x) = \mu_1(u_n;\ x;\ r). \tag{2}$$

Să presupunem, că avem, oricare ar fi n, și oricare ar fi $x \in D'$,

$$|u_n(x)| < \Phi(x), \tag{3}$$

unde Φ este o funcție integrabilă Lebesgue.

Atunci, potrivit teoremei de convergență dominată a lui Lebesgue, vom avea

$$\lim \int_{S_r(x)} u_n(x')\,dx' = \int_{S_r(x)} \lim u_n(x')\,dx' = \int_{S_r(x)} u(x')\,dx',$$

pentru orice sferă $S_r(x)$, cu centrul în $x \in D'$ și cu raza $r \leqslant \delta_0 < \delta$.

Ținînd seama de egalitățile (1) și (2), deducem

$$u(x) = \int_{S_r(x)} u(x')\,dx',$$

oricare ar fi $x \in D'$ și $r \leqslant \delta_0$. Deci u este, în baza teoremei amintite, o funcție armonică în domeniul închis D'.

Să presupunem, acum, că egalitatea (3) are loc pentru orice punct $x \in D$ și să considerăm un șir D'_n de domenii închise conținute în D, cu $\rho(\mathrm{Fr}\,D,\ \mathrm{Fr}\,D') = \delta_n$ și $\lim \delta_n = 0$. Evident,

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D'_n.$$

În baza raționamentului de mai sus, funcția-limită u este armonică în fiecare din domeniile închise D'_n, deci ea este armonică în D.

Obținem astfel:

TEOREMA 1: *Dacă șirul $\{u_n\}$ de funcții armonice în domeniul mărginit D, converge în acest domeniu și dacă funcțiile acestui șir sînt majorate, în D, de o funcție integrabilă Lebesgue, atunci funcția-limită este armonică în D.*

3. Extensiunea acestei teoreme la șirurile de funcții poliarmonice de ordin $\leqslant p$, $p > 1$, se va putea face după același principiu, utilizînd proprietatea de medie a acestor funcții pe care am dat-o altădată [2] (a se vedea [1]).

Reamintesc aici această proprietate:

Să notăm cu $\mu_0(u;\ x;\ R)$ media valorilor lui u pe frontiera sferei $S_r(x)$ și cu $\mu_1(u;\ x;\ R)$ media valorilor lui u în sfera plină $S_r(x)$. Între μ_1 și μ_0 există relația cunoscută

$$\mu_1(u;\ x;\ R) = \frac{q}{R^q} \int_0^R r^{q-1}\,\mu_0(u;\ x;\ r)\,dr.$$

Să introducem, în aceste condiţii, şirul $\{u_s\}$, definit în mod recurent astfel :

$$\mu_s(u\,;\,x\,;\,R) = \frac{q}{R^q}\int_0^R r^{q-1}\,\mu_{s-1}(u\,;\,x\,;\,r)\,dr \qquad (4)$$

$$s = 1,\,2,\ldots$$

În asemenea condiţii, avem [2] : *Funcţia u, presupusă integrabilă Lebesgue în domeniul D, este poliarmonică de ordin p în acest domeniu dacă şi numai dacă această funcţie verifică, în orice domeniu închis $D' \subset D$, cu $\rho(FrD, FrD') = \delta > 0$, relaţia*

$$u(x) = C_1\,\mu_1(u\,;\,x\,;\,r) + C_2\,\mu_2(u\,;\,x\,;\,r) + \ldots + C_p\,\mu_p(u\,;\,x\,;\,r) \qquad (5)$$

unde $r \leqslant \delta_0 < \delta$.

În acest enunţ, $C_1, C_2, \ldots, C_p$ sînt coeficienţi numerici, depinzînd de p şi de q. Valoarea lor nu interesează în problema de faţă.

În asemenea condiţii, să considerăm un şir $\{u_n\}$ de funcţii poliarmonice de ordin $\leqslant p$, convergent către u în domeniul D şi astfel încît inegalitatea (3) să fie verificată pentru orice funcţie u_n a şirului. Aplicînd teorema lui Lebesgue, vom avea

$$\mu_1(u\,;\,x\,;\,r) = \lim\,\mu_1(u_n\,;\,x\,;\,r). \qquad (6)$$

Să considerăm acum şirul $\{\mu_1(u_n\,;\,x\,;\,r)\}$. Din inegalitatea (3) deducem

$$\mu_1(u_n\,;\,x\,;\,r) \leqq \mu_1(\Phi\,;\,x\,;\,r).$$

Dar, în baza continuităţii absolute a integralei lui Lebesgue, $\mu_1(\Phi\,;\,x\,;\,r)$ este o funcţie continuă pentru $r \in [0,\,\delta_0]$. Deci ea îşi atinge un maxim $C(\Phi\,;\,x) < \infty$ în acest interval şi putem scrie, punînd, pentru simplicitate, $C(\Phi\,;\,x) = C_x$,

$$\mu_1(u_n\,;\,x\,;\,r) \leqq C_x.$$

Deducem

$$\mu_2(u_n\,;\,x\,;\,r) \leqq \frac{q}{r^q}\int_0^r r'^{q-1}\,C_x\,dr' = C_x$$

şi, în general,

$$\mu_s(u_n\,;\,x\,;\,r) \leqq C_x.$$

Putem deci scrie, pentru orice punct $x \in D'$,

$$\lim\,\mu_s(u_n\,;\,x\,;\,r) = \mu_s(u\,;\,x\,;\,r).$$

Cum avem, în orice punct $x \in D'$,

$$u_n(x) = C_1\,\mu_1(u_n\,;\,x\,;\,r) + C_2\,\mu_2(u_n\,;\,x\,;\,r) + \ldots + C_p\,\mu_p(u_n\,;\,x\,;\,r),$$

trecînd la limită obţinem, în baza rezultatelor obţinute, relaţia (5), deci funcţia u este poliarmonică de ordin $\leqslant p$ în D'. Printr-un raţionament

analog celui făcut în cazul $p = 1$, deducem că u este poliarmonică de ordin $\leqslant p$ în D^*).

Aşadar :

TEOREMA 2 : *Dacă şirul* $\{u_n\}$ *de funcţii poliarmonice de ordin* $\leqslant p$ *în domeniul mărginit* $D \subset R^q$, *converge în acest domeniu şi dacă funcţiile acestui şir sînt majorate în* D *de o funcţie integrabilă Lebesgue, atunci funcţia limită este poliarmonică de ordin* $\leqslant p$ *în* D.

4. Vom spune că o funcţie $u : D \to \overline{R}$ este aproape peste tot poliarmonică de ordin p ($p \geqslant 1$), dacă există o funcţie v, poliarmonică de ordin p în D, astfel încît să avem

$$u = v$$

aproape peste tot în D.

Extinzînd proprietatea caracteristică de medie dată de noi în [2] şi reprodusă mai sus în §3, Silviu Teleman a dat următoarea proprietate [3] :

O funcţie $u : D \to \overline{R}$, *integrabilă Lebesgue în domeniul* D, *este aproape peste tot poliarmonică de ordin* p *în acest domeniu dacă şi numai dacă expresia*

$$C_1 \mu_1(u; x; r) + C_2 \mu_2(u; x; r) + \ldots + C_p \mu_p(u; x; r).$$

este, în orice punct $x \in D$, *independentă de* r (pentru $r < \rho(x, \mathrm{Fr}\, D)$.

Cu ajutorul acestei proprietăţi, putem stabili :

TEOREMA 3. *Dacă şirul convergent* $\{u_n\}$ *de funcţii aproape peste tot poliarmonice de ordin* $\leqslant p$ *este majorat, în* D, *de o funcţie integrabilă Lebesgue, atunci funcţia limită este aproape peste tot poliarmonică de ordin* $\leqslant p$.

Demonstraţia acestei teoreme repetă aproape cuvînt cu cuvînt demonstraţia dată mai sus pentru teorema 3, astfel încît nu o mai dezvoltăm aici.

Vom observa, pentru a termina, că un criteriu analog celui de mai sus se poate da pentru orice şir convergent $\{u_n\}$ de soluţii ale unei ecuaţii cu derivate parţiale, dacă aceste soluţii pot fi caracterizate prin proprietăţi de medie integrală.

О СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

Автор доказал в 1936 г. [1], что предел последовательности $\{u_n\}$ полигармонических функций порядка $\leqslant p$, определенных в ограниченной области $D \subset R^q$ и сходящихся равномерно в этой области, является полигармонической функцией порядка $\leqslant p$".

*) Raţionamentul făcut pentru $p > 1$ nu se aplică în cazul $p = 1$. De aceea am fost nevoiţi să tratăm *separat* ambele cazuri.

В настоящей работе автор показывает, что условие равномерности сходимости можно заменить условием, что функции u_n мажорируются суммируемой функцией.

Тот же результат получается, если предполагать функции u_n почти всюду полигармоническими порядка $\leqslant p$; тогда функция u обладает тем же свойством.

Наконец, автор отметил, что подобные признаки могут быть получены для последовательностей функций, удовлетворяющих уравнению в частных производных, решения которого могут быть охарактеризованы интегральными средними.

SUR LES SUITES CONVERGENTES DE FONCTIONS POLYHARMONIQUES

RÉSUMÉ

L'auteur avait montré, en 1936 [1], que « la limite d'une suite $\{u_n\}$ de fonctions polyharmoniques d'ordre $\leqslant p$ dans un domaine borné $D \subset R^2$, uniformément convergente dans ce domaine, est une fonction polyharmonique d'ordre $\leqslant p$ ».

Dans ce travail, l'auteur montre qu'on peut remplacer la condition d'uniformité de la convergence par la condition suivante : les fonctions u_n soient également majorées par une fonction sommable.

Le même résultat est obtenu si l'on suppose les fonctions u_n presque partout polyharmoniques d'ordre $\leqslant p$, en quel cas la fonction u jouit de la même propriété.

L'auteur fait remarquer, finalement, que des critères du même genre peuvent être obtenus pour des suites de fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles, dont les solutions peuvent être caractérisées par des intégrales de moyenne.

BIBLIOGRAFIE

1. NICOLESCO MIRON, *Les fonctions polyharmoniques.* Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris, 1936.
2. — *Extension du théorème de Gauss aux fonctions harmoniques d'ordre p.* Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. Paris, **191**, 515 (1930).
3. TELEMAN SILVIU, *The method of orthogonal projection in the theory of elasticity.* Revue de Math. pures et appliquées, **I**, *1*, 49—66 (1956).

ASUPRA SOLUȚIILOR CU SINGULARITĂȚI DATE ALE UNOR PROBLEME LA LIMITĂ

DE

CAIUS IACOB

În prezenta lucrare ne propunem să dăm diferite extinderi teoremei cercului [1], care pot fi utile în numeroase aplicații de hidrodinamică sau de electromagnetism. Condițiile la limită pe care le vom considera sînt mixte, de tip Dirichlet, Neumann sau de tip Boggio.

1. *O extindere a teoremei cercului pentru condiții de tip Boggio.* Să considerăm domeniile D_1 ($|z| < a$) și D_2 ($|z| > a$), de frontieră C ($|z| = a$), în planul variabilei complexe $z = x + iy$. Fie $F_j(z)$ ($j = 1, 2$) două funcții analitice de z, definite în tot planul, astfel că $F_j(z)$ să posede singularități date într-un număr finit de puncte din D_j și, practicînd anumite tăieturi în D_j, să fie uniformă și olomorfă în $D_k + C$ ($k \neq j$).

Problema care se pune este următoarea. *Să se determine funcțiile* $f_j(z) = \varphi_j(x, y) + i\,\psi_j(x, y)$, ($j = 1, 2$), *definite și continue împreună cu derivatele prime în* $D_j + C$, *care să verifice condițiile*: *a) diferența* $f_j(z) - F_j(z)$ *este olomorfă în* D_j; *b) pe frontiera* C *avem*

$$\lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dn} - \frac{p_1}{a}\varphi_1 = \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dn} - \frac{p_2}{a}\varphi_2 \tag{1}$$

$$q_1\psi_1 = q_2\psi_2 \tag{2}$$

sensul pozitiv al normalei la C fiind acela spre D_2. Aici, λ_1, λ_2, p_1, p_2, q_1, q_2 sînt constante reale date, astfel că $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \neq 0$.

Sub forma complexă condițiile (1) și (2) se scriu

$$\mathcal{R}e\{\lambda_1 z f_1'(z) - p_1 f_1(z)\} = \mathcal{R}e\{\lambda_2 z f_2'(z) - p_2 f_2(z)\} \qquad (z \in C) \tag{1'}$$

$$\mathcal{R}e\{q_1 f_1(z)\} = \mathcal{R}e\{q_2 f_2(z)\}. \tag{2'}$$

ţinînd seamă de egalitatea

$$a\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}n} = \mathcal{R}e\left\{z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right\}, \qquad z \in C.$$

Problema astfel pusă conţine ca un caz particular probleme considerate de Şt. I. Gheorghiţă [2] şi G. Power [3].

Procedînd ca într-o lucrare anterioară [4], să introducem funcţiile

$$G_1(z) = \overline{F_2\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \qquad G_2(z) = \overline{F_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \tag{3}$$

care sînt definite în tot planul; $G_1(z)$ este olomorfă cu excepţia unor puncte singulare situate în D_1. De asemenea $G_2(z)$ este olomorfă în tot planul cu excepţia unor puncte singulare situate în D_2. Punctele singulare şi comportamentul acestor funcţii în aceste puncte se deduc din acelea ale lui $F_1(z)$ şi $F_2(z)$, conform lui (3).

Vom pune de asemenea

$$g_1(z) = \overline{f_2\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \qquad g_2(z) = \overline{f_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} \tag{4}$$

$$z \in D_1 + C$$

Funcţia $g_j(z)$ $(j = 1,2)$ este supusă condiţiei ca diferenţa

$$g_j(z) - G_j(z) \tag{5}$$

să fie uniformă şi olomorfă în D_j.

Introducerea funcţiilor auxiliare $g_j(z)$ ne permite să dăm o altă formă condiţiilor (1′) şi (2′). Pentru aceasta să observăm în general că dacă $f(z)$ este o funcţie olomorfă pe porţiuni, definită în D_1 şi în D_2 sau numai în unul din aceste domenii şi dacă se pune

$$g(z) = \overline{f\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \qquad h(z) = \overline{f'\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \tag{6}$$

unde $f'(z)$ este derivata lui $f(z)$, atunci funcţiile olomorfe pe porţiuni $g(z)$ şi $h(z)$ sînt legate prin relaţia

$$g'(z) = -\frac{a^2}{z^2}\,h(z). \tag{7}$$

Avem într-adevăr

$$\overline{g(z)} = f\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{z}}f\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) = -\frac{a^2}{\bar{z}^2}f'\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)$$

şi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{z}}\overline{g(z)} = \overline{g'(z)}.$$

Fie atunci funcția $zf_2'(z) = l_2(z)$, definită în $D_2 + C$. Ei îi facem să corespundă, în virtutea lui (7), funcția

$$\overline{l_2\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} = \frac{a^2}{z}\overline{f_2'\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} = -zg_1'(z), \tag{8}$$

care este definită pentru $z \in D_1 + C$. Dacă $z \in C$, avem

$$g_1(z) = \overline{f_2(z)}, \qquad -zg_1'(z) = \overline{zf_2'(z)}, \tag{9}$$

ceea ce permite să înlocuim pe (1') și (2') prin

$$\mathcal{R}e\{\lambda_1 zf_1'(z) + \lambda_2 zg_1'(z) - p_1 f_1(z) + p_2 g_1(z)\} = 0, \tag{1''}$$

$$\mathcal{R}e\{q_1 f_1(z) - q_2 g_1(z)\} = 0 \tag{2''}$$

pentru $z \in C$.

Vom aplica acum teorema cercului. Observăm pentru aceasta că funcțiile din croșete au în D_1 aceleași singularități ca

$$L(z) = z[\lambda_1 F_1'(z) + \lambda_2 G_1'(z)] - p_1 F_1(z) + p_2 G_1(z), \tag{10}$$

$$M(z) = q_1 F_1(z) - q_2 G_1(z).$$

Rezultă de aici că, pentru $z \in D_1$,

$$\begin{cases} z[\lambda_1 f_1'(z) + \lambda_2 g_1'(z)] - p_1 f_1(z) + p_2 g_1(z) = L(z) - \overline{L\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \\ q_1 f_1(z) - q_2 g_1(z) = M(z) - \overline{M\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}. \end{cases} \tag{11}$$

Din a doua relație se scoate

$$g_1(z) = \frac{1}{q_2}\left\{q_1 f_1(z) - M(z) + \overline{M\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}\right\}$$

deoarece $q_2 \neq 0$. În virtutea lui (3) și (10), aceasta revine la

$$g_1(z) = \frac{q_1}{q_2}\{f_1(z) - F_1(z) + G_2(z)\} + G_1(z) - F_2(z). \tag{12}$$

Prin derivare se obține $g_1'(z)$. Înlocuind în prima relație (11) și ținînd iarăși seamă de (3) și (10) se găsește o ecuație diferențială pentru determinarea lui $f_1(z)$. Dacă punem

$$U_1(z) = f_1(z) - F_1(z) \tag{13}$$

și utilizăm notațiile

$$\alpha = \frac{2\lambda_2 q_2}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1}, \quad \beta = \frac{\lambda_1 q_2 - \lambda_2 q_1}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1}, \quad \gamma = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1} \tag{14}$$

presupunînd $\lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1 \neq 0$, atunci această ecuație diferențială se scrie

$$zU'(z) - \gamma U(z) = z[\alpha F_2'(z) + \beta G_2'(z)] + \gamma G_2(z). \tag{15}$$

Ecuația (15) admite o singură soluție olomorfă în D_1 cu condiția ca

$$\gamma \neq \text{întreg pozitiv.} \tag{16}$$

Expresia lui $f_1(z)$ care rezultă din integrarea acestei ecuații este următoarea

$$f_1(z) = F_1(z) + \alpha F_2(z) + \beta G_2(z) \tag{17}$$
$$+ \gamma z^\gamma \int z^{-\gamma-1} [\alpha F_2(z) + (\beta + 1)\, G_2(z)]\, dz,$$

unde $z \in D_1 + C$. Din (15) rezultă că $U(0) = -G_2(0)$; de altfel dacă considerăm dezvoltarea în serie

$$P(z) = \alpha F_2(z) + (\beta + 1) G_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

valabilă în $D_1 + C$, atunci ultimul termen din expresia lui $f_1(z)$ se mai scrie

$$Q(z) = \gamma z^\gamma \int z^{-\gamma-1} P(z)\, dz = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{z^n}{-\gamma}. \tag{18}$$

Din (12) rezultă apoi expresia lui $g_1(z)$. Avem

$$g_1(z) = G_1(z) - \beta F_2(z) + \frac{q_1}{q_2}(\beta + 1) G_2(z) + \frac{q_1}{q_2} Q(z).$$

Prin urmare, ținînd seamă de (3) și (4), se obține

$$f_2(z) = F_2(z) - \beta \overline{F_2\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} + \frac{q_1}{q_2}(\beta + 1) F_1(z) + \frac{q_1}{q_2} \overline{Q\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \tag{19}$$

pentru $z \in D_2 + C$. Dacă punem

$$\varphi(z) = \int z^{-\gamma-1} P(z)\, dz,$$

avem

$$\frac{d}{dz} \overline{\varphi\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} = -\frac{a^2}{z^2} \overline{\varphi'\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} = -\frac{a^2}{z^2} \frac{a^{2\gamma-2}}{z^{\gamma-1}} \overline{P\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)},$$

deci prin integrare rezultă $\overline{\varphi\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}$. Se găsește apoi

$$\overline{Q\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} = -\gamma \frac{a^{2\gamma}}{z^\gamma} \int z^{-\gamma-1} [\alpha G_1(z) + (\beta + 1) F_1(z)]\, dz \tag{20}$$

Soluția găsită are o formă analoagă celei date de G. Power și H. L. W. Jackson [5] pentru o problemă similară*). Formulele (17) și (19) exprimă o generalizare a teoremei cercului.

2. *Cazuri particulare.* I. Dacă $p_1 = p_2 = 0$, avem $\gamma = 0$. Integralele din expresiile (17) și (19) dispar și regăsim soluția unei probleme considerate anterior [4] luînd $q_1 = q_2$. Avem condițiile la limită

$$\lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dn} = \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dn}, \quad \psi_1 = \psi_2, \text{ pe } C \tag{21}$$

și soluțiile cu singularitățile impuse sînt date de

$$f_1(z) = F_1(z) + \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} F_2(z) + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \overline{F_1\left(\frac{a^2}{z}\right)}, \tag{22}$$

$$z \in D_1 + C,$$

$$f_2(z) = F_2(z) + \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} F_1(z) - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \overline{F_2\left(\frac{a^2}{z}\right)}, \tag{23}$$

$$z \in D_2 + C.$$

Condiția admisă anterior revine la $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.

II. Dacă se ia $\lambda_2 = 0$, $p_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, problema se separă în două independente și condiția (1) se reduce la

$$\frac{d\varphi_1}{dn} - \frac{p}{a} \varphi_1 = 0 \qquad \text{pe } C \tag{24}$$

unde p este presupus diferit de un întreg pozitiv. Avem propriu-zis condiția la limită a lui T. Boggio [6], în cazul soluțiilor cu singularități date. Expresia lui $f_1(z)$ se reduce la

$$f_1(z) = F_1(z) + \overline{F_1\left(\frac{a^2}{z}\right)} + 2p\, z^p \int z^{-p-1} G_2(z)\, dz, \qquad z \in D_1 + C \tag{25}$$

3. *Teoremele semicercului.* Un rol important îl au în aplicații teoremele semicercului, pe care le vom enunța acum.

I. Fie Ω_1 semicercul definit prin condițiile $|z| < a$, $\mathcal{I}m\{z\} > 0$ și să notăm prin C_1 frontiera sa. Vom nota prin C' porțiunea frontierei semicercului pentru care $-a \leqslant x \leqslant a$, $y = 0$ și prin C'' porțiunea de frontieră pentru care $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geqslant 0$: în sfîrșit C''' este simetricul lui C'' față de Ox.

Să notăm prin Ω_3 simetricul lui Ω_1 față de axa Ox, prin Ω_2 domeniul pentru care $|z| > a$, $\mathcal{I}m\{z\} > 0$ și prin Ω_4 simetricul lui Ω_2 față de axa Ox. Frontiera lui Ω_j este notată prin C_j. Vom considera o funcție $F_1(z)$ definită în tot planul, care posedă singularități date în Ω_1 și este uniformă și olomorfă în $\Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 + C_1$.

*) Nu am putut lua cunoștință de lucrarea citată decît din Mathematical Reviews, **19**, 8, 848 (1958).

Se cere să se găsească expresia generală a funcțiilor $f_1(z)$ *astfel că:* a) $f_1(z) - F_1(z)$ *este continuă în* $\Omega_1 + C_1$ *și olomorfă în* Ω_1; b) *pe frontiera* C_1 *avem* $\mathcal{R}e\{f_1(z)\} = 0$.

Fie funcțiile

$$f_2(z) = -\overline{f_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \quad z \in \Omega_2 + C_2$$

$$f_3(z) = -\overline{f_1(\bar{z})}, \quad z \in \Omega_3 + C_3 \tag{26}$$

$$f_4(z) = -\overline{f_3\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} = f_1\left(\frac{a^2}{z}\right), \quad z \in \Omega_4 + C_4$$

Singularitățile impuse lui $f_1(z)$ în Ω_1 atrag pe acelea ale lui $f_j(z)$ în Ω_j $(j = 2,3,4)$. Să punem

$$F_2(z) = -\overline{F_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \quad F_3(z) = -\overline{F_1(\bar{z})}, \quad F_4(z) = F_1\left(\frac{a^2}{z}\right) \tag{27}$$

Este clar că funcția $F_j(z)$, definită în tot planul admite singularități numai în Ω_j și că diferența $f_j(z) - F_j(z)$ este olomorfă în Ω_j. Pe de altă parte, ca urmare a condiției b) și a principiului de simetrie al lui Schwarz, $f_2(z)$, $f_3(z)$ și $f_4(z)$ reprezintă prelungirile analitice ale lui $f_1(z)$ în Ω_2, Ω_3 și Ω_4. Funcția $f(z)$ care este definită în tot planul și coincide cu $f_1(z)$ în $\Omega_1 + C_1$, este deci astfel că diferența $f(z) - F_1(z) - F_2(z) - F_3(z) - F_4(z)$ este olomorfă în tot planul. Ea se reduce la o constantă care poate fi inclusă în expresia lui $F_1(z)$. Obținem astfel teorema semicercului care exprimă că, pentru $z \in \Omega_1 + C_1$, avem

$$f_1(z) = F_1(z) - \overline{F_1(z)} + F_1\left(\frac{a^2}{z}\right) - \overline{F_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}. \tag{28}$$

Observare. Dacă în locul condiției b) am fi avut condiția b') $\mathcal{I}m\{f_1(z)\} = 0$ pe C_1, condiția a) rămînînd aceeași, am avea

$$f_1(z) = F_1(z) + \overline{F_1(z)} + F_1\left(\frac{a^2}{z}\right) + \overline{F_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}. \tag{29}$$

II. În mod analog se pune problema pentru cazul cînd se caută funcțiile $g_1(z)$ definite în $\Omega_1 + C$ și astfel că: α) *diferența* $g_1(z) - F_1(z)$ *este continuă în* $\Omega_1 + C$ *și olomorfă în* Ω_1; β) *avem* $\mathcal{I}m\{g_1(z)\} = 0$ *pe* C' *și* $\mathcal{R}e\{g_1(z)\} = 0$ *pe* C''. Condiția β) este deci o condiție de tip Volterra, intervenind în teoria siiagelor.

În cazul acesta vom pune

$$g_2(z) = -\overline{f_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \quad z \in \Omega_2 + C_2,$$

$$g_3(z) = \overline{f_1(\bar{z})}, \quad z \in \Omega_3 + C_3, \tag{30}$$

$$g_4(z) = -\overline{g_3\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} = -f_1\left(\frac{a^2}{z}\right), \quad z \in \Omega_4 + C_4,$$

prelungind astfel în mod analitic funcția $f_1(z)$ în tot planul, în virtutea condiției β) și a principiului de simetrie al lui Schwarz. Punînd la fel

$$G_2(z) = -\overline{F_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \quad G_3(z) = \overline{F_1(z)}, \quad G_4(z) = -F_1\left(\frac{a^2}{z}\right), \tag{31}$$

obținem funcții analitice definite în tot planul și astfel că $G_j(z)$ are singularități numai în Ω_j și este olomorfă în exteriorul lui Ω_j și pe frontiera sa. În plus, diferența dintre $g_j(z)$ și $G_j(z)$ este olomorfă în Ω_j. Prin urmare, notînd prin $f(z)$ funcția analitică obținută prin prelungirile analitice considerate, se constată că diferența $f(z) - F_1(z) - G_2(z) - G_3(z) - G_4(z)$ este olomorfă în tot planul. Deci ea se reduce la o constantă și avem în particular

$$f_1(z) = F_1(z) + \overline{F_1(\bar{z})} - F_1\left(\frac{a^2}{z}\right) - \overline{F_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} \tag{32}$$

pentru $z \in \Omega_1 + C_1$, ceea ce exprimă a doua teoremă a semicercului.

Era de altfel evident că o dată $f_1(z)$ prelungit analitic în Ω_3, s-ar fi putut aplica atît în cazul I cît și în cazul II teorema cercului. Verificarea soluțiilor date de (30), (31) și (32) este imediată.

4. Teorema semicercului pentru condiții mixte de tip Boggio. Vom extinde acum rezultatele precedente în ipoteza că avem de determinat în Ω_1 funcția $f(z) = \varphi + i\,\psi$, avînd aceleași singularități ca funcția $F(z)$, aceasta din urmă fiind definită în tot planul, uniformă și olomorfă în $\Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 + C_1$, în așa fel ca: 1) *diferența* $f(z) - F(z)$ *să fie olomorfă în* Ω_1; 2) *să avem condițiile*

$$\psi = 0 \text{ pe } C' \tag{33}$$

$$\frac{d\varphi}{dn} - \frac{p}{a}\varphi = 0 \quad \text{pe } C''. \tag{34}$$

Sensul pozitiv pe normală este luat spre exteriorul lui Ω_1.

Să punem $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ pentru $z \in \Omega_3 + C_3$. Funcția

$$A(z) = \Phi + i\Psi = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega_1 + C_1, \\ g(z), & z \in \Omega_3 + C_3, \end{cases}$$

este astfel încît, punînd

$$G(z) = \overline{F(\bar{z})}, \qquad H(z) = F(z) + G(z),$$

diferența $A(z) - H(z)$ este olomorfă în $\Omega_1 + \Omega_3 + C'' + C'''$. În plus pe frontierele C'' și C''' avem

$$\frac{d\Phi}{dn} - \frac{p}{a}\Phi = 0.$$

Ținînd seamă de rezultatul de la Nr. 2, avem pentru $p \neq$ întreg pozitiv,

$$A(z) = H(z) + \overline{H\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} + 2p\, z^p \int z^{-p-1} \overline{H\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} dz.$$

Rezultă de aici că

$$f(z) = F(z) + \overline{F(\bar{z})} + F\left(\frac{a^2}{z}\right) + \overline{F\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} +$$

$$+ 2pz^p \int z^{-p-1} \left[F\left(\frac{a^2}{z}\right) + \overline{F\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}\right] dz \qquad (35)$$

pentru $z \in \Omega_1 + C_1$.

5. *Singularități compatibile cu condițiile la limită și singularități complementare.* În problemele pe care le-am considerat mai sus, sub ipotezele precizate, funcțiile $F_1(z)$ și $F_2(z)$ definind singularitățile date în D_1 și D_2 (Nr. 1) sau funcția $F(z)$, care definea singularitățile în Ω_1 (Nr. 3), erau funcții analitice aproape arbitrare, supuse condiției de a fi olomorfe în exteriorul domeniului respectiv și pe frontiera sa. Sub ipotezele precizate la Nr. 1, sau la Nr. 2 și 4, asupra constantelor intervenind în condițiile la limită, aceste singularități sînt compatibile cu condițiile la limită.

Ne propunem acum să examinăm cazul prezenței unor singularități pe frontieră. Reluăm cazul domeniilor D_1 și D_2 considerate la Nr. 1 și ne propunem să cercetăm ce devine teorema cercului în acest caz. Fie $\Phi(z)$ o funcție analitică de z, care are singularități izolate numai pe C și care este olomorfă în D_1 și în D_2. Fie $F(z)$ o funcție analitică de z, definită în tot planul și avînd singularități numai în D_1, astfel că în $D_2 + C$ ea este uniformă și olomorfă.

I. Funcția $f(z) = \varphi + i\,\psi$ considerată în D_1 și continuu prelungibilă pe C este supusă condițiilor: a) *diferența* $f(z) - F_1(z) - \Phi(z)$ *este olomorfă în* $D_1 + C$; b) *avem* $\varphi = 0$ *pe* C, *cu excepția punctelor singulare ale lui* $\Phi(z)$.

Condiția a doua atrage că $f(z)$ se prelungește analitic în D_2, unde ea coincide cu

$$g(z) = -\overline{f\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}, \qquad z \in D_2 \qquad (36)$$

Singularitățile lui $g(z)$ în D_2 sînt prin urmare date de acelea ale funcției

$$G(z) = -\overline{F\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}. \qquad (37)$$

Funcția definită prin

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_1 + C, \\ g(z), & z \in D_2 + C, \end{cases}$$

este astfel că diferența $h(z) - F(z) - G(z) - \Phi(z)$ este olomorfă în tot planul. Prin urmare, ea se reduce la o constantă pe care o integrăm în expresia lui $F(z)$. Prin urmare putem da lui $f(z)$ forma necesară următoare

$$f(z) = F(z) - \overline{F\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} + \Phi(z), \qquad z \in D_1 \tag{38}$$

În realitate, funcția astfel obținută nu satisface condiția pe frontieră decît dacă funcția $\Phi(z)$ este astfel că

$$\mathcal{R}e\,\{\Phi(z)\} = 0 \qquad \text{pe } C. \tag{39}$$

Condiția necesară (39) este și suficientă. În aplicații, de cele mai multe ori, în locul precizării părții principale $\Phi(z)$ se indică numai natura singularității (pol de un anumit ordin, etc). În acest caz, putem determina partea principală $\Phi(z)$ observînd că din condiția (39), dacă ea este îndeplinită, rezultă

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} \tag{40}$$

pentru orice z diferit de punctele singulare de pe C. Avem deci

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\left[\Phi(z) - \overline{\Phi\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}\right] \tag{41}$$

și teorema cercului, exprimată prin (38), ne conduce la

$$f(z) = F(z) - \overline{F\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} + \frac{1}{2}\left[\Phi(z) - \overline{\Phi\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}\right]. \tag{42}$$

Reciproc, fiind dată o funcție $\Phi(z)$, cu singularități numai pe C, olomorfă în D_1 și în D_2, cu ajutorul lui (42) se va forma o funcție $f(z)$ care verifică condiția de a avea singularități de forma dorită în D_1 și pe aceea de a avea singularități de tipul lui $\Phi(z)$ pe C; în plus $\mathcal{R}e\{f(z)\} = 0$ pe C.

Condiția la limită a impus deci ca să adăugăm termenului $\Phi(z)$ termenul

$$-\frac{1}{2}\left[\Phi(z) + \overline{\Phi\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}\right] \tag{43}$$

care reprezintă *singularitățile complementare* în aceleași puncte.

II. Dacă funcția $f(z)$ este supusă condițiilor: α) diferența $f(z) - F(z) - \Phi(z)$ *este olomorfă în* $D_1 + C$; β) *avem* $\mathcal{I}m\{f(z)\} = 0$ pe C, atunci va trebui ca să avem

$$\mathcal{I}m\{\Phi(z)\} = 0 \quad \text{pe } C \tag{44}$$

și expresia lui $f(z)$ este dată de

$$f(z) = F_1(z) + \overline{F_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} + \frac{1}{2}\left[\Phi(z) + \overline{\Phi\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}\right] \tag{45}$$

Reciproc, dacă $\Phi(z)$ nu îndeplineşte condiţia (44), formula (45) ne dă expresia soluţiei cu singularităţi de tipul lui $\Phi(z)$, obţinute din această funcţie prin suprapunerea termenului complementar

$$-\frac{1}{2}\left[\Phi(z)-\overline{\Phi\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}\right]. \tag{46}$$

6. *Aplicaţie.* Să considerăm ca exemplu cazul cînd avem mişcarea fluidă de potenţial $f(z)$ în D_1, în prezenţa peretelui solid impermeabil C, pe care se găseşte plasat un dipol în punctul $z_0 = x_0 + iy_0$. În acest caz

$$\Phi(z) = \frac{\alpha + i\beta}{z - z_0}$$

constantele reale α şi β fiind date arbitrar. Conform lui (45), expresia potentialului complex este

$$f(z) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha + i\beta}{z - z_0} + \frac{(\alpha - i\beta)z}{a^2 - \bar{z}_0 z}\right\}$$

Dar $z_0\bar{z}_0 = a^2$, deci punînd

$$p + iq = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta) - \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)\frac{z_0}{\bar{z}_0},$$

rezultă că

$$f(z) = \frac{p + iq}{\bar{z} - \bar{z}_0} + \frac{\alpha - i\beta}{2\bar{z}_0}.$$

Se verifică uşor că dipolul astfel obţinut este tangent circonferinţei C, aşa cum era de aşteptat. Avem într-adevăr

$$px_0 + qy_0 = \mathcal{R}e\{z_0(p - iq)\} = 0.$$

О РЕШЕНИЯХ С ЗАДАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача определения функций комплексного переменного $z = x + iy$, определенных, соответственно, во внутренности и во внешности круга, обладающих заданными особенностями и удовлетворяющих условиям типа Боджио на общей границе.

Далее приводятся другие обобщения теоремы круга, допускающие практические приложения.

SUR LES SOLUTIONS À SINGULARITÉS DONNÉES DE CERTAINS PROBLÈMES AUX LIMITES

RÉSUMÉ

On considère le problème de la détermination de deux fonctions de la variable complexe, $z = x + iy$, définies respectivement à l'extérieur ou à l'intérieur d'une circonférence, à singularités données et vérifiant des conditions du type de Boggio sur la frontière circulaire commune.

On donne ensuite d'autres extensions du théorème du cercle susceptibles d'applications.

BIBLIOGRAFIE

1. L. M. MILNE-THOMPSON, *Theoretical Hydrodynamics*. Ed. a II-a, Londra, 1949, 149.
2. ȘT. I. GHEORGHIȚĂ, *Citeva mișcări în medii poroase neomogene*, Bul. șt. Acad. R.P.R., Secț. St. Mat. Fiz., VI, *4*, 283 (1954).
3. G. POWER, *An extension of the circle and sphere theorem*, British J. of Appl. Physics, **7**, *6*, 218 (1956).
4. C. IACOB, *Asupra unei extinderi a teoremei cercului*. Comunicările Acad. R.P.R., **IX**, *8*, 759 (1959).
5. G. POWER-H. L. W. JACKSON, *A general circle theorem*. Appl. Science Research, **6**, 456 (1957).
6. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*. **III**, 4e éd., 240 (1927).

ASUPRA INTEGRABILITĂȚII DIFERENȚIALELOR FRÉCHET ȘI APLICAȚII*)

DE

LILLY JEANNE NICOLESCU

Vom expune pe scurt problema de care ne-am ocupat în această lucrare.

Această problemă poate fi formulată astfel:

1) Fiind dată o aplicație $\varphi : X \times X \to Y$ unde X, Y sînt spații Banach, liniară în al doilea argument, există o aplicație $f : X \to Y$ astfel încît diferențiala într-un punct x în sensul lui Fréchet sau Gâteaux a lui f să fie egală cu $\varphi(x; h)$.?

2) În caz afirmativ să se dea un procedeu de construcție a aplicației f.

Am presupus aplicația φ continuă. Acest lucru permite să nu se distingă între cele două diferențiale. Am găsit, în cazul continuității, condiția necesară și suficientă ca $\varphi(x; h)$ să fie o diferențială Fréchet a lui f (al. 4 cap. 1). Această condiție satisfăcută, am arătat că funcția f pe care o putem numi primitiva funcției φ se poate exprima cu ajutorul unui algoritm care se reduce la o integrală de tip Riemann-Graves (al. 4).

Ne-am pus aceeași problemă pentru aplicațiile bilineare. Am dat și aici condiția necesară și suficientă ca o aplicație $\varphi(x, y; h, k)$ bilineară în h, k să fie diferențiala hiperbolică Fréchet a unei funcții $f : X \times X \to Y$ și am găsit și aici algoritmul care permite obținerea funcției f.

Ca aplicație a noțiunii de primitivă am dat, în ultimul capitol, o teoremă de existență și de unicitate pentru ecuația

$$\delta\varphi(x; h) = f(x; \varphi(x); h).$$

mai generală decît teorema dată de Michal și Elconin [9].

---

*) Această lucrare constituie o parte din lucrarea de disertație pentru obținerea titlului de Candidat în științe Fizico-matematice cu titlul „Contribuții la o analiză a funcțiilor vectoriale definite într-un spațiu Banach", susținută în fața Consiliului științific al Institutului de matematică al Academiei R.P.R., la 8 iulie 1959.

Vom expune pe scurt cîteva din rezultatele anterioare obținute în problemele de care ne-am ocupat.

În 1927 Graves [4] a definit o integrală de tip Riemann a unei funcții de variabilă reală cu valori într-un spațiu Banach și i-a studiat proprietățile; Elconin în teza sa [3] a studiat unele proprietăți ale integralei definite de Graves.

Kerner [6] într-un memoriu din Annals of Math. și-a pus următoarea problemă:

Fiind dată o funcție $\varphi : X \times X \to Y$ unde X, Y sînt spații Banach și $\varphi(x; h)$ este lineară în h, care este condiția ca φ să fie diferențiala Fréchet a unei funcții f? *Presupunînd că* $\varphi(x; h)$ *este diferențiabilă Fréchet și că diferențiala Fréchet a sa este continuă în raport cu* x, *el a găsit următoarea condiție*:

$$(I)\quad \delta^k \varphi(x, h) = \delta^h \varphi(x; k)$$

unde $\delta^k \varphi(x; h)$ este diferențiala Fréchet a lui $\varphi(x; h)$.

Michal și Elconin, pe baza rezultatelor lui Kerner, au găsit două teoreme de existență și de unicitate pentru ecuația

$$(II)\quad \delta \psi(x; h) = f(x, \psi(x); h)$$

unde ψ și f sînt funcții definite și cu valori în spații Banach în ipotezele următoare:

(1) $f(x; \varphi(x); h)$ este diferențiabilă Fréchet.

(2) diferențiala Fréchet a lui f este continuă.

(3) condiția (I) este îndeplinită pentru f.

După cum se va vedea din lucrarea de față, condițiile (1) și (2) impuse de Michal și Elconin sînt mult prea restrictive pentru a decide de existența unei soluții pentru ecuația (II) tot așa după cum în teoria ecuației diferențiale clasice $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ condiția ca f să aibă o derivată parțială în raport cu y și în plus ca această derivată parțială să fie continuă sînt condiții prea restrictive chiar într-o expunere elementară a acestei teorii.

CAPITOLUL I

PROBLEMA PRIMITIVEI

§ 1. PRIMITIVA UNEI DIFERENȚIALE FRÉCHET

1. Fie $f : X \to X'$, unde X și X' sînt spații Banach reale și f este diferențiabilă Fréchet în X.

Să considerăm parametrul real t, $0 \leqslant t \leqslant 1$ și să împărțim intervalul închis $[0,1]$ în n intervale prin punctele (t_{i-1}, t_i);

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i \ldots < t_n = 1.$$

Putem scrie

$$f(x+t_i h)-f(x+t_{i-1}h)=(t_i-t_{i-1})\delta f(x+t_{i-1}h;\ h)+(t_i-t_{i-1})\,\sigma_{t_i-t_{i-1}}.$$

unde $\sigma_{t_i-t_{i-1}}$ tinde către zero cînd $t_i-t_{i-1}\to 0$.

Să considerăm suma

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x+t_i h)-f(x+t_{i-1}h)]=f(x+h)-f(x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\,\delta f(x+t_{i-1}h;\ h)+\sigma_n.$$

Dacă facem pe n să tindă către infinit, astfel încît norma partiţiunii precedente să tindă către zero, atunci dacă presupunem funcţia $\delta f(x;\ h)$ continuă în raport cu primul argument rezultă că $\delta f(x+th;\ h)$ este continuă în raport cu t şi suma din membrul al doilea al egalităţii precedente tinde, după cum se ştie, către integrala Riemann-Graves a funcţiei $\delta f(x+th;\ h)$.

Prin urmare, σ_n are o limită determinată şi putem scrie

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1 \delta f(x+th;\ h)\mathrm{d}t+\varepsilon. \tag{1}$$

Vom arăta că $\varepsilon=0$.

Într-adevăr dacă f este o funcţie numerică, aplicînd teorema creşterilor finite a lui V a i n b e r g [12] avem

$$f(x+h)-f(x)=\delta f(x+\theta h;\ h)\qquad 0<\theta<1.$$

Înlocuind pe h cu th, putem scrie

$$f(x+th)-f(x)=t\,\delta f(x+\theta th;\ h).$$

Prin urmare

$$f(x+t_i h)-f(x+t_{i-1}h)=(t_i-t_{i-1})\,\delta f(x+\theta(t_i-t_{i-1})\,h;\ h),$$

de unde rezultă

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x+t_i h)-f(x+t_{i-1}h)]=f(x+h)-f(x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\,\delta f[x+\theta(t_i-t_{i-1})\,h;\ h].$$

Făcînd $n\to\infty$ obţinem

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1 \delta f(x+th;\ h)\ \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Să considerăm acum aplicaţia $f: X\to X'$ şi să luăm $x^*(f)$ unde $x^*\in X'^*\cdot x^*(f)$ este o funcţie numerică, diferenţiabilă Fréchet în X.

Deci aplicînd x^* formulei (1) și utilizînd formula (2) obținem

$$x^*[f(x+h)] - x^*[f(x)] = x^* \int_0^1 \delta f(x+th;\ h)\,dt + x^*(\varepsilon) =$$

$$= \int_0^1 x^* \delta f(x+th;\ h)\,dt + x^*(\varepsilon) = \int_0^1 \delta x^*[f(x+th;\ h)]\,dt.$$

Deci $x^*(\varepsilon) = 0$ oricare ar fi $x^* \in X'^*$, unde $\varepsilon = 0_{X'}$.
Putem, în definitiv, să scriem formula

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \delta f(x+th;\ h)\,dt. \tag{3}$$

2. Rezultatul obținut în aliniatul precedent sugerează imediat problemele următoare:

I. Fiind dată o aplicație $\varphi : X \times X \to X'$ lineară și continuă în al doilea argument, în ce condiții este o astfel de aplicație o diferențială Fréchet ?

II. Presupunînd că φ este o diferențială Fréchet, este unic determinată funcția $f : X \to X'$ a cărei diferențială Fréchet este φ?

Răspunsul la a doua întrebare este imediat. El este conținut în următoarea:

TEOREMĂ. *Două funcții care au aceeași diferențială Gâteaux pe o anumită parte convexă V a spațiului X diferă printr-o funcție constantă pe V.*

Este suficient să arătăm că dacă diferențiala în sensul lui Gâteaux a funcției $f : X \to X'$ este nulă pe V, atunci $f(x) = f(z)$, oricare ar fi punctele $x \in V$, $z \in V$.

Să punem $z - x = h$. Prin ipoteză

$$\lim_{t' \to t} \frac{f(x+t'h) - f(x+th)}{t'-t} = 0_{X'},\ t \in [0,1],\ t' \in [0,1],\ t \neq t'.$$

Să punem

$$f(x+th) = g(t).$$

Egalitatea precedentă ne arată că aplicația $g : [0,1] \to X'$ este derivabilă în orice punct $t \in [0,1]$ și că avem, pe mulțimea considerată, $g' = 0$. Inegalitatea [2]

$$\| g(1) - g(0) - g'(t) \| \leqslant \sup_{t' \in [0,1]} \| g'(t') - g'(t) \|$$

aplicabilă oricărei funcții derivabile în $[0,1]$, devine, în cazul nostru

$$g(1) = g(0),$$

adică

$$f(z) = f(x).$$

Teorema este demonstrată.

Observație. Din teorema demonstrată rezultă imediat că două funcții care au aceeași diferențială Fréchet pe mulțimea V, diferă prin o funcție constantă pe V.

3. Răspunsul la prima întrebare cere o oarecare pregătire.

Să considerăm o aplicație ψ, definită pe o anumită parte convexă V a spațiului X cu valori în spațiul X'. Vom presupune această aplicație continuă pe mulțimea V. Din această ipoteză rezultă imediat că dacă $x \in V$ și $z = x + h \in V$, atunci aplicația $g : [0,1] \to X'$, definită de relația

$$g(t) = \psi(x + th) = \psi[(1 - t)\, x + tz]$$

este continuă pe segmentul $[0,1]$. Deci această aplicație este integrabilă în sensul lui Riemann-Graves pe segmentul considerat.

Vom pune convențional,

$$\int_0^1 \psi[(1 - t)\, x + tz]\, dt = \int_{\overline{xz}} \psi(x)\, dx \tag{4}$$

și vom numi simbolul astfel introdus *integrala rectilinie* a funcției pe segmentul $\overline{xz}$ al spațiului X, *în sensul de la x spre z.*

Din relația precedentă rezultă imediat că

$$\int_{\overline{xz}} \psi(x)\, dx = -\int_{\overline{zx}} \psi(x)\, dx.$$

Cu ajutorul noțiunii de integrală rectilinie putem defini integrala de-a lungul liniei poligonale L determinate de punctele

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n.$$

Prin definiție,

$$\int_L \psi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{x_{i-1} x_i}} \psi(x)\, dx.$$

Să considerăm, în al doilea rînd, o aplicație $\psi : V \times V \to X'$, liniară și continuă în raport cu diferența $z - x$, oricare ar fi $x \in V$, $z \in V$. Dacă notăm cu W mulțimea punctelor $h = z - x$, în care $x \in V$, $z \in V$, putem considera pe φ ca o aplicație a produsului $V \times W$ în X'.

În mod analog cu ceea ce am făcut mai sus, vom pune convențional,

$$\int_0^1 \varphi[1 - t)\, x + tz,\ z - x]\ dt = \int_{\overline{xz}} \varphi(x;\ h)\ dx. \tag{5}$$

Operația de integrare definită de relația precedentă este diferită de operația de integrare definită mai sus prin relația (4), în sensul că în această operație intervine într-un anumit fel și al doilea argument al funcției φ. Dacă integrarea se face pe segmentul $\overline{xz}$ al spațiului Banach considerat, al doilea argument este tocmai $z - x$.

Trebuie să observăm că avem și în acest caz

$$\int_{\overline{xz}} \varphi(x; h)\, dx = -\int_{\overline{xz}} \varphi(x; h)\, dx. \tag{6}$$

În adevăr,

$$\int_{\overline{xz}} \varphi(x; \star)\, dx = \int_0^1 \varphi[(1-t)z + tx;\ x - z]\, dt =$$

$$= -\int_1^0 \varphi[(1-t')x + t'z;\ x - z]\, dt' = \int_0^1 \varphi[(1-t')\ x + t'z;\ x - z]\, dt'$$

$$= -\int_0^1 \varphi[(1-t')x + t'z;\ z - x]\, dt' = -\int_{\overline{xz}} \varphi(x; \star)\, dx.$$

Dacă T este triunghiul format din reuniunea segmentelor $\overline{xz}$, $\overline{zu}$, $\overline{ux}$, în care $x \in V$, $z \in V$, $u \in V$, atunci prin definiție

$$\int_T \varphi(x; \star)\, dx = \int_0^1 \varphi[(1-t)\ x + tz;\ z - x]\, dt +$$

$$+ \int_0^1 \varphi[(1-t)z + tu;\ u - z]\ dt + \int_0^1 \varphi[(1-t)\, u + tx;\ x - u]\, dt.$$

4. Cu pregătirea de mai sus, putem formula următoarea

TEOREMĂ FUNDAMENTALĂ. — *Aplicația $\varphi : V \times W \to X'$ continuă în raport cu primul argument, liniară și continuă în raport cu al doilea argument, este o diferențială Fréchet dacă și numai dacă*

$$\int_T \varphi(x; \star)\, dx = 0 \tag{7}$$

pentru orice triunghiu din V.

Dacă φ este o diferențială Fréchet și dacă f este o „primitivă" a lui φ) atunci pentru orice pereche x, z de puncte din V avem*

$$f(z) - f(x) = \int_{\overline{xz}} \varphi(x;\ z - x)\, dx.$$

În adevăr, presupunînd condiția (7) îndeplinită, să punem

$$f(x) = \int_{\overline{x_0 x}} \varphi(x;\ x - x_0)\, dx,$$

unde $x_0 \in V$, altfel arbitrar. Pentru $z \in V$, $z \neq x$, vom avea

$$f(z) = \int_{\overline{x_0 z}} \varphi(x;\ h)\, dx,$$

*) Adică : o funcție a cărei diferențială Fréchet este φ.

de unde, în baza condiției (7) și a formulei (6),

$$f(z) - f(x) = \int_{\overline{x_0 z}} \varphi(x;\ h)\ \mathrm{d}x - \int_{\overline{xz}} \varphi(x;\ h)\ \mathrm{d}x = \int_{\overline{xz}} \varphi(x;\ h)\ \mathrm{d}x$$

adică, punînd $z - x = h$

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 \varphi\,[x + th;\ h]\ \mathrm{d}t.$$

Deducem

$$f(x + t'h) - f(x) = t' \int_0^1 \varphi(x + t'h;\ h)\ \mathrm{d}t$$

egalitatea din care rezultă că f este diferențiabilă Gâteaux în punctul x și că

$$\delta f(x;\ h) = \varphi(x;\ h).$$

Cum φ este continuă în raport cu primul argument în orice punct din V, rezultă că f este diferențiabilă Fréchet în punctul x în baza unei teoreme a lui G. Marinescu [8] și că avem

$$\mathrm{d}f(x;\ h) = \delta f(x;\ h) = \varphi(x;\ h).$$

Reciproc : Să presupunem că φ este diferențiala Fréchet, deci diferențiala Gâteaux, a unei funcții f. Vom avea, pentru orice sistem de puncte x, z, u din V, în baza formulei (3), § 1, al. 1,

$$f(z) - f(x) = \int_{\overline{xz}} \varphi(x;\ h)\ \mathrm{d}x,$$

$$f(u) - f(z) = \int_{\overline{zu}} \varphi(x;\ h)\ \mathrm{d}x,$$

$$f(x) - f(u) = \int_{\overline{ux}} \varphi(x;\ h)\ \mathrm{d}x,$$

de unde, notînd cu T triunghiul format de reuniunea segmentelor dirijate $\overline{xz}$, $\overline{zu}$, $\overline{ux}$,

$$\int_T \varphi(x;\ *)\ \mathrm{d}x = 0.$$

5. Vom da imediat o aplicație, care nu ni se pare lipsită de interes, a teoremei fundamentale precedente :

TEOREMĂ. *Orice șir, uniform convergent în V, de diferențiale Fréchet continue, tinde către o diferențială Fréchet.*

În adevăr, fie $\{\varphi_n(x;\ h)\}_{n \in N}$ șirul considerat.

Prin ipoteză,

$$\int_T \varphi_n(x; \star)\, dx = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pentru orice triunghiu T din V.

Dar

$$\lim \int_T \varphi_n(x; \star)\, dx = \int_T \lim \varphi(x; \star)\, dx = \int_T \varphi(x; \star)\, dx$$

deci $\varphi(x; \star)$ este o diferențială Fréchet (bineînțeles, continuă).

6. Raționamentele precedente pun întrebarea firească în ce măsură condiția de continuitate, în raport cu primul argument, a aplicației φ, este necesară în formularea teoremei fundamentale.

Adevărul este că dacă presupunem că aplicația $g_{x,z} : [0,1] \to X'$ definită de relația

$$g_{x,z}(t) = \varphi[(1 - t)x + tz, \quad z - x], \tag{8}$$

integrabilă în sensul Riemann-Graves (de exemplu) pe segmentul considerat, oricare ar fi punctele $x \in V$, $z \in V$, funcția $f : X \to X'$ definită prin relația

$$f(x) = \int_{\overline{x_0 x}} \varphi(x; \star)\, dx$$

admite (bineînțeles, în cazul în care condiția (7) este satisfăcută) o diferențială Gâteaux în orice punct x în care φ este continuă. Dar, după cum se știe, aplicația $g_{x,z}$ poate să fie integrabilă Riemann-Graves și totuși să fie discontinuă în orice punct al segmentului [0,1]. Există în acest caz un punct $x \in V$ în care f să fie diferențiabilă Gâteaux?

Răspunsul la această întrebare pare să fie dificil. Observăm, numai, că se nasc aici probleme de natura acelora care au dus la crearea teoriei funcțiilor reale de o variabilă reală.

Cu toate acestea, condiția necesară din teorema fundamentală poate fi ameliorată.

Dacă φ este o diferențială Gâteaux și dacă funcția g_{xz} definită de relația (8) *este integrabilă Riemann-Graves, atunci avem*

$$\int_T \varphi(x; \star)\, dx = 0,$$

pentru orice triunghiu T din mulțimea convexă V.

În adevăr, în acest caz, notînd cu f o „primitivă" a lui φ, raționamentul făcut în al. 6 poate fi reluat în întregime. El ne va conduce la relația (3), de unde deducem imediat condiția (7).

Pe baza acestui rezultat, teorema dată în al. 5 ca aplicație a teoremei fundamentale poate fi ameliorată. Dacă convenim să spunem că φ este

integrabilă Riemann-Graves dacă funcția $g_{x,z}$ definită de relația (8) este integrabilă Riemann-Graves pe segmentul [0,1], atunci putem enunța :

TEOREMĂ : *Orice șir uniform convergent în V, de diferențiale Fréchet, integrabile Riemann-Graves, tinde către o diferențială Fréchet.*

§ 2. CAZUL FORMELOR CONTINUU DIFERENȚIABILE FRÉCHET

7. În cazul în care funcția $\varphi(x; h)$ continuă în raport cu x pe mulțimea convexă și compactă V și lineară și mărginite în h este ca însăși diferențiabilă Fréchet în orice punct al mulțimii V, iar diferențiala este continuă în raport cu x, condiția (7) de integrabilitate poate fi pusă sub o formă mai simplă, cu caracter local, fără ajutorul noțiunii de integrală. Vom expune aici această condiție dată de Kerner [6], într-o formă puțin diferită, introducînd noțiunea de diferențială exterioară.

Notație. Diferențiala unei funcții f în punctul x se va nota $\delta f(x; h) = \delta^h f(x) = \delta_x^h f$.

Definiție. Vom numi diferențiala exterioară a formei $\varphi(x; h)$ forma bilineară $\dot{\varphi}(x; h, k)$ definită de relația

$$\dot{\varphi}(x; h, k) = \delta^k \varphi(x; h) - \delta^h \varphi(x; k). \tag{1}$$

8. Cu definiția dată mai sus putem enunța următoarea :

TEOREMĂ. *Aplicația $\varphi(x; h)$ este o diferențială Fréchet dacă și numai dacă diferențiala sa exterioară este nulă.*

În adevăr, să presupunem că φ este o diferențială Fréchet. Vom calcula

$$\int_0^1 \int_0^1 \psi(x + th + t'k; h, k)\, dt\, dt'$$

unde

$$\psi(x; h, k) = \delta^k \varphi(x; h)$$

Avem, în baza formulei fundamentale de integrare (3) din § 1, al. 6

$$\int_0^1 \psi(x + th + t'k; h, k)\, dt' = \varphi(x + k + th; h) - \varphi(x + th; h)$$

de unde

$$\int_0^1 \int_0^1 \psi(x + th + t'k; h, k)\, dt\, dt' = \int_0^1 [\varphi(x+k+th; h) - \varphi(x+th; h)]\, dt = \tag{2}$$
$$= f(x + h + k) - f(x + k) - f(x + h) + f(x).$$

Punînd

$$\chi(x; k, h) = \delta^h \varphi(x; k),$$

vom obține, de asemenea,

$$\int_0^1\int_0^1 \chi(x+th+t'k;\ k,\ h)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}t' = \\ = f(x+h+k) - f(x+k) - f(x+h) + f(x). \tag{3}$$

Să înlocuim în formulele (2) și (3) pe h și k respectiv prin θh, θk; obținem, făcînd pe θ, $\theta' \to 0$

$$\lim_{\theta\theta'\to 0} \frac{f(x+\theta h+\theta' k) - f(x+\theta h) - f(x+\theta' k) + f(x)}{\theta\ \theta'} = \psi(x;\ h,\ k) = \\ = \chi(x;\ k,\ h),$$

deci, ținînd seama de (1),

$$\dot{\varphi}(x;\ h,\ k) = 0$$

identic pe mulțimea considerată.

Cu notațiile introduse mai sus, avem

$$\int_0^1\int_0^1 \psi(x+th+t'k;\ h,\ k)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}t' = \int_0^1 \varphi(x+k+th;\ h)\ \mathrm{d}t - \\ - \int_0^1 \varphi(x+th;\ h)\ \mathrm{d}t. \tag{4}$$

Dar integrala dublă de mai sus poate fi calculată și în felul următor:

$$\int_0^1\int_0^1 \psi(x+th+t'k;\ h,\ k)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}t' = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 \psi(x+th+t'k;\ h,\ k)\ \mathrm{d}t' + \\ + \int_0^1 \mathrm{d}t' \int_0^t \psi(x+th+t'k;\ h,\ k)\ \mathrm{d}t.$$

Avem

$$\int_0^t \psi(x+th+t'k;\ h,\ k)\ \mathrm{d}t' = \int_0^1 \psi(x+th+t''tk;\ h,\ tk)\ \mathrm{d}t'' = \\ = \varphi(x+th+tk;\ h) - \varphi(x+th;\ h).$$

Deci

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \psi(x+th+t'k;\ h,\ k)\ \mathrm{d}t' = \int_0^1 [\varphi(x+th+tk;\ h) - \varphi(x+th;\ h)]\ \mathrm{d}t.$$

La fel

$$\int_0^1 \mathrm{d}t' \int_0^{t'} \psi(x+th+t'k;\ h,\ k)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 [\varphi(x+th+tk;\ k) - \varphi(x+tk;\ k)]\ \mathrm{d}t.$$

Prin urmare, ținînd seama de liniaritatea lui φ în raport cu al doilea argument,

$$\int_0^1\int_0^1 \psi(x+th+t'k;\ h,\ k)\,dt\,dt' = \tag{5}$$
$$= \int_0^1 \varphi(x+th+tk;\ h+k)\,dt - \int_0^1 \varphi(x+th;\ h)\,dt - \int_0^1 \varphi(x+tk;\ k)\,dt.$$

Scăzînd membru cu membru formula (5) din (4) obținem

$$\int_0^1 \varphi(x+tk;\ k)\,dt + \int_0^1 \varphi(x+k+th;\ h)\,dt - \int_0^1 \varphi[x+t(h+k);\ h+k]\,dt = 0.$$

Aceasta constituie într-o scriere mai puțin diferită condiția de integrabilitate (7) (§ 1, al. 6).

Într-adevăr, dacă punem $h = z - u$ și $k = u - x$, cu notația din § 1 formula de mai sus se poate scrie

$$\int_{xu} \varphi(y;\ u-x)\,dy + \int_{ux} \varphi(y;\ z-u)\,dy - \int_{xz} \varphi(y;\ z-x)\,dy = 0.$$

Dar

$$-\int_{xz} \varphi(y;\ z-x)\,dy = \int_{zx} \varphi(y;\ x-z)\,dy$$

de unde

$$\int_T \varphi(y;\ \star)\,dy = 0,$$

pentru orice triunghiu T din mulțimea V adică tocmai condiția de integrabilitate (7), § 1.

§ 3. CAZUL UNUI SPAȚIU BANACH COMPLEX

9. Fie $\varphi(x;\ h)$ o aplicație a lui $X \times X \to X'$, X și X' fiind spații Banach complexe, liniară și mărginită în h și continuă în x. Să presupunem că φ este în fiecare punct al unui domeniu finit deschis al spațiului X diferențiala Gâteaux, deci Fréchet, a unei funcții $f : X - X'$.

Fie x și $z = x + h$ două puncte ale acestui domeniu și $\zeta(t)$ o funcție complexă cu variație mărginită pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$ astfel încît $\zeta(0) = 0$ și $\zeta(1) = 1$.

D e f i n i ț i e. Mulțimea punctelor $x + \zeta h$ va fi numită un arc rectificabil din spațiul Banach X care unește punctele x și z.

Să considerăm pe acest arc șirul

$$x + \zeta_1 h,\ x + \zeta_2 h,\ \ldots,\ x + \zeta_{k-1} h,\ x + \zeta_k h,\ \ldots,\ x + \zeta_n h = z$$

unde

$$\zeta_k = \zeta(t_k)$$

iar

$$t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots, t_n$$

este o diviziune a segmentului [0,1].

Avem

$$f(x + \zeta_k h) - f(x + \zeta_{k-1} h) = (\zeta_k - \zeta_{k-1})\, \varphi(x + \zeta_{k-1} h;\ h) + (\zeta_k - \zeta_{k-1})\, \varepsilon_k$$

unde

$$\varepsilon_k \to 0 \text{ cînd } \zeta_{k-1} \to \zeta_k \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Deducem

$$f(z) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} (\zeta_k - \zeta_{k-1})\, \varphi(x + \zeta_{k-1} h,\ h) + \sigma_n. \tag{1}$$

Dacă $n \to \infty$ astfel încît norma partiţiunii segmentului [0,1] să tindă către 0, suma din membrul al doilea tinde către

$$\int_C \varphi(x + \zeta\, h;\ h)\, d\zeta \tag{2}$$

de-a lungul arcului (C) corespunzînd arcului rectificabil (Γ) din spaţiul Banach, care uneşte punctele x şi z. Vom nota integrala (2) astfel

$$\int_\Gamma \varphi(y;\ z - x)\, dy. \tag{3}$$

Rezultă, din (1), că σ_n are o limită σ pentru $n \to \infty$. Prin urmare

$$f(z) - f(x) = \int_C \varphi(x + \zeta h;\ h) = d\zeta + \sigma.$$

Pe de altă parte funcţia $f(x + \zeta h)$ este o funcţie holomorfă de ζ a cărei derivată este $\varphi(x + \zeta h;\ h)$ [5]. Rezultă de aici că $\sigma = 0$, deci

$$f(z) - f(x) = \int_C \varphi(x + \zeta h;\ h)\, d\zeta. \tag{4}$$

10. Teoremă. *Pentru ca o funcţie $\varphi(x; h)$ care aplică pe $X \times X$ în X', continuă în x într-un domeniu finit deschis, lineară şi mărginită în h, să fie o diferenţială Gâteaux, trebuie şi este deajuns ca*

$$\int_\Gamma \varphi(y;\ \star)\, dy = 0$$

pentru orice curbă închisă Γ din spaţiul Banach X.

Într-adevăr, fie Γ_1 și Γ_2 două curbe rectificabile care unesc punctele x și z și C_1 și C_2 imaginile lor din planul complex. Potrivit formulei (4) avem

$$f(z) - f(x) = \int_{C_1} \varphi(x + \zeta h\,;\, h)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{C_2} \varphi(x + \zeta h\,;\, h)\,\mathrm{d}\zeta$$

sau, cu notația utilizată,

$$f(z) - f(x) = \int_{\Gamma_1} \varphi(y\,;\, z - x)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_2} \varphi(y\,;\, z - x)\,\mathrm{d}y,$$

cele două integrale fiind luate de-a lungul curbelor orientate de la x spre z. Notînd $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avem

$$\int_{\Gamma_1} \varphi(y\,;\, z - x)\,\mathrm{d}y - \int_{\Gamma_2} \varphi(y\,;\, z - x)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_1} \varphi(y\,;\, z - x)\,\mathrm{d}y +$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \varphi(y\,;\, x - z)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \varphi(y\,;\, \star)\,\mathrm{d}y = 0$$

Prin urmare:

$$\int_{\Gamma} \varphi(y\,;\, \star)\,\mathrm{d}_y = 0 \tag{5}$$

Reciproc: Orice funcție $\varphi(x\,;h)$ continuă într-un domeniu finit deschis, în raport cu x, liniară și mărginită în h, care verifică relația (5) *este o diferențială Gâteaux.*

CAPITOLUL II

PRIMITIVA HIPERBOLICĂ

§ 1. O EXTENSIUNE LA DIFERENȚA DE ORDINUL AL DOILEA, A UNEI TEOREME A CREȘTERILOR FINITE CU APLICAȚII LA DIFERENȚIALELE DIRECTE DE ORDINUL AL DOILEA ÎN SENSUL LUI FRÉCHET ȘI GÂTEAUX

11. În acest paragraf vom extinde teorema creșterilor finite [11] pentru o aplicație definită într-un spațiu Banach cu valori într-un spațiu conjugat, teoremă pe care o vom utiliza pentru a demonstra că o transformare derivabilă Gâteaux direct de ordinul doi într-o vecinătate convexă $A \ni x$ cu derivata secundă directă continuă într-un punct $x_0 \in A$ este diferențiabilă Fréchet direct de ordinul doi. Această problemă ne este utilă în problema integrării diferențialelor directe de ordinul doi.

12. Fie $f: X \to Y$ unde X, Y sînt spații Banach. Vom reaminti următoarea [11]

D e f i n i ț i e. Se spune că f este direct diferențiabilă de ordinul doi în sensul lui Gâteaux în punctul x dacă

$$\lim_{t,t' \to 0} \frac{f(x + th + t'h') - f(x + th) - f(x + t'h') + f(x)}{tt'}$$

există pentru orice $h, h' \in X$. Această limită se notează cu $\delta' \delta f(x; h, h')$,

Punem

$$\delta' \delta f(x; h, h') = f''_x(h, h').$$

D e f i n i ț i e. Dacă aplicația $f''_x : X \times X \to Y$ este bilineară și continuă, vom spune că f''_x este derivata secundară directă a lui f în punctul x.

TEOREMĂ. *Fie f o aplicație definită în X și cu valori în $Y = Z^*$. Să presupunem că f este diferențiabilă direct de ordinul doi în sensul lui Gâteaux în orice punct al unei mulțimi convexe $A \ni x$. Atunci pentru orice $h_1, h_2 \in X$ astfel încît $x + h_1 + h_2$, $x + h_1$, $x + h_2 \in A$ și pentru orice $h' \in Z$ există $0 < \theta < 1$ și $0 < \theta' < 1$, care verifică relația* *)

$$< h', f(x + h_1 + h_2) - f(x + h_1) - f(x + h_2) + f(x) > =$$
$$= < h', \delta' \delta f(x + \theta h_1 + \theta' h_2; h_1, h_2).$$

D e m o n s t r a ț i e. Să punem

$$\varphi(x, h') = < h', f(x) >, \qquad (h' \in Z).$$

Pentru orice $h' \in Z$, funcționala φ este direct diferențiabilă Gâteaux de ordinul doi în A și

$$\delta' \delta \varphi(x, h'; h_1, h_2) =$$

$$= \lim_{t,t' \to 0} \frac{\varphi(x + th_1 + t'h_2; h') - \varphi(x + th_1; h') - \varphi(x + t'h_2; h') + \varphi(x; h')}{tt'} =$$

$$= \lim_{t,t' \to 0} < h', \frac{f(x + th_1 + t'h_2; h') - f(x + th_1; h') - f(x + t'h_2; h') + f(x; h')}{tt'} > =$$

$$= < h', \delta' \delta f(x; h_1, h_2) >. \qquad (1)$$

Aplicăm extensiunea teoremei creșterilor finite (teorema 3 din [11]) funcționalei φ și obținem

$$\varphi(x + h_1 + h_2; h') - \varphi(x + h_1; h') - \varphi(x + h_2; h') + \varphi(x; h') =$$
$$= \delta' \delta \varphi(x + \theta h_1 + \theta' h_2; h').$$

Prin urmare

$$< h', f(x + h_1 + h_2) - f(x + h_1) - f(x + h_2) + f(x) > =$$
$$= < h', \delta' \delta f(x + \theta h_1 + \theta' h_2; h_1, h_2) >$$

și teorema este demonstrată.

---

*) Dacă $f \in E^*$ și $x \in E$, notăm $f(x) = < x \ f >$.

13. Cum orice spațiu Banach Y este izomorf algebric și topologic cu un subspațiu al spațiului Y^{**} rezultă următoarea

TEOREMĂ. *Fie f o aplicație definită în X cu valori în Y. Presupunem că f este diferențiabilă Gâteaux direct de ordinul doi în orice punct al unei mulțimi convexe $A \ni x$.*

Atunci pentru orice pereche $h_1, h_2 \in X$ astfel încît $x + h_1 + h_2$, $x + h_1$, $x + h_2 \in A$ și pentru orice $h' \in Y^*$ există $0 < \theta < 1$ și $0 < \theta' < 1$ care verifică relația

$$< f(x + h_1 + h_2) - f(x + h_1) - f(x + h_2) + f(x), h' > =$$
$$= < \delta'\delta\, f(x + \theta h_1 + \theta' h_2;\ h_1,\ h_2),\ h' >. \qquad (2)$$

14. Utilizînd teorema precedentă putem demonstra următoarea:

TEOREMĂ. *Dacă aplicația f are o derivată secundă directă în sensul lui Gâteaux într-o vecinătate convexă a punctului x_0 și dacă f''_x este continuă în punctul x_0 (față de topologia normei din $\mathcal{L}(X, X')$), atunci aplicația f este diferențiabilă Fréchet direct de ordinul doi în punctul x_0.*

Demonstrație. Fie

$$\omega(x_0;\ h_1, h_2) = f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_2) +$$
$$+ f(x_0) - \delta'\delta\, f(x_0;\ h_1,\ h_2).$$

Aplicînd relația (2) din teorema precedentă, avem, pentru $h' \in Y^*$,

$$< f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_2) + f(x_0),\ h' > =$$
$$= < f''_{x_0 + \theta h_1 + \theta' h_2}(h_1,\ h_2),\ h' > .$$

Făcînd înlocuirile obținem

$$< \omega(x_0;\ h_1,\ h_2),\ h' > = < f''_{x_0 + \theta h_1 + \theta' h_2}(h_1,\ h_2),\ h' > -$$
$$- < f''_{x_0}(h_1, h_2),\ h' > = < f''_{x_0 + \theta h_1 + \theta' h_2}(h_1, h_2) - f''_{x_0}(h_1, h_2),\ h' >$$

de unde rezultă

$$| < \omega(x_0;\ h_1,\ h_2),\ h' > | \leqslant \| f''_{x_0 + \theta h_1 + \theta' h_2} - f''_{x_0} \| \| h_1 \| \| h_2 \| \| h' \|.$$

Deducem de aici

$$\| \omega(x_0;\ h_1,\ h_2) \| \leqslant \sup_{\theta, \theta' \in [0,1]} \| f''_{x_0 + \theta h_1 + \theta' h_2} - f''_{x_0} \| \| h_1 \| \| h_2 \|.$$

Însă marginea superioară în membrul II este atinsă datorită continuității; există deci un θ_0 și un θ'_0 astfel încît

$$\| \omega(x_0;\ h_1,\ h_2) \| \leqslant \| f''_{x_0 + \theta_0 h_1 + \theta'_0 h_2} - f''_{x_0} \| \| h_1 \| \| h_2 \|,$$

de unde

$$\frac{\| \omega(x_0;\ h_1, h_2) \|}{\| h_1 \| \| h_2 \|} \leqslant \| f''_{x + \theta_0 h_1 + \theta'_0 h_2} - f''_{x_0} \|$$

Dacă

$$\| h_1 \|, \| h_2 \| \to 0 \text{ atunci } \| \theta_0 h_1 + \theta_0' h_2 \| \leqslant | \theta_0 | \, \| h_1 \| + | \theta_0' | \, \| h_2 \| \to 0.$$

Cum f_x'' este continuă în x_0, rezultă

$$\lim_{\| h_1 \|, \| h_2 \| \to 0} \frac{\| \omega(x_0; h_1, h_2) \|}{\| h_1 \| \, \| h_2 \|} = 0$$

Prin urmare f este diferențiabilă Fréchet direct de ordinul doi în punctul x_0 [11] și diferențiala Fréchet directă de ordinul doi este egală cu diferențiala Gâteaux directă de ordinul doi.

§ 2. UNICITATEA PRIMITIVEI HIPERBOLICE

15. Vom rezolva aici pentru aplicațiile bilineare și mărginite aceleași probleme pe care le-am rezolvat, în capitolul precedent, pentru aplicațiile lineare și mărginite.

Fie X, Y, V trei spații Banach.

Aplicațiile pe care le vom considera mai jos vor fi de două feluri:

1° aplicații ale spațiului $X \times Y$ normat, sau ale unei părți convexe E, a acestuia, în V;

2° aplicații φ ale spațiului $(X \times Y) \times (X \times Y)$, sau ale lui $E \times E$ în V, a căror valoare în un punct $((x, y), (z, u)) \in E \times E$ este $\varphi(x, y; z - x, u - y)$ și care sînt lineare și mărginite în raport cu ultimele două argumente.

Cu aceste explicații, putem enunța următoarea:

TEOREMĂ. *Două funcții care au aceeași diferențială hiperbolică Gâteaux, diferă între ele printr-o constantă hiperbolică.*

În adevăr, în ipotezele $x \in E$, $y \in E$, $x + h \in E$, $y + h' \in E$, să punem

$$\delta' \delta f(x + th, \; y + t'h'; \; h, h') = \varphi(x + th, y + t'h').$$

Funcția φ definește, pentru x, y, h, h' dați, o aplicație a pătratului $[0,1] \times [0,1]$ în V și avem, prin ipoteză

$$\varphi(x + th, \; y + t'h') =$$

$$= \lim_{\substack{t_1 \to t \\ t_1' \to t'}} \frac{f(x+t_1h, y+t_1'h') - f(x+th, y+t_1'h') - f(x+t_1h, y+t'h) + f(x+th, y+t'h')}{(t_1 - t)\,(t_1' - t')}.$$

Deci $\varphi(x + th, y + t'h')$ este derivata hiperbolică a unei funcții vectoriale în raport cu două argumente reale, în punctul (t, t').

Să punem

$$F(t, t') = f(x + th, \; y + t'h').$$

Să considerăm $x^*(F)$ unde x^* aparține spațiului conjugat V^*. Avem

$$x^*(\Delta' \Delta F) = \Delta' \Delta (x^*(F)). \tag{1}$$

Aplicînd teorema creşterilor finite [1] pentru funcția numerică $x^*(F)$ avem

$$\Delta' \Delta x^* (F) = D (x^* F) \text{ aria } \{[0,1] \times [0,1]\}$$

Dar cum din (1) rezultă că

$$Dx^* F = x^* (DF).$$

dacă $DF = 0$ atunci $Dx^* F = 0$ prin urmare

$$x^* (\Delta' \Delta (F)) = \Delta' \Delta x^* (F) = 0$$

oricare ar fi $x^* \in V^*$. Rezultă că

$$\Delta' \Delta F = F (t, t') - F (t_1, t') - F (t, t'_1) + F (t_1, t'_1) = 0$$

pentru orice pereche (t, t') şi (t_1, t'_1) din $[0,1]$.

Dacă punem $h = z - x$, $h' = u - y$ obținem

$$f(z, u) = f(z, y) + f(x, u) - f(x, y).$$

§ 3. PRIMITIVA HIPERBOLICĂ

16. *Cazul funcțiilor numerice.* Fie $f : X \times Y \to R$, unde X şi Y sînt spații Banach reale şi f este hiperbolic diferențiabilă Fréchet în o parte $E \times F$ a spațiului $X \times Y$. Să considerăm o partiție a pătratului $[0,1] \times [0,1]$ cu ajutorul partițiilor lineare următoare

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = 1,$$
$$0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_{k-1} < t'_k < \ldots < t'_m = 1,$$

şi să aplicăm fiecărui dreptunghiu $[t_{i-1}, t_i] \times [t'_{k-1}, t'_k]$ al acestei partiții extensiunea dată teoremei lui V a i n b e r g în [11].

Avem, presupunînd $(x, y) \in E \times F$, $(x + h, y + h') \in E \times F$,

$$f(x + t_i h; y + t'_k h') - f(x + t_{i-1} h, y + t'_k h') - f(x + t_i h; y + t'_{k-1} h') +$$
$$+ f(x + t_{i-1} h; y + t'_{k-1} h') = (t_i - t_{i-1})(t'_k - t'_{k-1}) \delta' \delta f [x + t_{i-1} h +$$
$$+ \theta (t_i - t_{i-1}) h, y + t'_{k-1} h + \theta (t'_k - t'_{k-1}) h'; h, h']$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, m).$$

Să presupunem funcția $\delta' \delta f(x', y'; h, h')$ continuă în orice punct $(x', y') \in E \times F$. Atunci aplicația $\psi : [0,1] \times [0,1] \to R$, definită pentru orice punct $(t, t') \in [0,1] \times [0,1]$ de relația

$$\psi(t, t') = \delta' \delta f(x + th, y + t'h'; h, h'),$$

este continuă în pătratul considerat.

În asemenea condiții, să însumăm, în raport cu indicii i, k, egalitatea de mai sus şi să facem $m \to \infty$, $n \to \infty$, astfel încît norma partițiunii considerate a pătratului $[0,1] \times [0,1]$ să tindă către zero.

Membrul al doilea al egalității obținute prin însumare va tinde către integrala Riemann a funcției ψ. Obținem, deci, formula

$$f(x+h,\ y+h') - f(x,\ y+h') - f(x+h,\ y) + f(x,\ y) =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}t' \int_0^1 \delta'\delta f(x+th,\ y+t'h';\ h,\ h')\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

17. *Cazul funcțiilor vectoriale.* Fie $f: X \times Y \to B$, unde X, Y, B sînt spații Banach reale.

Dacă presupunem că f este hiperbolic diferențiabilă Fréchet, pe mulțimea $E \times F$ considerată mai sus, putem scrie, cu notațiile deja introduse, în baza însăși a definiției diferențialei,

$$f(x+t_i h,\ y+t'_k h') - f(x+t_{i-1}h,\ y+t'_k h') - f(x+t_i h,\ y+t'_{k-1}h') +$$

$$+ f(x+t_{i-1}h,\ y+t'_{k-1}h') = (t_i - t_{i-1})(t'_k - t'_{k-1})\ \delta'\delta f[x+t_{i-1}h +$$

$$+ \theta(t_i - t_{i-1})h,\ y+t'_{k-1}h' + \theta'(t'_k - t'_{k-1})h';\ h,\ h'] +$$

$$+ (t_i - t_{i-1})(t'_k - t'_{k-1})\ \sigma_{i.k}$$

unde $\lim\limits_{\substack{t_i - t_{i-1} \to 0 \\ t'_k - t'_{k-1} \to 0}} \sigma_{i.k} = 0$.

Dacă presupunem, ca mai sus, funcția $\delta'\delta f(x', y';\ h,\ h')$ continuă în orice punct $(x', y') \in E \times F$, deci funcția ψ continuă în pătratul $[0,1] \times [0,1]$, deducem, prin însumare în raport cu indicii i și k,

$$f(x+h,\ y+h') - f(x,\ y+h') - f(x+h,\ y) + f(x,\ y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})(t'_k - t'_{k-1})\ \delta'\delta f[x+t_{i-1}h + \theta(t_i - t_{i-1})h,$$

$$y + t'_{k-1}h' + \theta'(t'_k - t'_{k-1})h';\ h,\ h'] + \sigma_{m.n}$$

cu

$$\sigma_{m.n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})(t'_k - t'_{k-1})\ \sigma_{i.k}.$$

Dacă $m \to \infty$, $n \to \infty$, astfel încît norma partițiunii considerată a pătratului $[0,1] \times [0,1]$ să tindă către zero, primul termen din membrul al doilea tinde, în ipotezele admise, către integrala Riemann-Graves a funcției vectoriale ψ, în timp ce primul membru este independent de m și n. Deci $\sigma_{m.n}$ are o limită determinată. Fie

$$\sigma = \lim_{m,n \to \infty} \sigma_{m.n}.$$

Relația de mai sus devine

$$f(x+h, y+h') - f(x,\ y+h') - f(x+h,\ y) + f(x,\ y) =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}t' \int_0^1 \delta'\delta f(x+th,\ y+t'h';\ h,\ h')\,\mathrm{d}t + \sigma.$$

Aplicînd $x^* \in B^*$ ambilor membri ai acestei egalități și folosind formula 1 din al. 16 se arată ușor că $\sigma = 0$. Prin urmare

$$f(x+h, y+h') - f(x, y+h') - f(x+h, y) + f(x, y) = \\ = \int_0^1 \mathrm{d}t' \int_0^1 \delta' \delta f(x+th, y+t'h; h, h')\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

§ 4. CRITERII DE INTEGRABILITATE

18. Rezultatul obținut mai sus ca și analogia cu cazul diferențialei Fréchet obișnuite ne conduce să introducem unele notații.

Fie $\varphi(x, y; z-x, v-y)$ o funcție cu valori în B, definită pentru $(x, y) \in E \times F$, $(z, v) \in E \times F$, continuă în raport cu primele două argumente pe mulțimea $E \times F$ bilineară și mărginită în raport cu ultimele două argumente $h = z - x$ și $h' = v - y$.

În asemenea condiții, funcția $\psi : [0,1] \times [0,1] \to B$ definită pentru orice punct $(t, t') \in [0,1] \times [0,1]$ de egalitatea

$$\psi(t, t') = \varphi[(1-t)x + tz; (1-t')y + t'v; z-x, v-y]$$

este continuă în pătratul considerat. Vom scrie, convențional,

$$\int_0^1 \mathrm{d}t' \int_0^1 \psi(t, t')\, \mathrm{d}t = \int\!\!\int_{\overline{xz} \times \overline{yv}} \varphi(x; z; \star, \star)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z$$

integrala din primul membru fiind o integrală de tipul Riemann-Graves.

Evident,

$$\int\!\!\int_{\overline{xz} \times \overline{yv}} \varphi(x', z'; \star, \star)\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}z' = -\int\!\!\int_{\overline{zx} \times \overline{yv}} \varphi(x', z'; \star, \star)\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}z' = \\ = -\int\!\!\int_{\overline{xz} \times \overline{vy}} \varphi(x', z'; \star, \star)\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}z' = \int\!\!\int_{\overline{zx} \times \overline{vy}} \varphi(x', z'; \star, \star)\, \mathrm{d}x'\mathrm{d}z'. \tag{3}$$

Dacă T este triunghiul determinat de punctele x, z, u din E, iar T' este triunghiul din F determinat de punctele y, v, w, expresiile

$$\int\!\!\int_{\overline{xz}\ T} \varphi(x', z'; \star, \star)\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}z', \quad \int\!\!\int_{T\ \overline{yv}} \varphi(x', z'; \star, \star)\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}z'$$

au un sens evident.

Cu aceste notații, să presupunem că φ este diferențiala hiperbolică Fréchet (deci diferențiala hiperbolică Gâteaux) a unei anumite funcții f.

Calculul făcut în alineatul precedent, adică formula (2), ne permite să scriem imediat egalitățile.

$$f(z, v) - f(z, y) - f(x, v) + f(x, y) = \int\limits_{\overline{xz} \times \overline{yv}} \int \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz'$$

$$f(z, w) - f(z, v) - f(x, w) + f(x, v) = \int\limits_{\overline{xz} \times \overline{vw}} \int \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz'$$

de unde, prin adunare,

$$f(z, w) - f(z, y) - f(x, w) + f(x, y) = \int\limits_{\overline{xz} \times \overline{yv}} \int \varphi(x', y'; \star, \star)\, dx'\, dz' +$$

$$+ \int\limits_{\overline{xz} \times \overline{vw}} \int \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz'.$$

Dar, în baza formulei (2),

$$f(z, w) - f(z, y) - f(x, w) + f(x, y) = \int\limits_{\overline{xz} \times \overline{yw}} \int \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz'.$$

Deducem

$$\text{(A)} \quad \int\limits_{\overline{xz} \times T} \int \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz' = 0.$$

În același mod vom găsi

$$\text{(B)} \quad \int\limits_{T \times \overline{yv}} \int \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz' = 0.$$

Vom arăta că aceste condiții, necesare pentru ca φ să fie o diferențială hiperbolică Fréchet, sînt și suficiente.

Fie în adevăr $\varphi(x, y; h, h')$ o funcție bilineară și mărginită continuă în x și y care îndeplinește condițiile (A) și (B). Prin procedeul din alineatul precedent vom construi o funcție f prin formula

$$f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0) = \int\limits_{\overline{x_0 x} \times \overline{y_0 y}} \int \varphi(x', z'; \star; \star)\, dx'\, dz' \quad (2)$$

unde presupunem punctul $(x_0, y_0) \in E \times F$, fix.

Fie (z, v) un alt punct. Vom arăta că

$$f(z, v) - f(z, y) - f(x, v) + f(x, y) = \int\limits_{\overline{xz} \times \overline{yv}} \int \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz'.$$

În adevăr, putem scrie identitatea

$$f(z, v) - f(x, v) - f(z, y) + f(x, y) = \{[f(z, v) - f(x_0, v) - f(z, y_0) + f(x_0, y_0)] - [f(x, v) - f(x_0, v) - f(x, y_0 + f(x_0, y_0)]\} - \{[f(z, y) - f(x_0, y) - f(z, y_0) + f(x_0, y_0)] - [f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)]\}.$$

Fiecărei paranteze drepte din membrul al doilea al acestei identități i se poate aplica formula (2).

Întrucît avem, respectiv,

$$f(z, v) - f(x_0, v) - f(z, y_0) + f(x_0, y_0) - [f(z, y) - f(x_0, y) - f(z, y_0) + f(x_0, y_0)] = f(z, v) - f(x_0, v) - f(z, y) + f(x_0, y),$$

$$f(x, v) - f(x_0, v) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0) - [f(x, y) - f(x, y_0) - f(x_0, y) + f(x_0, y_0)] = f(x, v) - f(x_0, v) - f(x, y) + f(x_0, y),$$

vom putea aplica ambelor acestor egalități relația (A) obținînd

$$f(z, v) - f(x_0, v) - f(z, y) + f(x_0, y) = \int_{\overline{x_0 z} \times \overline{yv}} \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz',$$

$$f(x, v) - f(x_0, v) - f(x, y) + f(x_0, y) = \int_{\overline{x_0 x} \times \overline{yv}} \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz'.$$

Dacă ținem seama că

$$f(z, v) - f(x, v) - f(z, y) + f(x, y) = [f(z, v) - f(x_0, v) - f(z, y) + f(x_0, y)] - [f(x, v) - f(x_0, v) - f(x, y) + f(x_0, y)]$$

și aplicăm relația (1) obținem, însfîrșit,

$$f(z, v) - f(x, v) - f(z, y) + f(x, y) = \int_{\overline{xz} \times \overline{yv}} \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz'.$$

Dacă în această formulă punem

$$x_1 = x + \theta h, \qquad y_1 = y + \theta' h',$$

obținem

$$\lim_{\theta, \theta' \to 0} \frac{f(x + \theta h, y + \theta' h') - f(x, y + \theta' h') - f(x + \theta h, y) + f(x, y)}{\theta \theta'} = \varphi(x, y; h, h'),$$

deci relațiile (A) și (B) sînt și suficiente pentru ca φ să fie o diferențială hiperbolică Gâteaux deci (al. 14, cap. II) Fréchet.

Am demonstrat mai sus următoarea

TEOREMĂ FUNDAMENTALĂ. *O aplicație* $\varphi(x, y; h, h')$ *bilineară și continuă în* h, h', *continuă în* x *și* y, *este o diferențială hiperbolică Fréchet dacă și numai dacă sînt îndeplinite următoarele relații*

$$(A)\qquad \int\!\!\int_{\overline{xz}\times T} \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz' = 0$$

$$\int\!\!\int_{T\times\overline{yv}} \varphi(x', z'; \star, \star)\, dx'\, dz' = 0$$

pentru orice triunghi T *de vîrfuri* x, z, u *din spațiul* X, *și pentru orice triunghi* T', *de vîrfuri* y, v, w *din spațiul* Y.

CAPITOLUL III

TEOREMĂ FUNDAMENTALĂ DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

§ 1. REZOLVAREA UNEI ECUAȚII INTEGRALE

19. Ca aplicație a noțiunii de primitivă vom da o teoremă de existență și de unicitate pentru ecuația (II) (vezi introducerea) mai generală decît teorema dată de Michal și Elconin [9].

Să considerăm două spații Banach X, Y, precum și spațiul produs $V = X \times Y$, normat în felul obișnuit. Să considerăm o aplicație $f: V \times X \to Y$, care duce orice sistem $((x, y), h)$ de puncte, cu $(x, y) \in V$, $h \in X$ în punctul $f(x, y; h) \in Y$. Vom presupune această aplicație continuă și, în plus, liniară în h, pentru orice punct $(x, y) \in V$[1]).

Aplicația f este „lipschitziană" în raport cu y, dacă există un număr pozitiv K astfel încît să avem

$$(L)\qquad \| f(x, y''; h) - f(x, y'; h) \| \leqslant K \| y'' - y' \| \, \| h \|$$

oricare ar fi $x \in X$, $y' \in Y$, $y'' \in Y$, $h \in X$.

20. Problema principală pe care voim să o studiem în acest capitol este următoarea: Există o aplicație $\varphi: X \to Y$, diferențiabilă Fréchet (deci diferențiabilă Gâteaux) astfel încît să avem

$$\delta\varphi(x; h) = f(x; \varphi(x); h) \qquad (1)$$

pentru orice $x \in X$, $h \in X$.

Dacă o astfel de aplicație există, atunci aplicația $g: X \times X \to Y$ definită pentru orice $x \in X$, $h \in X$ de egalitatea

$$g(x, h) = f(x, \varphi(x); h)$$

---

[1]) Kerner a arătat că dacă $f(x, y; h)$ este continuă în (x, y) și liniară în h atunci este continuă în (x, y, h) [6].

este o diferențială Fréchet, adică verifică relația

$$\int_T g(x;\ \star)\,dx = 0$$

pentru orice triunghi T din X. În asemenea condiții, integrala

$$\int_{x_0}^{x} f(u,\ \varphi(u);\ h)\,du$$

are sens, iar din ecuația dată deducem ecuația

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u,\ \varphi(u);\ h)\,du. \tag{2}$$

Reciproc dacă g este diferențiabilă Fréchet, atunci din ecuația (2) deducem imediat ecuația dată, printr-un raționament făcut deja în capitolul I. Dar nu este, a priori, evident că există o funcție φ diferențiabilă Fréchet, astfel încît $f(x,\ \varphi(x);\ h)$ să fie o diferențială Fréchet — și chiar dacă o asemenea funcție ar exista, nimic nu ne afirmă că $f(x,\ \varphi(x);\ h)$ este chiar diferențiala lui φ.

Cu toate acestea, ecuația (2) are un sens, pentru $x_0 \in X$ și $y_0 \in Y$ dați, independent de faptul dacă f îndeplinește sau nu condițiile de mai sus. Acesta este motivul pentru care vom începe prin a studia această ecuație.

21. Vom pune

$$\varphi_0(x) = y_0$$

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u,\ y_0;\ h)\,du$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u,\ \varphi_1(u);\ h)\,du$$

. . . . . .

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u,\ \varphi_{n-1}(u);\ h)\,du$$

. . . . . .

Avem

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \int_{x_0}^{x} f(u,\ y_0;\ h)\,du$$

Vom face ipoteza că pentru un $y_0 \in Y$ dat

$$\|f(u,\ y_0;\ h)\| \leqslant M\,\|h\|$$

M fiind o constantă pozitivă. Rezultă atunci

$$\| \varphi_1(x) - \varphi_0(x) \| \leqslant \int_{x_0}^{x} \| f(u, y_0; h) \| \, du \leqslant M \| x - x_0 \|.$$

De unde, prin recurență

$$\| \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \| \leqslant KM \frac{\| x - x_0 \|^2}{2!}$$

$$\| \varphi_3(x) - \varphi_2(x) \| \leqslant K^2 M \frac{\| x - x_0 \|^3}{3!}$$

. . . . . .

Să considerăm seria

$$\varphi_1(x) + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + \ldots + [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] + \ldots$$

Seria valorilor absolute

$$\| \varphi_1(x) \| + \| \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \| + \ldots + \| \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) \| + \ldots$$

este majorată de seria

$$M \| x - x_0 \| + KM \frac{\| x - x_0 \|^2}{2!} + K^2 M \frac{\| x - x_0 \|^3}{3!} + \ldots$$

Fie $S(x_0; r)$ o sferă cu centrul în x_0 și de rază r. Fie, de asemeni, $\varepsilon > 0$ arbitrar dat. Există n_ε astfel încît pentru $n > n_\varepsilon$ să avem

$$\| \varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x) \| \leqslant MK^{n+p-1} \frac{r^{n+p}}{(n+p)!} < \varepsilon$$

oricare ar fi $x \in S(x_0, r)$.

Seria este deci uniform convergentă în $S(x_0, r)$ prin urmare suma seriei, pe care o notăm cu $\varphi(x)$ este continuă în $S(x_0, r)$.

Să considerăm șirul

$$f(x, \varphi_0(x); h), f(x, \varphi_1(x); h), \ldots, f(x, \varphi_n(x); h), \ldots \qquad (3)$$

în care $x \in S(x_0, r)$. Funcția $f(x, y; h)$ fiind continuă în raport cu ansamblul variabilelor, este continuă în raport cu fiecare variabilă prin urmare șirul (3) tinde uniform către o funcție $f(x, \varphi(x); h)$.

Să arătăm că $f(x, \varphi(x); h)$ este lineară și continuă în h. Într-adevăr, fie x un punct fix din sfera $S(x_0, r)$. Să punem

$$f(x, \varphi_n(x); h) = T_n^x(h).$$

Avem

$$T_n^x(h) = T_0^x(h) + T_1^x(h) - T_0^x(h) + \ldots + T_n^x(h) - T_{n-1}^x(h)$$

de unde

$$\| T_n^x(h) \| \leqslant M \| h \| + \| T_1^x(h) - T_0^x(h) \| + \ldots + \| T_n^x(h) - T_{n-1}^x(h) \|$$

Dar, în baza condiției (L),

$$\| T_n^x(h) - T_{n-1}^x(h) \| \leqslant K \| \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) \| \| h \| \leqslant$$

$$\leqslant K^n M \frac{\| x - x_0 \|^n}{n!} \| h \| \leqslant K^n M \frac{r^n}{n!} \| h \|.$$

Prin urmare

$$\| T_n^x(h) \| \leqslant \sum_{i=0}^{n} K^i M \frac{r^i}{i} \| h \| \leqslant M' \| h \|$$

pentru orice n.

Deci conform teoremei lui Steinhaus-Banach șirul de transformări

$$T_0^x(h),\ T_1^x(h),\ \ldots,\ T_n^x(h),\ \ldots$$

tinde către transformarea lineară și mărginită $T^x(h)$.

Așadar, în sfera $S(x_0, r)$, funcția $f(x, \varphi(x); h)$ este lineară și continuă în h.

În integrala

$$\varphi_n(x) = \int_{x_0}^{x} f(u\ \varphi_n(u); x - x_0)\, du + y_0$$

putem trece la limită și obținem

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u); x - x_0)\, du + y_0.$$

22. Să arătăm că soluția ecuației integrale astfel obținută este unică.

Să presupunem că într-o sferă de centru x_0 și de rază r, ecuația are două soluții, fie

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(u, \varphi(u); h)\, du + y_0$$

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} f(u, \psi(u); h)\, du + y_0$$

atunci

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} [f(u, \varphi(u); h) - f(u, \psi(u); h)]\, du$$

În baza condiției (L) avem

$$\| \varphi(x) - \psi(x) \| \leqslant K \| x - x_0 \| \int_0^1 \| \varphi[(1-t)x_0 + tx] - \psi[(1-t)x_0 + tx] \|\, dt.$$

Funcția

$$\| \varphi [(1 - t) x_0 + tx] - \psi [(1 - t) x_0 + tx] \|$$

este continuă în raport cu t în intervalul $[0,1]$. Prin urmare își atinge maximul, deci avem

$$\| \varphi(x) - \psi(x) \| \leqslant Kr \max \| \varphi [(1 - t) x_0 + tx] - \psi [(1 - t) x_0 + tx] \|$$

pentru orice $x \in S(x_0, r)$. Să punem

$$x = (1 - u) x_0 + ux_1 .$$

Avem

$$\max \| \varphi [(1 - u) x_0 + ux_1] - \psi [1 - u) x_0 + ux_1] \| \leqslant$$
$$\leqslant \max \| \varphi [1 - tu) x_0 + tux_1] - \psi [(1 - tu) x_0 + tux_1] \| Kr$$
$$t \in [0,1], u \in [0,1].$$

Datorită continuității rezultă că există $t_0 \in [0,1]$ astfel încît

$$\max_{t \in [0,1],\ u \in [0,1]} \| \varphi [(1 - tu) x_0 + tux_1] - \psi [(1 - tu) x_0 + tux_1] \| =$$
$$= \max_{u \in [0,1]} \| \varphi [(1 - t_0 u) x_0 + t_0 ux_1] - \psi [(1 - t_0 u) x_0 + t_0 ux_1] \|.$$

Să punem $t_0 u = v$, rezultă

$$\max_{u \in [0,1]} \| \varphi [(1 - u) x_0 + ux_1] - \psi [(1 - u) x_0 + ux_1] \| \leqslant$$
$$\leqslant Kr \max_{v \in [0,1]} \| \varphi [(1 - v) x_0 + vx_1] - \psi [(1 - v) x_0 + vx_1] \|.$$

Prin umare, dacă $Kr < 1$ rezultă $\varphi(x) - \psi(x) = 0$ deci soluția ecuației integrale este unică.

Am obținut în acest fel următoarea

TEOREMĂ. *Ecuația*

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u,\ \varphi(u);\ h)\, du$$

are o soluție și una singură, în sfera închisă $S(x_0, r)$, *unde* $r < \frac{1}{K}$.

§ 2. STUDIUL ECUAȚIEI $\delta \varphi(x) = f(x, \varphi(x); h)$

23. Rezolvarea ecuației (2) ne va ușura considerabil discuția ecuației (1).

Am arătat mai sus că șirul

$$\{ f(x, \varphi_n(x); h) \}$$

converge, uniform în $S(x_0, r)$ către $f(x, \varphi(x); h)$

În asemenea condiții, șirurile

$$\left\{\int_{x_0}^{x} f(u,\ \varphi_n(u);\ h)\,du\right\},\qquad \left\{\int_{x_0}^{z} f(u,\ \varphi_n(u);\ h)\,du\right\}$$

tind respectiv către

$$\int_{x_0}^{x} f(u),\ \varphi_n(u);\ h)\,du,\qquad \int_{x_0}^{z} f(u),\ \varphi(u);\ h)\ du$$

pentru orice $x,\ z \in S(x_0,\ r)$ și vom avea

$$\varphi(z) - \varphi(x) = \int_{x_0}^{z} f(u,\ \varphi(u);\ h)\,du - \int_{x_0}^{x} f(u;\ \varphi(u);\ h)\ du. \tag{1}$$

Dacă pentru orice triunghi T_0 cu vîrfurile respectiv, $x_0,\ z,\ x$, avem

$$\int_{T_0} f(u,\ \varphi(u);\ \star)\,du = 0 \tag{2}$$

atunci egalitatea (1) devine

$$\varphi(z) - \varphi(x) = \int_{x}^{z} f(u,\ \varphi(u);\ h)\ du$$

de unde printr-un raționament făcut în cap. I, rezultă că φ este diferențiabilă Fréchet în punctul x și că

$$\delta\varphi(x;\ h) = f(x;\ \varphi(x);\ h).$$

Condiția (2) se poate scrie și astfel

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_0} f(u,\ \varphi_n(u);\ \star)\ du = 0,$$

în baza convergenței uniforme a șirului

$$\{f(x,\ \varphi_n(x);\ h)\} \text{ către } f(x,\ \varphi(x);\ h).$$

Reciproc, să presupunem că ecuația (1) din § 1 admite pentru orice $x_0 \in X$, o soluție unică definită în $S(x_0,\ r)$, astfel încît $\varphi(x_0) = y_0$, unde $y_0 \in Y$ este dat. Deducem, pentru $x \in S(x_0,\ r)$ și $z \in S(x_0,\ r)$

$$\varphi(z) = \varphi(x) + \int_{x_0}^{z} f(u,\ \varphi(u);\ h)\ du - \int_{x_0}^{x} f(u,\ \varphi(u);\ h)\ du.$$

Dar, pe de altă parte, soluția ecuației (1) din § 1 care în punctul x ia valoarea $\varphi(x)$, soluție care există prin ipoteză, este dată în mod obligatoriu de relația

$$\varphi(z) - \varphi(x) = \int_{x}^{z} f(u,\ \varphi(u);\ h)\ du.$$

Deducem

$$\int_{T_0} f(u,\ \varphi(u);\ \star)\ du = 0$$

unde T_0 este triunghiul cu vîrfurile în x_0, x, z.

Cum soluția ecuației (1) este și soluție a ecuației (2), din § 1, deci limită în sfera $S(x_0,\ r)$ a șirului $\{\varphi_n\}$, rezultă că avem

$$\lim \int_{T_0} f(u,\ \varphi_n(u);\ \star)\ du = 0.$$

Am obținut astfel următoarea

TEOREMĂ DE EXISTENȚĂ ȘI DE UNICITATE. 1°. *Ecuația*

$$\delta\varphi(x,\ h) = f(x,\ \varphi(x);\ h)$$

are o soluție unică φ, *definită în sfera închisă* $S(x_0;\ a)$, *cu* $a < \dfrac{1}{K}$, *astfel încît* $\varphi(x_0) = y_0$ *dacă și numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T_0} f(u,\ \varphi_n(u);\ \star)\ du = 0 \tag{3}$$

pentru orice triunghi T_0 *din* $S(x_0;\ a)$ *cu unul dintre vîrfuri în* x_0. *Șirul* $\{\varphi_n\}$ *este definit recurent prin relațiile*

$$\varphi_0(x) = y_0,\quad \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u,\ \varphi_{n-1}(u);\ h)\ du$$

2°. *Dacă relația* (3) *este îndeplinită, ecuația dată are o singură soluție* φ *astfel încît* $\varphi(x_0) = y_0$.

24. Ca aplicație, să considerăm cazul particular următor

$$X = R^2,\qquad Y = R,$$

deci $V = R^2 \times R$. Funcția f va fi o aplicație a spațiului $V \times R$ în R, continuă în spațiul $V \times R$, liniară în raport cu ultimul argument. Dacă $x^\star = (x,\ y) \in R^2$, $h^\star = (h,\ k) \in R^2$, $z \in R$, atunci

$$f(x^\star,\ z;\ h^\star) = P(x,\ y,\ z)\,h + Q(x,\ y,\ z)\,k. \tag{4}$$

Sfera $E = S(x_0;\ a)$ devine pătratul

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a,\qquad y_0 - a \leqslant y \leqslant y_0 + a.$$

Să presupunem că pentru orice punct $x^\star \in E$ avem

$$|\ P(x,\ y,\ z'') - P(x,\ y,\ z')\ | \leqslant \frac{1}{2}\ K\,\|z'' - z'\|,$$

$$|\ Q(x,\ y,\ z'') - Q(x,\ y,\ z')\ | \leqslant \frac{1}{2}\ K\,\|z'' - z'\|.$$

Atunci

$$| f(x^*, z''; h^*) - f(x^*, z', h^*) | \leqslant K \| h^* \| \| z'' - z' \|.$$

deci f îndeplinește condiția (L).

Ecuația (1) din § 1 se scrie, cu notațiile clasice,

$$\mathrm{d}z = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

Se știe că dacă P și Q au derivate parțiale continue de primul ordin, atunci ecuația precedentă admite o integrală $z(x, y)$, astfel încît $z(x_0, y_0) = z_0$, dacă și numai dacă ecuația următoare

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} Q = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} P.$$

este verificată în toate punctele unei anumite vecinătăți a punctului (x_0, y_0).

Teorema generală fundamentală obținută mai sus ne permite să putem studia ecuația (5) și în cazul mult mai puțin restrictiv în care funcțiile P și Q sînt lipschitziene în E, în raport cu z. Obținem, anume, rezultatul următor:

Ecuația (5) *admite o soluție unică, care ia în un punct* $(x'y') \in E$, *o valoare dată* $z' \in R$, *soluție definită pentru* $a < \dfrac{1}{K}$, *dacă și numai dacă avem*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{T_0} P(x, y, z_n(x, y))\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z_n(x, y))\,\mathrm{d}y = 0,$$

pentru orice triunghi T_0 *din* E, *cu unul din vîrfuri în punctul* (x_0, y_0). *Șirul* $\{z_n(x, y)\}$ *este definit prin recurență de relațiile*

$$z_0(x, y) = z_0,\ z_n(x, y) = z_0 + \int_{\overset{\frown}{x_0 x}} P(x, y, z_{n-1}(x, y))\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z_{n-1}(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Soluția ecuației (5), *care ia, în punctul* (x_0, y_0), *valoarea* z_0 *este limita șirului* $\{z_n(x, y)\}$.

О ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ФРЕШЕ И ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Задача, рассматриваемая в настоящей работе, может быть сформулирована следующим образом:

1) Пусть $\varphi : X \times X \to Y$ (где X, Y — банаховы пространства) — линейное отображение относительно второго аргумента; существует

ли отображение $f : X \to Y$ такое, что его дифференциал Фреше или Гато равен $\varphi(x; h)$?

2) В случае положительного ответа дать способ построения отображения f.

Отображение φ предполагалось непрерывным. Это дало возможность не проводить различия между упомянутыми дифференциалами. В случае непрерывности найдено необходимое и достаточное условие того, что $\varphi(x; h)$ является дифференциалом Фреше отображения f. Если это условие выполняется, то показано, что функция f, которую можно назвать первообразной функцией, может быть определена при помощи логарифма, сводящегося к интегралу типа Римана-Грейвса.

Аналогичная задача рассмотрена для билинейных отображений. Найдено необходимое и достаточное условие, при котором линейное по h и k отображение $\varphi(x, y; h, k)$ является гиперболическим дифференциалом в смысле Фреше [11] некоторой функции $f : X \times X \to Y$; здесь приведен также логарифм, позволяющий найти функцию f.

В качестве приложения к понятию первообразной в последней главе приведена теорема существования и единственности для уравнения

$$\delta\varphi(x; h) = f(x; \varphi(x); h)$$

более общая, чем теорема работы [9].

SUR L'INTÉGRABILITÉ DES DIFFÉRENTIELLES AU SENS DE FRÉCHET ET SES APPLICATIONS

RÉSUMÉ

Le problème étudié dans cette note peut être formulé ainsi :

1) Soient x, y des espaces de Banach et soit $\varphi : X \times X \to Y$ une transformation linéaire par rapport au second argument ; il s'agit de savoir s'il existe une transformation $f : X \to Y$ telle que la différentielle de f au point x dans le sens de Fréchet ou de Gâteaux soit égale à $\varphi(x; h)$.

2) Dans le cas affirmatif on cherche un procédé de construction de la transformation f.

L'auteur suppose que la transformation φ est continue. Cela permet de ne pas distinguer entre les deux différentielles. On trouve dans le cas de la continuité la condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(x; h)$ soit une différentielle de Fréchet de f. Cette condition remplie, on montre que la fonction f, dénommée par l'auteur la primitive de la fonction φ, peut s'exprimer à l'aide d'un algorithme qui se réduit à une intégrale du type Riemann-Graves.

On étudie le même problème relatif aux applications bilinéaires. On trouve la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application $\varphi(x, y; h, k)$ bilinéaire en h et k soit la différentielle hyperbolique au

sens de Fréchet [11] d'une fonction $f : X \times X \to Y$ et on détermine l'algorithme permettant d'obtenir la fonction f.

Comme application de la notion de primitive, l'auteur donne, au dernier chapitre, un théorème d'existence et d'unicité pour l'équation

$$\delta\varphi(x;\ h) = f(x;\ \varphi(x);\ h),$$

plus général que le théorème de Michal et Elconin [9].

BIBLIOGRAFIE

1. BÖGEL K., *Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlichen.* Journal für die reine und angewandte. Mathematik, **170**, 197—217 (1934); *Über mehrdimensionale Differentiation Integration und beschränkte Variation.* Ibid., **173**, 5—30 (1935).
2. BOURBAKI N., *Fonctions d'une variable réelle (Théorie élémentaire).* Ch. I. Act. Sci. et ind. Hermann § Cie éditeurs, 1949.
3. ELCONIN V., Thesis. Calif. Inst. of Tech. (1937).
4. GRAVES L.M., *Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis.* Trans. Amer. Math. Soc., *29*, 163—177 (1929).
5. HILLE E., *Functional analysis and semigroups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **XXXI** (1948).
6. KERNER, Annals of Math., **2**, *34* (1933); Prace Mat.-Fiz., **VL** (1932).
7. ЛЮСТЕРНИК Л. А., СОБОЛЕВ В. И., *Элементы функционального анализа,* Москва, 1950.
8. MARINESCU G., *Asupra diferențialei și derivatei în spațiile normate.* Bul. științific Acad. R.P.R., **VI**, *2* (1954); *Asupra formulei lui Lagrange în spațiile Banach.* Rev. Univ. C. I. Parhon și a Polit. București, *4—5* (1954).
9. MICHAL, ELCONIN, *Completely integrable differential equations in abstract spaces.* Acta Mathematica, **68**, 71—107 (1937).
10. NICOLESCU MIRON, *Contribuțiuni la o analiză de tip hiperbolic a planului.* Studii și Cercet. Mat., **III**, *1—2* (1952); *Extensiuni ale noțiunii de monogeneitate,* Lucrările Sesiunii Generale Științifice din iunie 1950; *Analiza matematică.* **II**, Ed. tehnică (1958).
11. NICOLESCU LILLY JEANNE, *Proprietăți ale funcțiilor reale diferențiale Gâteaux direct de ordinul doi.* Comunicările Acad. R.P.R., **IX**, *3* (1959); *On direct second order differentiability in Fréchet's and Gâteaux's sens.* Revue de Math. pures et appl., **III**, *2* (1958).
12. ВАЙНБЕРГ М. М., *Некоторые вопросы дифференциального анализа в линейных пространствах.* Успехи Мат. Наук, **7**, *4* (1952).

CONTRIBUȚII LA STUDIUL ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP PARABOLIC. I.

STUDIUL UNEI CLASE DE ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL DOI

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

Introducere. Obiectul prezentei lucrări este studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul doi de forma

$$E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - Y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} - Y_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} - \ldots - Y_m \frac{\partial u}{\partial y_m} = 0 \qquad (1)$$

unde

$$Y_k = Y_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

rezolvîndu-se problemele ce se pun în mod obișnuit pentru această clasă de ecuații. La început se construiește soluția elementară care va permite rezolvarea problemei lui Cauchy. Pentru rezolvarea acestei probleme se face o restricție asupra ecuației (1) și anume se cere funcțiilor $Y_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, derivabile, condiția

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial Y_m}{\partial y_m} = 0 \qquad (2)$$

restricție care are originea în determinarea unei soluții elementare a ecuației adjuncte.

Dacă se poate găsi o soluție elementară a ecuației adjuncte fără restricția (2), atunci metoda expusă mai jos este aplicabilă direct ecuației (1).

Rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuația (1) nu prezintă nici o greutate specială dacă numărul variabilelor x_i este oarecare, față de cazul unei singure variabile x_i, însă apar dificultăți geometrice cînd numărul variabilelor y_k crește. Pentru a pune în evidență acest fapt, am dat în al. 5 și soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(y, z, t)\frac{\partial u}{\partial y} - Q(y, z, t)\frac{\partial u}{\partial z} - R(y, z, t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

cu legătura

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0.$$

Problemele la limită rezolvate nu cer ecuației (1) nici o restricție, aceasta deoarece soluțiile se găsesc fără intermediul ecuației adjuncte.

Lucrarea se termină cu studiul unor proprietăți ale soluțiilor ecuației (1), proprietăți ce pot fi puse în corespondență cu proprietățile soluțiilor ecuației căldurii, însă prezența funcțiilor $Y_k(y_1, \ldots, y_m)$ permite o discuție mai amplă a lor.

Lucrarea de față va fi continuată cu un studiu asupra ecuației (1) iterate.

STUDIUL UNEI CLASE DE ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL DOI DE TIP PARABOLIC

1. — *Soluția elementară.* Fie ecuația

$$E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - Y_1\frac{\partial u}{\partial y_1} - Y_2\frac{\partial u}{\partial y_2} - \ldots - Y_m\frac{\partial u}{\partial y_m} = 0 \tag{1}$$

cu

$$Y_k = Y_k(y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy, este necesar să introducem restricția

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial Y_m}{\partial y_m} = 0 \tag{2}$$

încît folosind operatorii cunoscuți div, grad, ecuația (1) și condiția (2) se scriu

$$\operatorname{div}_x \operatorname{grad}_x U(x, y) = \overline{Y}(y) \operatorname{grad}_y U(x, y),$$

$$\operatorname{div} \overline{Y}(y) = 0$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Să arătăm acum că dacă

$$v = G(y_1, y_2, \ldots, y_m) = G(y)$$

este o soluție oarecare a ecuației

$$Y_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial v}{\partial y_2} + \ldots + Y_m \frac{\partial v}{\partial y_m} = 1 \tag{3}$$

atunci funcția

$$u = \frac{1}{[G(y) - G(y_0)]^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right] \tag{4}$$

unde

$$r^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2$$

este o soluție a ecuației (1).

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{x_k - x_k^0}{2[G(y) - G(y_0)]^{\frac{n+2}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \left[-\frac{1}{2[G(y) - G(y_0)]^{\frac{n+2}{2}}} + \frac{(x_k - x_k^0)^2}{4[G(y) - G(y_0)]^{\frac{n+4}{2}}}\right] \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right]$$

cît și

$$\frac{\partial u}{\partial y_i} = \left[-\frac{n}{2} \cdot \frac{\frac{\partial G(y)}{\partial y_i}}{[G(y) - G(y_0)]^{\frac{n+2}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{r^2}{4} \cdot \frac{\frac{\partial G(y)}{\partial y_i}}{[G(y) - G(y_0)]^{\frac{n+4}{2}}}\right] \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right].$$

Dacă înmulțim $\frac{\partial u}{\partial y_i}$ cu Y_i, însumăm în raport cu i, se observă că

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial y_i} Y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

deoarece

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i \frac{\partial G(y)}{\partial y_i} = 1$$

de unde rezultă că $E(u) = 0$ dacă $G(y)$ este o soluție oarecare a ecuației (3).

Să impunem funcției arbitrare $G(y) - G(y_0)$ condiția de a se reduce la $y_1 - y_1^0$ pentru $y_m = y_m^0$, ceea ce o determină în mod unic.

Vom numi soluție elementară a ecuației (1) funcția $u(x, y)$ dată de

$$u(x, x_0; y, y_0) = [G(y) - G(y_0)]^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right]$$

dacă $G(y) > G(y_0)$, și

$$u(x, x_0; y, y_0) = 0, \text{ dacă } G(y) \leqslant G(y_0).$$

Să demonstrăm acum pentru funcția u următoarea proprietate.

Fie D_m un domeniu în spațiul cu m dimensiuni $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ pentru care punctul $y_0(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ poate fi și punct frontieră, încît să avem pentru orice $y \in D_m (y \neq y_0)$ neegalitatea

$$G(y) - G(y_0) > 0. \tag{5}$$

Dacă Ω_∞ este definit de $-\infty < x_k < +\infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$, putem găsi o constantă A, care depinde numai de n, încît să avem

$$I = \frac{1}{A}\int_{\Omega_\infty} [G(y) - G(y_0)]^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right] dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1 \tag{6}$$

pentru y în $D_m (y \neq y_0)$.

Folosind reprezentarea parametrică a sferei din spațiul cu n dimensiuni, integrala (6) se scrie

$$I = \frac{S_n}{A}\int_0^\infty r^{n-1} [G(y) - G(y_0)]^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right) dr \tag{6'}$$

unde S_n este suprafața sferei considerate, cu raza egală cu unitatea, deci

$$S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Dacă punem în (6') $\dfrac{r}{2\sqrt{G(y) - G(y_0)}} = z$, avem

$$I = \frac{S_n}{A} \cdot 2^n \int_0^\infty z^{n-1} e^{-z^2} dz = 2^{n-1} \cdot \frac{S_n}{A}\int_0^\infty (z^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-z^2} dz =$$

$$= 2^{n-1}\frac{S_n}{A}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}{A}$$

și cum trebuie să avem $I = 1$, urmează că

$$A = (4\pi)^{\frac{n}{2}}$$

rezultat identic cu cel de la ecuația căldurii [1]*), deoarece în operația de integrare $G(y) - G(y_0)$ se comportă ca o constantă. Condiția (5) fiind îndeplinită este natural să obținem același rezultat. Prin urmare avem

$$(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [G(y) - G(y_0)]^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right] dx_1\, dx_2 \dots dx_n = 1 \qquad (6'')$$

pentru toate punctele lui D_m care satisfac neegalitatea

$$G(y) - G(y_0) > 0.$$

2. — *Ecuația adjunctă ecuației* $E(u) = 0$. Dacă notăm cu $\mathcal{E}^*(u)$ ecuația adjunctă ecuației (1), expresia ei este dată de

$$\mathcal{E}^*(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + Y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \dots + Y_m \frac{\partial u}{\partial y_m} + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial Y_m}{\partial y_m}\right) u = 0 \qquad (7)$$

încît dacă impunem funcțiilor Y_k, derivabile, condiția

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial Y_m}{\partial y_m} = 0 \qquad (2)$$

atunci ecuația adjunctă pe care o notăm cu $\mathcal{E}(u)$, are forma

$$\mathcal{E}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + Y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + \dots + Y_m \frac{\partial u}{\partial y_m} = 0 \qquad (8)$$

și se obține din $E(u)$ numai schimbînd semnul derivatelor parțiale de ordinul întîi.

Se vede imediat că în această situație soluția elementară, înmulțită cu factorul constant $\frac{1}{A}$,

$$u(x, y; x_0, y_0) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} [G(y) - G(y_0)]^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right] \qquad (9)$$

este soluție a ecuației $E(u) = 0$, în variabilele x, y, și este în același timp soluție a ecuației $\mathcal{E}(u) = 0$ în variabilele (x_0, y_0). Se înțelege acum motivul

*) p. 151.

pentru care vom considera în cele ce urmează numai ecuația (1) plus condiția (2).

Se verifică imediat că avem pentru u și v două funcții oarecare, derivabile de două ori,

$$vE(u) - u\mathfrak{E}(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_j}(Y_j\, uv). \tag{10}$$

Dacă Ω_n și ω_m sînt două domenii oarecare, în spațiul cu n dimensiuni $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și m dimensiuni $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ respectiv, mărginite de suprafețele $F\Omega_n$ și $F\omega_m$, care îndeplinesc condițiile de aplicabilitate ale formulelor stokiene, iar

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$
$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \ldots \mathrm{d}y_m$$

atunci avem

$$\int_{\omega_m} \mathrm{d}\omega \int_{\Omega_n} [vE(u) - u\mathfrak{E}(v)]\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\omega_m} \mathrm{d}\omega \int_{\Omega_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\Omega -$$
$$- \int_{\Omega_n} \mathrm{d}\Omega \int_{\omega_m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y_j}(Y_j\, uv)\,\mathrm{d}\omega \tag{11}$$

și dacă notăm cu $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ cosinușii directori ai normalei exterioare la suprafața $F\Omega_n$ și cu $\beta_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ cosinușii directori ai normalei exterioare la suprafața $F\omega_m$, atunci putem scrie

$$\int_{\omega_m} \mathrm{d}\omega \int_{\Omega_n} [vE(u) - u\mathfrak{E}(v)]\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\omega_m} \mathrm{d}\omega \int_{F\Omega_n} \sum_{i=1}^{n} \left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} -\right.$$
$$\left. - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\alpha_i\,\mathrm{d}[F\Omega_n] - \int_{\Omega_n} \mathrm{d}\Omega \int_{F\omega_m} uv\left(\sum_{j=1}^{m} Y_j\,\beta_j\right)\mathrm{d}[F\omega_m]. \tag{12}$$

Formulele astfel obținute ne vor permite să rezolvăm problema lui Cauchy pentru ecuația (1).

3. — *Soluțiile analitice ale ecuației* $E(u) = 0$. Să ne ocupăm acum de soluțiile analitice ale ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Y_1\frac{\partial u}{\partial y_1} + Y_2\frac{\partial u}{\partial y_2} + \ldots + Y_m\frac{\partial u}{\partial y_m} \tag{13}$$

și anume să găsim soluția $u(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ care satisface următoarele condiții inițiale

$$u(x_0, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \varphi(y)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x = x_0} = \psi(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \psi(y). \tag{14}$$

Dacă punem

$$u = A_0 + \frac{x - x_0}{1!} A_1 + \frac{(x - x_0)}{2!} A_2 + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} A_n + \ldots$$

cu

$$A_k = A_k(y_1, y_2, \ldots, y_m) = A_k(y) \tag{15}$$

condițiile (14) conduc imediat la determinarea primelor două componente

$$A_0(y) = \varphi(y)$$
$$A_1(y) = \psi(y)$$

iar celelalte componente ale dezvoltării (15) sînt date de

$$A_{2n}(y) = Y_1 \frac{\partial^n \varphi}{\partial y_1^n} + Y_2 \frac{\partial^n \varphi}{\partial y_2^n} + \ldots + Y_m \frac{\partial^n \varphi}{\partial y_m^n}$$

$$A_{2n+1}(y) = Y_1 \frac{\partial^n \psi}{\partial y_1^n} + Y_2 \frac{\partial^n \psi}{\partial y_2^n} + \ldots + Y_m \frac{\partial^n \psi}{\partial y_m^n}$$

încît soluția căutată are forma finală

$$u(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \varphi + \frac{x - x_0}{1!} \psi +$$

$$+ Y_1 \left[\frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \ldots + \frac{(x - x_0)^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y_1^n} + \right.$$

$$\left. \frac{(x - x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{\partial^n \psi}{\partial y_1^n} + \ldots \right] +$$

. . . . . .

$$+ Y_m \left[\frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \frac{\partial \psi}{\partial y_m} + \ldots + \frac{(x - x_0)^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{\partial^n \varphi}{\partial y_m^n} + \right.$$

$$\left. \frac{(x - x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{\partial^n \psi}{\partial y_m^n} + \ldots \right]. \tag{16}$$

Funcțiile φ și ψ presupune analitice, admit în jurul punctului $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ majorante de forma

$$\frac{M_1}{\left(1 - \frac{y_1 - y_1^0}{r_1}\right)\left(1 - \frac{y_2 - y_2^0}{r_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{y_m - y_m^0}{r_m}\right)}$$

și

$$\frac{M_2}{\left(1 - \frac{y_1 - y_1^0}{\rho_1}\right)\left(1 - \frac{y_2 - y_2^0}{\rho_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{y_m - y_m^0}{\rho_m}\right)}$$

respectiv, unde $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ este un sistem de cercuri de convergență asociate seriei multiple care reprezintă pe φ iar $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ un sistem de cercuri de convergență asociate seriei multiple care reprezintă pe ψ.

Putem lua

$$r_1 = \rho_1, \quad r_2 = \rho_2, \ldots, r_{m-1} = \rho_{m-1}$$

urmînd ca r_m și ρ_m să rezulte în așa fel încît

$$(r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}, r_m)$$
$$(r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}, \rho_m)$$

să fie două sisteme de cercuri de convergență asociate funcțiilor φ și ψ respectiv.

Dacă punem acum

$$R = \min\ (r_m, \rho_m)$$
$$M = \max\ (M_1, M_2)$$

putem lua ca majoranta comună pentru φ și ψ pe

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{y_1 - y_1^0}{r_1}\right)\left(1 - \frac{y_2 - y_2^0}{r_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{y_{m-1} - y_{m-1}^0}{r_{m-1}}\right)\left(1 - \frac{y_m - y_m^0}{R}\right)}$$

și se observă că dacă avem simultan

$$| y_i - y_i^0 | > r_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1$$
$$| y_m - y_m^0 | > R$$

cel puțin una din seriile care reprezintă pe φ sau ψ este divergentă.

Se vede imediat că sistemul $(r_1, \ldots, r_{m-1}, R)$ nu este unic ci trebuie considerat ca un sistem de cercuri de convergență simultană, asociat celor două funcții φ și ψ. Funcțiile Y_i sînt presupuse analitice într-un domeniu care conține domeniul definit de

$$| y_i - y_i^0 | < r_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{17}$$
$$| y_m - y_m^0 | < R$$

deci mărginite în domeniul definit de (17). Din dezvoltarea (16) rezultă că o majorantă a coeficientului lui $\frac{(x - x_0)^n}{(2n)!}$ sau $\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(2n+1)!}$ este dată de

$$\sum_{k=1}^{m} | Y_k | \left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial y_k^n} \right|, \ \sum_{k=1}^{m} | Y_k | \cdot \left| \frac{\partial^n \psi}{y_k^n} \right| \leqslant A.M.n! \left[\frac{1}{r_1^n} + \frac{1}{r_2^n} + \ldots + \frac{1}{r_{m-1}^n} + \frac{1}{R^n} \right] \tag{18}$$

unde A este o majorantă a funcțiilor Y_i.

Termenul din partea a doua din (18), este majorat de

$$n\,!\cdot\frac{B}{r^n} \tag{18'}$$

B o constantă convenabil aleasă iar $r = \min(r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}, R)$.

Urmînd acum un raționament clasic rezultă că $u(x, y_1, \ldots, y_m)$ considerat ca funcție de x, admite pentru orice x o majorantă de forma

$$\alpha(1 + x)\, e^{kx^2}$$

α și k numere pozitive, k fiind supus la condiția

$$4\,k\,r > 1. \tag{19}$$

În același timp $u(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ considerat ca funcție de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ în domeniul definit de

$$|\,y_k - y_k^0\,| < r, \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{20}$$

este o funcție mărginită.

Reciproca este de asemenea adevărată.

4. — Problema lui Cauchy. Rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuația (1) nu întîmpină dificultăți dacă numărul variabilelor x_i este oarecare, în schimb apar dificultăți *geometrice* pe măsură ce numărul variabilelor y_i crește.

Din acest motiv vom da mai întîi o rezolvare completă și detailată pentru ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(y, z)\frac{\partial u}{\partial y} - Q(y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{21}$$

cu condiția

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0. \tag{21'}$$

Și anume vom arăta că dacă condițiile următoare sînt îndeplinite

a) Funcțiile $P(y, z)$, $Q(y, z)$ sînt mărginite într-o vecinătate (D) a punctului η, ζ

$$(D) \qquad \begin{aligned} |\,y - \eta\,| &< r \\ |\,z - \zeta\,| &< r \end{aligned}$$

și nenule în punctul η, ζ

$$P(\eta, \zeta) \neq 0, \quad Q(\eta, \zeta) \neq 0.$$

b) Soluția ecuației diferențiale

$$\frac{dz}{dy}\,P(y, z) - Q(y, z) = 0 \tag{22}$$

care trece prin punctul (η, ζ), taie axa oz într-un punct $\alpha(\eta, \zeta)$ în așa fel încît arcul cuprins între aceste două puncte să fie în întregime în (D).

c) În domeniul $D' \subset D$, funcția continuă $w = G(\eta, \zeta) - G(y, z)$, soluție a ecuației diferențiale

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} P(\eta, \zeta) + \frac{\partial w}{\partial \zeta} Q(\eta, \zeta) = 1 \tag{23}$$

verifică inegalitatea

$$G(\eta, \zeta) - G(y, z) > 0, \quad (y, z) \in D'$$

și pentru $z = \zeta$ se reduce la $\eta - y$.
Atunci există o soluție a ecuației (21) cu condiția (21') care să satisfacă condiției inițiale

$$u(x, y, z)|_{y=0} = \varphi(x, z) \tag{24}$$

funcția $\varphi(x, z)$ fiind mărginită în (D) în raport cu variabila z, iar în raport cu x, verificînd pentru orice x neegalitatea

$$|\varphi(x, z)| < Me^{kx^2} \tag{25}$$

pentru $k < \frac{1}{4r}$, soluție dată de

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{Q(\eta, \zeta)} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} P(0, z)\, \varphi(x, z)\, [G(\eta, \zeta) - G(0, z)]^{-\frac{1}{2}} \right.$$
$$\left. \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(\xi - x)^2}{G(\eta, \zeta) - G(0, z)} \right] dx \right]_{z=\alpha} \tag{26}$$

pentru punctele η, ζ, pentru care avem

$$0 < G(\eta, \zeta) - G(y, z) < \frac{1}{4k}.$$

Demonstrație. Pentru stabilirea soluției (26) vom pleca de la formula (11) care în cazul nostru se scrie

$$-\iint_D [vE(u) - u\mathfrak{E}(v)]\, dydz + \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dydz =$$
$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial y} (Puv) + \frac{\partial}{\partial z} (Quv) \right] dydz \tag{27}$$

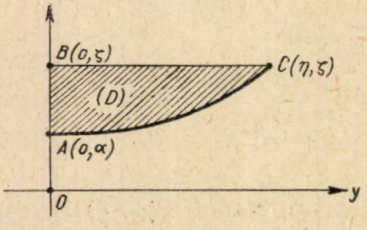


Fig. 1

întins la domeniul (D) (fig. 1) unde CA este arcul de curbă, definit de ecuația diferențială,

$$P(y, z) \frac{dz}{dy} - Q(y, z) = 0$$

și care trece prin punctul (η, ζ).

În (27) v este soluția elementară

$$v = v(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [G(\eta, \zeta) - G(y, z)]^{-\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(\xi - x)^2}{G(\eta, \zeta) - G(y, z)}\right]$$

deci

$$\mathcal{E}(v) = 0.$$

Presupunem că u este o soluție a ecuației $E = 0$, deci $E(u) = 0$. Ne mai rămîne

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}\right) dydz = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial y}(Puv) + \frac{\partial}{\partial z}(Quv)\right] dydz. \quad (28)$$

Ne vom ocupa de integrala din partea a doua, pe care o notăm cu $\mathcal{J}$. Calculul integralei $\mathcal{J}$ întinsă la domeniul (D) ne dă

$$\mathcal{J} = \int_0^\eta dy \int_{z(y)}^{\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial y}(Puv) + \frac{\partial}{\partial z}(Quv)\right] dz$$

sau

$$\mathcal{J} = \int_0^\eta Quv \Big|_{z(y)}^{\zeta} dy + \int_\alpha^\zeta Puv \Big|_0^{y(z)} dz \quad (29)$$

unde $y(z)$ este explicitarea lui y din $z = z(y)$, soluția ecuației (22), ce trece prin punctul (η, ζ).

Se vede imediat că (26) se scrie

$$\mathcal{J} = \int_0^\eta Quv \Big|_{z=\zeta} dy - \int_\alpha^\zeta P.u.v \Big|_{y=0} dz + \int_{\overset{\frown}{AC}} uv(P\,dz - Q\,dy).$$

Ultima integrală este nulă în virtutea relației (22) deoarece este integrala curbilinie de-a lungul unei curbe pe care paranteza este identic nulă. Ne mai rămîne deci, ținînd seamă că

$$u(x, y, z)|_{y=0} = \varphi(x, z)$$

și de faptul că soluția $G(\eta, \zeta) - G(y, z)$ se reduce la $\eta - y$ pentru $u = \zeta$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\eta Q(y, \zeta)\, u(x, y, \zeta) \frac{1}{\sqrt{\eta - y}} \exp\left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{(\xi - x)^2}{\eta - y}\right) dy -$$

$$- \int_{\alpha(\eta, \zeta)}^{\zeta} P(0, z)\, v(x, 0, z; \xi, \eta, \zeta) \varphi(x, z)\, dz. \quad (30)$$

Să introducem expresia lui $\mathcal{J}$ în (28) și să integrăm în raport cu x de la $-\infty$ la $+\infty$. Se observă că integrala din partea întîi din (20) la limită este nulă, din cauza condițiilor (25), încît obținem egalitatea

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\eta} Q(y, \zeta)\, u(x, y, \zeta) \cdot \frac{1}{\sqrt{\eta - y}} \exp\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{(\xi - x)^2}{\eta - y)}\right] dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{\alpha(\eta, \zeta)}^{\zeta} P(0, z)\, v(x, 0, z; \xi, \eta, \zeta)\, \varphi(x, z)\, dz. \qquad (30')$$

Dacă inversăm ordinea de integrare în primul termen, și ținem seamă de rezultate cunoscute, urmează că primul termen se reduce la

$$\int_0^{\eta} Q(y, \zeta)\, u(\xi, y, \zeta)\, dy \qquad (31)$$

în timp ce în al doilea termen, inversînd de asemenea ordinea de integrare avem

$$\int_{\alpha(\eta, \zeta)}^{\zeta} dz \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, z)\, v(x, 0, z; \xi, \eta, \zeta)\, \varphi(x, z)\, dx. \qquad (32)$$

În relația (30'), asupra lui v este făcută ipoteza că

$$\mathcal{E}(v) = 0.$$

Dacă înlocuim pe v cu $\frac{\partial v}{\partial \eta}$, această proprietate se menține, deci putem scrie și egalitatea

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\eta} Q(y, \zeta)\, u(x, y, \zeta) \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{1}{\sqrt{\eta - y}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{(\xi - x)^2}{\eta - y}\right)\right] dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{\alpha(\eta, \zeta)}^{\zeta} P(0, z) \left.\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\nu = 0} \varphi(x, z)\, dz. \qquad (30'')$$

Să derivăm acum în (30') în raport cu η, după ce am inversat ordinea de integrare și să ținem seamă de (30''), (31) și (32). Avem imediat

$$Q(\eta, \zeta)\, u(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\partial \alpha(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, 0\, \alpha; \xi, \eta, \zeta)\, \varphi(x, \alpha)\, dx \qquad (33)$$

și cum prin ipoteză $Q(\eta, \zeta) \neq 0$, urmează că (33) ne dă explicit soluția $u(\xi, \eta, \zeta)$ căutată.

Verificarea soluției găsite. La început am presupus că soluția $u(\xi, \eta, \zeta)$ există și îndeplinește condițiile cerute. Trebuie să verificăm pe (33) acest fapt.

Avem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{Q(\eta, \zeta)} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha) \frac{\partial^2 v(x, 0, \alpha; \xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi^2} \varphi(x, \alpha)\, dx \qquad (34)$$

și

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{Q^2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\int_{-\infty}^{+\infty} P(0,\alpha)\, v(x,0,\alpha;\xi,\eta,\zeta)\,\varphi(x,\alpha)\,dx -$$

$$-\frac{1}{Q}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\eta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} P(0,\alpha)\, v(x,0,\alpha;\xi,\eta,\zeta)\,\varphi(x,\alpha)\,dx -$$

$$-\frac{1}{Q}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial P}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\, v(x,0,\alpha;\xi,\eta,\zeta)\,\varphi(x,\alpha)\,dx - \qquad (35)$$

$$-\frac{1}{Q}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\int_{-\infty}^{+\infty} P(0,\alpha)\left[\frac{\partial v}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\right]\varphi(x,\alpha)\,dx -$$

$$-\frac{1}{Q}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\int_{-\infty}^{+\infty} P(0,\alpha)\, v(x,0,\alpha;\xi,\eta,\zeta)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\,dx.$$

Dacă introducem aceste derivate în $E(u)$, obținem, grupîndu-le convenabil, și ținînd seama că derivarea este făcută în raport cu ξ, η, ζ,

$$E(u) = \left(-\frac{P}{Q^2}\frac{\partial Q}{\partial\eta}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}+\frac{P}{Q}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\eta^2}-\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial\zeta}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\eta\partial\zeta}\right)\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} P(0,\alpha)\, v(x,0,\alpha;\xi,\eta,\zeta)\,\varphi(x,\alpha)\,dx +$$

$$+\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\left(\frac{P}{Q}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}+\frac{\partial\alpha}{\partial\zeta}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial P(0,\alpha)}{\partial\alpha}\, v(x,0,\alpha;\xi,\eta,\zeta)\,\varphi(x,\alpha)\,dx +$$

$$+\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\left(\frac{P}{Q}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}+\frac{\partial\alpha}{\partial\zeta}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} P(0,\alpha)\frac{\partial v}{\partial\alpha}\,\varphi(x,\alpha)\,dx + \qquad (36)$$

$$+\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\left(\frac{P}{Q}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}+\frac{\partial\alpha}{\partial\zeta}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} P(0,\alpha)\, v(x,0,\alpha;\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,dx -$$

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\int_{-\infty}^{+\infty} P(0,\alpha)\,\varphi(x,\alpha)\,E(v)\,dx.$$

Să arătăm acum că toți termenii din partea a doua sînt nuli. În adevăr dacă

$$z = f(y, C)$$

este integrala generală a ecuației

$$P(y,z)\frac{dz}{dy} - Q(y,z) = 0$$

integrala care se mai poate scrie

$$h(y,z) = C$$

și care prin ipoteză trebuie să treacă prin punctul (η, ζ), urmează că constanta C este dată de

$$h(\eta, \zeta) = C \tag{37}$$

deci

$$z = f[y, h(\eta, \zeta)]$$

și

$$\alpha = f[0, h(\eta, \zeta)]. \tag{38}$$

Avem prin urmare din (38)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = \frac{df}{dh} \cdot \frac{\partial h}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} = \frac{df}{dh} \cdot \frac{\partial h}{\partial \zeta}$$

de unde rezultă

$$\frac{P(\eta, \xi)}{Q(\eta, \zeta)} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} = \frac{df}{dh} \left[\frac{P}{Q} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right]. \tag{39}$$

Însă din (37) avem

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = -\frac{\partial h}{\partial \eta} : \frac{\partial h}{\partial \zeta}$$

și (39) se scrie

$$\frac{1}{Q} \cdot \frac{df}{dh} \cdot \frac{\partial h}{\partial \zeta} \left[P(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{d\eta} - Q(\eta, \zeta) \right]$$

și cum paranteza este nulă, urmează că termenul al doilea, al treilea și al patrulea din (36) este nul.

Să derivăm acum expresia

$$\frac{P(\eta, \zeta)}{Q(\eta, \zeta)} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} = 0$$

în raport cu η, expresie care am arătat că este identic nulă. Avem

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{Q} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} - \frac{P}{Q^2} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{P}{Q} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta \partial \zeta} = 0 \tag{40}$$

și dacă ținem seama de legătura (21′) între P și Q

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = 0$$

putem scrie pe (40) astfel

$$-\frac{P}{Q^2} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{P}{Q} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} - \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta \partial \zeta} = 0$$

și se vede că și primul termen al egalității (36) este nul.

Cît privește ultimul termen al lui (36) este evident identic nul deoarece

$$v(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$$

este soluție a ecuației $\mathcal{E} = 0$ în variabilele x, y, z și este soluție în același timp a ecuației $E = 0$ în variabilele ξ, η, ζ.

Soluția (33) *îndeplinește condiția inițială dată.*

Pentru aceasta să observăm că

$$\lim_{\eta \to 0} \alpha = \zeta$$

cum se vede din figura 1. Prin urmare

$$-\lim_{\eta \to 0} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{P(0, \alpha)}{Q(\eta, \zeta)} = \lim_{\eta \to 0} \left(+ \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} \right) = 1$$

încît avem

$$\lim_{\eta \to 0} u(\xi, \eta, \zeta) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, \zeta) \frac{1}{\sqrt{\eta}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(\xi - x)^2}{\eta} \right] dx = \varphi(\xi, \zeta)$$

conform unui rezultat binecunoscut de la ecuația căldurii.

Un exemplu. Fie ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + z \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

și să căutăm soluția care pentru $y = 0$ se reduce la $\varphi(x, z) \equiv x + z^2$. Se vede imediat că condiția

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (P = -z, \ Q = y)$$

este satisfăcută.

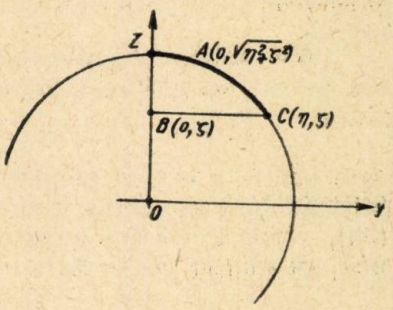


Fig. 2

Curba $\widehat{AC}$ are ecuația diferențială

$$z \frac{dz}{dy} + y = 0$$

cu integrala generală

$$y^2 + z^2 = c^2$$

încît soluția care trece prin punctul $C(\eta, \zeta)$ este cercul $y^2 + z^2 = \eta^2 + \zeta^2$ iar $\alpha = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$.

Fie $G(\eta, \zeta) - G(y, z)$ integrala ecuației

$$-z \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 1,$$

care, pentru $z = \zeta$ se reduce la $\eta - y$, a cărei expresie nu este nevoie s-o explicităm după cum se va vedea imediat. Avem

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}} \cdot$$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x + z^2) \cdot z \, [G(\eta, \zeta) - G(y, 0)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{(\xi - x)^2}{G(\eta, \zeta) - G(y, 0)}\right) dx\right],$$

$$z = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$$

deci

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \xi + \xi + \eta^2 + \zeta^2}{[G(\eta, \zeta) - G(y, 0)]^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{(\xi - x)^2}{G(\eta, \zeta) - G(y, 0)}\right) dx$$

și cum

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \xi}{[G(\eta, \zeta) - G(y, 0)]^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{(\xi - x)^2}{G(\eta, \zeta) - G(y, 0)}\right) dx = 0$$

iar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[G(\eta, \zeta) - G(y, 0)]^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{(\xi - x)^2}{G(\eta, \zeta) - G(y, 0)}\right) dx = 2\sqrt{\pi}$$

rezultă că soluția căutată este

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \xi + \eta^2 + \zeta^2$$

și se vede cu ușurință că verifică atît ecuația dată cît și condiția inițială cerută.

Observație. Pe parcursul demonstrației formulei fundamentale (33) s-a folosit soluția particulară

$$v = G(\eta, \zeta) - G(y, z)$$

care pentru $z = \zeta$ se reduce la $v = \eta - y$. Nimic nu ne îndreptățește să afirmăm însă că soluția găsită, în condițiile de valabilitate ale formulei (33), verifică ecuația adjunctă în variabilele η, ζ, sau, ceea ce este tot una, că soluția particulară v satisface ecuația

$$P(\eta, \zeta) \frac{\partial v}{\partial \eta} + Q(\eta, \zeta) \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -1.$$

Să verificăm în cazul exemplului nostru.

Două integrale prime ale ecuației date sînt

$$x^2 + y^2 = c_1^2$$

$$u - \operatorname{Arc\,tg} \frac{z}{y} = c_2$$

și punînd condiția inițială dată obținem soluția particulară

$$u(\eta, \zeta) = \operatorname{Arc\,tg} \frac{z}{y} - \operatorname{Arctg} \frac{\zeta}{\sqrt{y^2 + z^2 - \zeta^2}} + \eta - \sqrt{y^2 + z^2 - \zeta^2}.$$

Avem însă

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 1\,; \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{-1 + \zeta}{\sqrt{y^2 + z^2 - \zeta^2}}$$

și înlocuind avem

$$-\zeta + \eta \left[\frac{-1 + \zeta}{\sqrt{y^2 + z^2 - \zeta^2}} \right] = -1$$

sau

$$\eta = \sqrt{y^2 + z^2 - \zeta^2}$$

însă punctul η, ζ se găsește pe cercul $y^2 + z^2 = \eta^2 + \zeta^2$, deci $u(\eta, \zeta)$ verifică ecuația

$$-\zeta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -1.$$

Acest fapt este general. În adevăr, două integrale prime ale ecuației

$$P(y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + Q(y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

sînt

$$\varphi(y, z) = C_1$$
$$u - \psi(y, z) = C_2$$

unde

$$\left.\begin{aligned} P \frac{\partial \varphi}{\partial y} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\ \text{și} \qquad P \frac{\partial \psi}{\partial y} + Q \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Soluția care pentru $z = \zeta$ se reduce la $u = \eta - y$, este

$$u = \eta - \theta[\varphi(y, z), \zeta] + \psi(y, z) - \psi[\theta(\varphi(y, z), \zeta), \zeta] \qquad (\delta)$$

și unde funcția $\theta(C_1, \zeta)$ rezultă din

$$\varphi(y, \zeta) = C_1$$

prin explicitare

$$y = \theta(C_1, \zeta)$$

care *conduce nemijlocit la* $y = \eta$ dacă $C_1 = \varphi(\eta, \zeta)$.

Să punem acum condiția ca (δ) să verifice ecuația

$$P(\eta, \zeta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + Q(\eta, \zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -1.$$

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}.$$

Condițiile impuse conduc la

$$\theta[\varphi(y, z), \zeta] = \theta[\varphi(\eta, \zeta), \zeta] = \eta$$

deci

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta}}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$$

și ecuația se scrie

$$P(\eta, \zeta) + Q(\eta, \zeta)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right] = -1$$

sau

$$\left[P(\eta, \zeta)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + Q(\eta, \zeta)\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right] : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - Q(\eta, \zeta) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{P(\eta, \zeta)}{Q(\eta, \zeta)} -$$

$$- Q(\eta, \zeta)\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = -1. \qquad (\varepsilon)$$

Din cauza lui (γ) expresia (ε) este nulă.

5. — *Problema lui Cauchy* pentru ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(y, z, t)\frac{\partial u}{\partial y} - Q(y, z, t)\frac{\partial u}{\partial z} - R(y, z, t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (41)$$

cu legătura

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

se rezolvă în modul următor.

Fie

$$\lim_{y \to 0} u(x, y, z, t) = \varphi(x, z, t).$$

Funcțiile P, Q, R, φ satisfac condiții analoge cazului tratat anterior. Plecăm de la relația integrală

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \iiint_D [v\,E(u) - u\,\mathcal{E}(v)]\,dy\,dz\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \iiint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dy\,dz\,dt -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dx \iint_{FD} uv(Pa + Qb + Rc)\,d\sigma \tag{42}$$

unde

$$v = v(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta, \tau) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,[G(x, y, z, t) - G(\xi, \eta, \zeta, \tau)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\,\frac{(\xi - x)^2}{G(x, y, z, t) - G(\xi, \eta, \zeta, \tau)}\right)$$

iar u o soluție a ecuației $E(u) = 0$. În baza unui raționament asemănător, termenul din partea întîi și primul termen din partea a doua este nul. Prin urmare trebuie să ne ocupăm numai de integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \iint_{(FD)} uv(Pa + Qb + Rc)\,d\sigma = 0 \tag{43}$$

întinsă la frontiera domeniului (D), (FD) din figura 3,

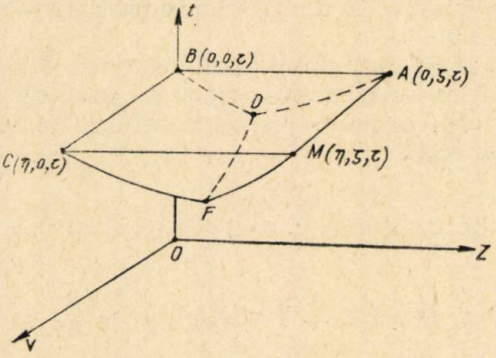


Fig. 3

definit într-un mod ce-l vom preciza în curînd.

Neținînd seama pentru moment de operația de integrare în raport cu x, avem în (43), luînd ca normala la (FD), normala exterioară,

$$\begin{aligned} I = &\iint_{ABCD} Ruv\Big|_{t=\tau} dy\,dz - \iint_{ABD} Puv\Big|_{y=0} dz\,dt + \\ &+ \iint_{MCF} \frac{uv}{\sqrt{\Phi_{1y}'^2 + \Phi_{1z}'^2 + \Phi_{1t}'^2}}\,(P\Phi_{1y}' + Q\Phi_{1z}' + R\Phi_{1t}')\,d\sigma + \\ &+ \iint_{AMFD} \frac{uv}{\sqrt{\Phi_{2y}'^2 + \Phi_{2z}'^2 + \Phi_{2t}'^2}}\,(P\Phi_{1y}' + Q\Phi_{2z}' + R\Phi_{2t}')\,d\sigma + \\ &+ \iint_{BCFD} \frac{uv}{\sqrt{\Phi_{3y}'^2 + \Phi_{3z}'^2 + \Phi_{3t}'^2}}\,(P\Phi_{3y}' + Q\Phi_{3z}' + R\Phi_{3t}')\,d\sigma. \end{aligned} \tag{44}$$

Alegem acum suprafața MCF, definită de relația

$$\Phi_1(y, z, t) = 0$$

soluție a ecuației cu derivate parțiale

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial y} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial z} + R\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{45}$$

și care trece prin dreapta $t = \tau$, $y = \eta$.

Suprafața $AMFD$ va fi definită de relația

$$\Phi_2(y, z, t) = 0.$$

cu Φ_2 soluție a ecuației cu derivate parțiale (45), însă trecînd prin dreapta $t = \tau$, $z = \zeta$.

În fine, suprafața $BCFD$ va fi definită de relația

$$\Phi_3(y, z, t) = 0$$

cu Φ_3 soluție a aceleiași ecuații cu derivate parțiale (45), însă trecînd prin dreapta $t = \tau$, $z = 0$.

Se vede că astfel suprafețele sînt complet definite și depind de coeficienții P, Q, R ai ecuației date, cît și de punctul (η, ζ, τ).

Ne rămîne, prin urmare, pentru frontiera domeniului (D), următoarea relație integrală

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\eta} dy \int_0^{\zeta} R(y, z, \tau)\, u(x, y, z, \tau)\, v(x, y, z, \tau;\ \xi, \eta, \zeta, \tau)\, dy\, dz = \tag{46}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \iint_{ABD} P(0, z, t)\ \varphi(x, z, t)\ v(x, 0, z, t;\ \xi, \eta, \zeta, \tau)\, dz\, dt,$$

relație care este valabilă dacă înlocuim pe v cu $\frac{\partial v}{\partial \eta}$, fapt ce va fi folosit imediat. Relația (46) obținută, cu observația făcută, ne permite să obținem imediat pe $u(\xi, \eta, \zeta, \tau)$. Trebuie însă să facem o precizare privitor la domeniul plan ABD. Este de la sine înțeles că putem avea două cazuri și anume cazul fig. 3, căreia îi corespunde domeniul plan dat de figura 4 însă putem avea și situația mai complexă și se vede că situația din (fig. 5) se reduce la cea din (fig. 4) cînd $D=F$. Vom rezolva așadar problema pentru cazul din figura 5′, fiind mai general.

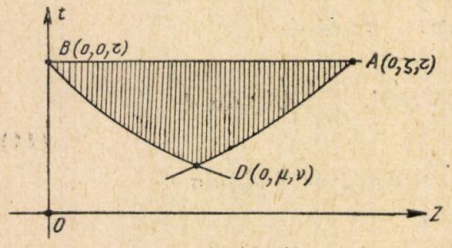


Fig. 4

Dacă $\Phi_1(y, z, t) = 0$ este ecuația suprafeței ce trece prin dreapta MC, ecuație, care explicitată în raport cu t, se scrie

$$t = \psi_1(y, z)$$

atunci ecuația arcului DF este

$$(DF) \qquad t = \psi_1(0, z).$$

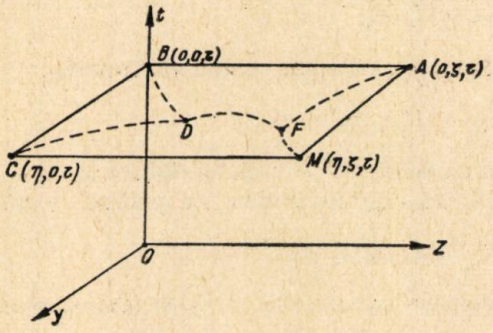


Fig. 5

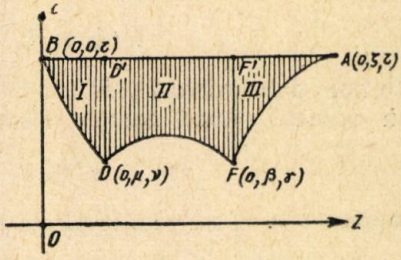


Fig. 5'

Dacă $\Phi_2(y, z, t) = 0$ este ecuația suprafeței ce trece prin dreapta AM ecuație care explicitată în raport cu t, se scrie

$$t = \psi_2(y, z)$$

atunci ecuația arcului AF este dată de

$$(AF) \qquad t = \psi_2(0, z).$$

În fine dacă $\Phi_3(y, z, t) = 0$ este ecuația suprafeței ce trece prin dreapta BC, ecuație care explicitată în raport cu t este

$$t = \psi_3(y, z)$$

atunci ecuația arcului BD are forma

$$(BD) \qquad t = \psi_3(0, z).$$

Punctul D se obține rezolvînd sistemul

$$t = \psi_1(0, z)$$
$$t = \psi_3(0, z)$$

deci

$$(D) \qquad \mu = \mu(\eta, \tau)$$
$$\nu = \nu(\eta, \tau).$$

Punctul F se obține rezolvînd sistemul

$$t = \psi_2(0, z)$$
$$t = \psi_3(0, z)$$

deci

$$(F) \qquad \beta = \beta(\zeta, \tau)$$
$$\gamma = \gamma(\zeta, \tau).$$

Să revenim acum la relația (46), și să ținem seamă că funcția

$$G(\xi, \eta, \zeta, \tau) - G(x, y, z, t)$$

este unic determinată prin condiția ca pentru $t = \tau$ să se reducă la $\eta - y$. Din această cauză soluția elementară, ce intervine în primul termen

$$v(x, y, z, \tau; \xi, \eta, \zeta, \tau)$$

deoarece $t = \tau$, nu mai depinde decît de variabilele, ξ, η, și ținînd seamă că (46) rămîne adevărat dacă înlocuim pe v cu $\frac{\partial v}{\partial \eta}$, avem tot din (46) prin derivare în raport cu η

$$\int_0^{\zeta} R(\eta, z, \tau)\, u(\xi, \eta, z, \tau)\, dz = \frac{\partial^*}{\partial \eta} A \qquad (47)$$

unde am notat A, termenul din partea a doua a lui (46), iar prin

$$\frac{\partial^*}{\partial \eta}$$

operația de derivare în raport cu η în A, *numai* pentru limitele de integrare. Dacă mai derivăm o dată în raport cu ζ, în (47), obținem dacă $R(\eta, \zeta, \tau) \neq 0$

$$R(\eta, \zeta, \tau)\, u(\xi, \eta, \zeta, \tau) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial^*}{\partial \eta} \int_0^{\mu(\eta, \tau)} dz \int_{\psi_3(0, z)}^{\tau} dt \int_{-\infty}^{+\infty} R(0, z, t)\, \varphi(x, z, t)\, v(x, 0, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau)\, dx +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial^*}{\partial \eta} \int_{\mu(\eta, \tau)}^{\beta(\zeta, \tau)} dz \int_{\psi_1(0, z)}^{\tau} dt \int_{-\infty}^{+\infty} R(0, z, t)\, \varphi(x, z, t)\, v(x, 0, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau)\, dx \qquad (47')$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial^*}{\partial \eta} \int_{\beta(\zeta, \tau)}^{\zeta} dz \int_{\psi_2(0, z)}^{\tau} dt \int_{-\infty}^{+\infty} R(0, z, t)\, \varphi(x, z, t)\, v(x, 0, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau)\, dx.$$

Faptul că rezultatul (47') verifică ecuația (41) cît și condiția inițială impusă, se arată în mod asemănător.

6. — *Probleme la limită. Problema 1°.* Ne propunem să rezolvăm pentru ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(y, z)\frac{\partial u}{\partial y} - Q(y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{48}$$

următoarea problemă :

Să se determine funcția $u(x, y, z)$ în paralelipipedul $OABCDEFG$,

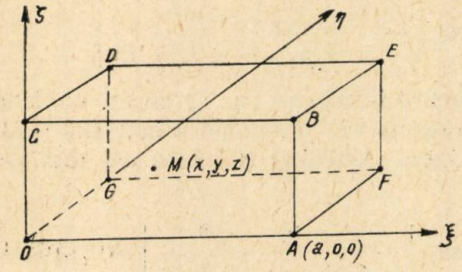


Fig. 6

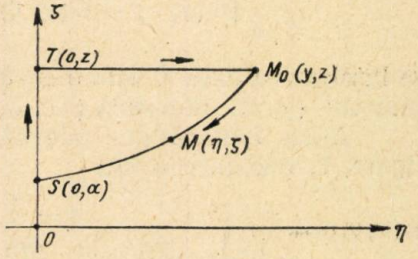


Fig. 7

nulă pe fața $OABC$ ($\eta = 0$) și luînd valori date pe fețele $ABEF$ ($\xi = a$) și $OCDG$ ($\xi = 0$) adică satisfăcînd condiția inițială

$$u(x, 0, z) = 0 \tag{49}$$

și condițiile la limită

$$\begin{aligned} u(0 +, y, z) &= \omega(y, z) \\ u(a - 0, y, z) &= \theta(y, z) \end{aligned} \tag{50}$$

cu ω și θ funcții continue, date.

În acest scop să considerăm integrala

$$w(x, y, z,) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C \frac{x - \xi}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(\xi - x)^2}{G(y, z) - G(\eta, \zeta)}\right] (Q(\eta, \zeta)\,d\eta - P(\eta, \zeta)\,d\zeta) \tag{51}$$

unde C este curba închisă (fig. 7)
arcul M_0S fiind o soluție a ecuației diferențiale

$$P(\eta, \zeta)\,d\zeta - Q(\eta, \zeta)\,d\eta = 0$$

ce trece prin $M_0(y, z)$.

Avem permanent

$$G(y, z) - G(\eta, \zeta) > 0$$

și în plus $G(y, z) - G(\eta, \zeta)$ fiind o soluție a ecuației

$$P(y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + Q(y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

cît și a ecuației

$$P(\eta, \zeta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + Q(\eta, \zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -1$$

și anume o soluție particulară care pentru $z = \zeta$ se reduce la $y - \eta$.

Deoarece sub semnul integralei (51) se află derivata în raport cu ξ a soluției elementare

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(\xi - x)^2}{G(y, z) - G(\eta, \zeta)}\right]$$

se înțelege că dacă C este o curbă oarecare în planul (η, ζ) ce nu conține punctul (y, z), integrala (51) este de asemenea o soluție a ecuației (48).

Acest fapt rămîne adevărat și dacă conturul (C) este cel dat de figura 7, deoarece avem

$$w(x,y,z) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\alpha(y,z)}^{z} \frac{x - \xi}{[G(y,z) - G(0,\zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(\xi - x)^2}{G(y,z) - G(0,\zeta)}\right] P(0,\zeta)\,d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{x - \xi}{(y - \eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(\xi - x)^2}{y - \eta}\right] Q(\eta, z)\,d\eta. \qquad (52)$$

Prima integrală din partea a doua nu prezintă discontinuități în intervalul de integrare, iar ultima conform unui rezultat cunoscut este uniform convergentă și se anulează pentru limita superioară. Rezultă de aici că $w(x,y,z)$ dată de (52) este soluție a ecuației (48) și în plus avem

$$\lim_{x \to \xi + 0} w(x, y, z) = Q(y, z)$$

$$\lim_{x \to \xi - 0} w(x, y, z) = -Q(y, z)$$

$$\lim_{y \to 0} w(x, y, z) = 0.$$

În ipoteza permanentă că $P(y, z) \neq 0$, $Q(y, z) \neq 0$, urmează că funcția

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_c \frac{(x - \xi)\,\varphi(\eta, \zeta)}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(\xi - x)^2}{G(y, z) - G(\eta, \zeta)}\right]$$

$$[P(\eta, \zeta)\,d\zeta - Q(\eta, \zeta)\,d\eta] \qquad (53)$$

unde (C) este conturul din fig. 7, este o soluție a ecuației (48) care satisface condițiile, inițială

$$u(x, 0, z) = 0$$

și la limite

$$\begin{aligned} u(\xi + 0, y, z) &= Q(y, z) \cdot \varphi(y, z) \\ u(\xi - 0, y, z) &= -Q(y, z) \cdot \varphi(y, z). \end{aligned} \qquad (54)$$

Soluția problemei propuse se obține căutînd funcția $u(x, y, z)$ de forma

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C \frac{(x-a)\,\varphi(\eta,\zeta)}{[G(y,z)-G(\eta,\zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(a-x)^2}{G(y,z)-G(\eta,\zeta)}\right] (P(\eta,\zeta)\,d\zeta - Q(\eta,\zeta)\,d\eta) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C \frac{x\cdot\psi(\eta,\zeta)}{[G(y,z)-G(\eta,\zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{x^2}{G(y,z)-G(\eta,\zeta)}\right] (P(\eta,\zeta)\,d\zeta - Q(\eta,\zeta)\,d\eta) \tag{55}$$

cu φ și ψ funcții continui, necunoscute.

Determinarea funcțiilor φ și ψ se face prin intermediul unui sistem de ecuații integrale ce se obține impunînd lui (55) condițiile la limită (50).

Dacă notăm cu M_0 punctul de coordonate (x, y) și M punctul de coordonate curente (η, ζ) și ținem seamă de (54) sîntem conduși la sistemul

$$\omega(M_0) = Q(M_0)\psi(M_0) + \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\int_C \frac{\varphi(M)}{[G(M_0)-G(M)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{a^2}{G(M_0)-G(M)}\right] d\sigma$$
$$\theta(M_0) = Q(M_0)\,\varphi(M_0) + \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\int_C \frac{\psi(M)}{[G(M_0)-G(M)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{a^2}{G(M_0)-G(M)}\right] d\sigma \tag{56}$$

unde am pus

$$d\sigma = P(\eta,\zeta)\,d\zeta - Q(\eta,\zeta)\,d\eta$$

notație justificată deoarece pe ST

$$d\sigma = P(M)\,ds$$

și pe TM_0

$$d\sigma = -Q(M)\,ds.$$

În ipotezele făcute, sistemul (56) are o soluție unică, care înlocuită în (55), determină pe $u(x, y,z)$. Cum fiecare din integralele ce intervin în (55) sînt nule cînd $y = 0$, deoarece în acest caz $\alpha(y,z) = z$, rezultă că $u(x, y, z)$ astfel determinat satisface și condiția inițială (49).

Problema 2°. În aceleași ipoteze din problema precedentă să determinăm funcția $u(x,y,z)$ soluție a ecuației (48) care să îndeplinească condiția inițială

$$u(x, 0, z) = 0 \tag{57}$$

și condițiile la limite

$$\lim_{x\to 0+} u(x, y, z) = \omega(y, z) \tag{58}$$

și

$$\lim_{x \to a-0} \frac{\partial u}{\partial x} = \theta(y, z).$$

Să căutăm pe $u(x, y, z)$ sub forma

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C \frac{x\,\varphi(x,\zeta)}{[G(y,z) - G(\eta,\zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{x^2}{G(y,z) - G(\eta,\zeta)}\right] [Q(\eta,\zeta)\,d\eta - P(\eta,\zeta)\,d\zeta] + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\psi(\eta,\zeta)}{[G(y,z) - G(\eta,\zeta)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(a-x)^2}{G(y,z) - G(\eta,\zeta)}\right] (Q(\eta,\zeta)\,d\eta - P(\eta,\zeta)\,d\zeta) \tag{59}$$

unde C este același contur din figura 7.

Prima condiție (58) dă

$$\omega(M_0) = \varphi(M_0)\,Q(M_0) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\psi(M_0)}{[G(M_0) - G(M)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{a^2}{G(M_0) - G(M)}\right] d\sigma. \tag{60}$$

Pentru a folosi condiția a doua trebuie să derivăm expresia (59) în raport cu x. În expresia astfel derivată dacă punem condiția a doua din (58), obținem

$$\theta(M_0) = \psi(M_0)\,Q(M_0) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\varphi(M)}{[G(M_0) - G(M)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{a^2}{G(M_0) - G(M)}\right] d\sigma - \frac{a^2}{8\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\varphi(M)}{[G(M_0) - G(M)]^{5/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{a^2}{G(M_0) - G(M)}\right] d\sigma \tag{61}$$

unde am pus $d\sigma = Q(\eta, \zeta)\,d\eta - P(\eta, \zeta)\,d\zeta$. Ecuațiile (60) și (61) formează un sistem de ecuații integrale care în condițiile impuse admite o soluție unică.

Condiția inițială este de asemenea satisfăcută în virtutea aceleiași observații făcute la problema precedentă.

Problema 3°. Fie (D) un paralelipiped cu bazele formate de două porțiuni de suprafață $A'B'C'D'$ și $A''B''C''D''$

$$\xi = f(\eta, \zeta), \quad \xi = g(\eta, \zeta), \quad g(\eta, \zeta) > f(\eta, \zeta) \tag{62}$$

cu fețele laterale plane paralele cu planele de coordonate figura 8.

Muchiile $C'C''$, $D'D''$, $A'A''$ și $B'B''$ sînt paralele cu axa $o\xi$, deci proiecțiile porțiunilor de suprafață $A'B'C'D'$ sau $A''B''C''D''$ pe planul $O\eta\zeta$ sînt dreptunghiul $ABCD$. Funcțiile $f(\eta, \zeta)$, și $g(\eta, \zeta)$ satisfac condițiile lui Lipschitz.

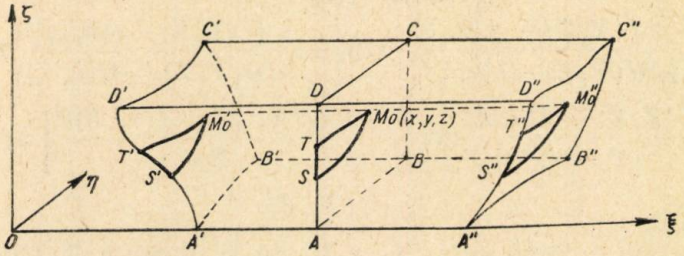


Fig. 8

Ne propunem să găsim soluția $u(x, y, z)$ a ecuației (48), care pentru

$$x = f(y, z)$$

să se reducă la o funcție dată

$$u(f(y, z), y, z) = \omega(y, z)$$

iar pentru

$$x = g(y, z)$$

să se reducă la altă funcție dată

$$u(g(y, z), y, z) = \theta(y, z)$$

cu ω și θ funcții continui, iar pentru $y = 0$ să avem

$$u(x, 0, z) = 0.$$

Să considerăm, în acest scop, integrala următoare

$$F(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C \frac{x - f(\eta, \zeta)}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{[x - f(\eta, \zeta)]^2}{G(y, z) - G(\eta, \zeta)}\right] [Q(\eta, \zeta)\, d\eta - P(\eta, \zeta)\, d\zeta] \tag{63}$$

unde C este curba închisă $M_0'S'F'$ ce se proiectează pe planul $\eta o \zeta$ după conturul figura 7, M_0STM_0. În aceleași ipoteze asupra lui G și arcului M_0S, avem

$$F(x, y, z) =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(y,z)}^{z} \frac{[x - f(0, \zeta)}{[G(y, z) - G(0, \zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(x - f(0, \zeta))^2}{G(y, z) - G(0, \zeta)}\right] P(0, \zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\nu} \frac{x - f(\eta, z)}{(y - \eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(x - f(\eta, z))^2}{y - \eta}\right] Q(\eta, z)\, d\eta \tag{64}$$

și la limita cînd punctul $M_0(x, y, z)$ tinde către punctul $M_0'(X, Y, Z)$ avem conform unui rezultat cunoscut [2]*) privind integrala a doua din partea a doua

$$\lim_{M_0 \to M_0'} F(x, y, z) =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(Y,Z)}^{Z} \frac{f(Y,Z) - f(0,\zeta)}{[G(Y,Z) - G(0,\zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{[f(Y,Z) - f(0,\zeta)]^2}{G(Y,Z) - G(0,\zeta)} \right] P(0,\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^Y \frac{f(Y,Z) - f(\eta,Z)}{(Y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(f(Y,Z) - f(\eta,Z))^2}{Y-\eta} \right] Q(\eta, Z)\, d\eta \pm$$

$$\pm Q(Y, Z) \tag{65}$$

luîndu-se + sau − după cum $M_0 \to M_0'$ de la dreapta la stînga sau de la stînga la dreapta.

Dacă considerăm acum integrala

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C \varphi(\eta, \zeta) \frac{x - f(\eta, \zeta)}{[G(y,z) - G(\eta,\zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{[x - f(\eta,\zeta)]^2}{G(y,z) - G(\eta,\zeta)} \right]$$

$$(Q(\eta, \zeta)\, d\eta - P(\eta, \zeta)\, d\zeta) \tag{66}$$

unde $\varphi(\eta, \zeta)$ este o funcție continuă, atunci, avem și

$$\lim_{M_0 \to M_0'} \Phi(x, y, z) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(Y,Z)}^{Z} \varphi(0,\zeta) \frac{f(Y,Z) - f(0,\zeta)}{[G(Y,Z) - G(0,\zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{[f(Y,Z) - f(0,\zeta)]^2}{G(Y,Z) - G(0,\zeta)} \right]$$

$$P(0,\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^Y \varphi(\eta, Z) \frac{f(Y,Z) - f(\eta,Z)}{(Y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(f(Y,Z) - f(\eta,Z))^2}{Y-\eta} \right]$$

$$Q(\eta, Z)\, d\eta \pm Q(Y, Z)\, \varphi(Y, Z) \tag{67}$$

luîndu-se $\pm$ după cum $M_0 \to M_0'$ în aceleași ipoteze ca mai sus.

Dacă notăm și aici cu M punctul de coordonate curente și cu M_0 punctul de pe suprafața $x = f(y, z)$ (sau $x = g(y, z)$) de aceleași coordonate (y, z), atunci soluția problemei căutate este dată de sistemul de ecuații integrale ce se obține punînd soluției $u(x, y, z)$ scrisă sub forma

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C \varphi(\eta, \zeta) \frac{x - f(\eta,\zeta)}{[G(y,z) - G(\eta,\zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(x - f(\eta,\zeta))^2}{G(y,z) - G(\eta,\zeta)} \right]$$

$$(Q(\eta, \zeta)\, d\eta - P(\eta, \zeta)\, d\zeta) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C \psi(\eta, \zeta) \frac{x - g(\eta,\zeta)}{G(y,z) - G(\eta,\zeta)} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(x - g(\eta,\zeta))^2}{G(y,z) - G(\eta,\zeta)} \right] (Q(\eta, \zeta)\, d\eta -$$

$$- P(\eta, \zeta)\, d\zeta) \tag{68}$$

*) p. 810.

(C este conturul din fig. 7) condițiile la limită cerute. Avem așa dar sistemul

$$\omega(M_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C \varphi(M)\frac{f(M_0)-f(M)}{[G(M_0)-G(M)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(f(M_0)-f(M))^2}{G(M_0)-G(M)}\right]d\sigma +$$

$$+ Q(M_0)\,\varphi(M_0) +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C \psi(M)\frac{g(M_0)-g(M)}{[G(M_0)-G(M)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(g(M_0)-g(M))^2}{G(M_0)-G(M)}\right]d\sigma \qquad (69)$$

$$\theta(M_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C \varphi(M)\frac{f(M_0)-f(M)}{[G(M_0)-G(M)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(f(M_0)-f(M))^2}{G(M_0)-G(M)}\right]d\sigma -$$

$$- Q(M_0)\,\psi(M_0) +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_C \psi(M)\frac{g(M_0)-g(M)}{[G(M_0)-G(M)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(g(M_0)-g(M))^2}{G(M_0)-G(M)}\right]d\sigma \qquad (70)$$

unde și de această dată am notat

$$d\sigma = Q(M)\,d\eta - P(M)\,d\zeta$$

și ținînd seamă de C, urmează că efectiv avem pe cele două segmente de dreaptă

$$d\sigma = Q(M)\,ds$$

sau

$$d\sigma = -P(M)\,ds.$$

În condițiile enunțate, sistemul format din ecuațiile (69) și (70) admite o soluție unică φ și ψ care înlocuită în (68) ne dă soluția căutată.

Deoarece, dacă $y = \eta$ avem și $z = \zeta$, condiția inițială este de asemenea îndeplinită, urmează că soluția astfel determinată răspunde problemei propuse.

7. — *Proprietăți ale soluțiilor ecuației* (48). Fie ecuația

$$E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(y, z)\frac{\partial u}{\partial y} - Q(y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (48)$$

cu

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

și ecuația ei adjunctă

$$\mathcal{E}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + Q(y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

avem, după cum am văzut, următoarea identitate

$$v\,E(u) - u\,\mathfrak{E}(v) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(Puv) - \frac{\partial}{\partial z}(Quv). \quad (71)$$

În (71) să punem $v \equiv 1$ și pe u, $(E(u) = 0)$ să-l înlocuim cu u^2. obținem

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(Pu^2) - \frac{\partial}{\partial z}(Qu^2). \quad (72)$$

Să integrăm ambii termeni din (72), domeniul de integrare fiind volumul Ω dat de fig. 8, variabilele de integrare fiind de astă dată x, y, z iar la $F\Omega$ normala fiind cea exterioară

$$2\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\,dy\,dz = \iint_{\substack{(A'B'C'D')+\\(A''B''C''D'')}} u\left(2\frac{\partial u}{\partial x}dydz - Pudzdx - Qudxdy\right) +$$

$$+\iint_{(A'B'A''B'')} Qu^2\,dx\,dy + \iint_{(A'D'A''D'')} Pu^2\,dz\,dy - \iint_{(D'C'D''C'')} Qu^2\,dx\,dy -$$

$$-\iint_{(B'C'B''C'')} Pu^2\,dz\,dx. \quad (73)$$

Din (73) se deduc următoarele

a) Dacă u este nul pe $(A'B'C'D')$, $(A''B''C''D'')$, $(A'B'A''B'')$, $(A'D'A''D'')$, $(B'C'B''C'')$ și în plus pe $(D'C'D''C'')$, $Q(y, z) > 0$, atunci cu necesitate

$$u \equiv 0 \text{ în } \Omega.$$

b) Dacă u este nul pe $(A'B'C'D')$, $(A''B''C''D'')$, $(A'D'A''D'')$, $(D'C'D''C'')$, $(B'C'B''C'')$ și în plus pe $(A'B'A''B'')$, $Q(y, z) < 0$, atunci cu necesitate

$$u \equiv 0 \text{ în } \Omega.$$

c) Dacă u este nul pe $(A'B'C'D')$, $(A''B''C''D'')$, $(A'B'A''B'')$, $(A'D'A''D'')$, $(D'C'D''C'')$ și în plus pe $(B'C'B''C'')$, $P(y, z) > 0$, atunci cu necesitate

$$u \equiv 0 \text{ în } \Omega.$$

d) Dacă u este nul pe $(A'B'C'D')$, $(A''B''C''D'')$, $(A'B'A''B'')$, $(D'C'D''C'')$, $(B'C'B''C'')$ și în plus pe $(A'D'A''D'')$, $P(y, z) < 0$, atunci

$$u \equiv 0 \text{ în } \Omega.$$

Se obțin însă și rezultate care uzează semnele ambelor funcții P, Q, și anume

e) Dacă u este nul pe $(A'B'C'D')$, $(A''B''C''D'')$, $(A'B'A''B'')$, $(A'D'A''D'')$ și în plus pe $(C'D'C''D'')$, $Q(y, z) > 0$ iar pe $(B'C'B''C'')$ $P(y, z) > 0$, atunci cu necesitate

$$u \equiv 0 \text{ în } \Omega$$

și altele asemănătoare schimbînd semnul lui P sau Q.

Extremele soluției $u(x, y, z)$. Ne situăm acum în cazul figura 6, coordonatele curente fiind x, y, z. Să arătăm că soluția $u(x, y, z)$ a ecuației (48) fără condiția suplimentară, nu poate să-și atingă maximul sau minimul în interiorul volumului Ω (paralelipipedul $OABCDEFG$) ci numai pe contur, iar pentru contur avem condiționări legate de semnul funcțiilor $P(y, z)$ și $Q(y, z)$.

Avem pentru planele fețelor paralelipipedului următoarele ecuații

$$(ABEF) \qquad x = X$$
$$(DEFG) \qquad y = Y$$
$$(BCDE) \qquad z = Z$$

a') Să arătăm că oricare ar fi semnul lui P și Q în Ω și pe $F\Omega$, $u(x, y, z)$ nu-și atinge maximul (sau minimul) în Ω ci pe $F\Omega$.

Să presupunem că $u(x, y, z)$ și-ar atinge maximul într-un punct $M_1(x_1, y_1, z_1,)$ în Ω. Să formăm funcția

$$w(x, y, z) = u(x, y, z) - k\,[G(y, z) - G(Y, Z)]$$

cu $k > 0$, $G(Y, Z) - G(y, z) > 0$, $G(Y, Z) > 0$ dacă $(y, z) \in \Omega$ unde $G(y, z)$ este o soluție a ecuației

$$P(y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + Q(y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 1 \tag{74}$$

aleasă în așa fel să satisfacă neegalitățile impuse.

Avem

$$u(x, y, z) < w(x, y, z) < u(x, y, z) + kG(Y, Z).$$

Să luăm acum pe k suficient de mic pentru ca maximul lui w să fie tot în interiorul lui Ω. În punctul de maxim M_1 vom avea

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \leqslant 0,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P\frac{\partial w}{\partial y} - Q\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{M_1} \leqslant 0$$

însă

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} - k\frac{\partial G}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - k\frac{\partial G}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{75}$$

deci dacă am avea în punctul M_1 un maxim, ar trebui să avem şi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P\left(\frac{\partial u}{\partial y} - k\frac{\partial G}{\partial y}\right) - Q\left(\frac{\partial u}{\partial z} - k\frac{\partial G}{\partial z}\right) \leqslant 0$$

ceea ce este echivalent cu

$$k \leqslant 0$$

contrar ipotezei făcute.

b') Dacă $Q(y, z) > 0$ pe $(BCDE)$, atunci $u(x, y, z)$ nu poate să-şi atingă maximul (şi nici minimul) în Ω sau pe $(BCDE)$.

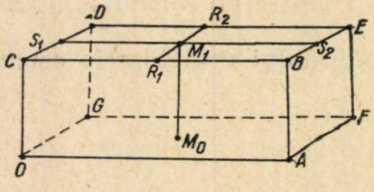


Fig. 9

Am văzut că $w(x, y, z)$ deci nici $u(x, y, z)$ nu poate să-şi atingă maximul (sau minimul) în Ω oricare ar fi semnul lui P şi Q.

Să arătăm acum că în condiţiile impuse, maximul (sau minimul) nu poate fi atins nici pe faţa $z = Z$. Să presupune că maximul, de ex. poate fi atins în M_1 fig. 9. Plecînd din punctul M_0 spre M_1, deoarece în M_1 avem cea mai mare valoare a lui W, rezultă că

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{M_1} \geqslant 0.$$

Plecînd din punctul R_1 spre R_2, pe un drum ce trece prin M_1, vom avea

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{M_1} = 0.$$

deoarece în M_1, u este maxim. Din aceleaşi motive în punctul M_1 trebuie să avem şi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \leqslant 0$$

sau, dacă $Q(y, z) > 0$ pe $(BCDE)$, avem şi

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P(y, z)\frac{\partial w}{\partial y} - Q(y, z)\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{M_1} \leqslant 0$$

şi ţinînd seamă de (75) ajungem la contradicţia

$$k \leqslant 0.$$

c') În mod asemănător se arată că dacă $P(y, z) > 0$ pe $(DEFG)$ atunci soluţia $u(x,y,z)$ a ecuaţiei (48) nu poate să-şi atingă maximul sau minimul în Ω sau pe faţa $y = Y$.

Însumînd aceste două rezultate avem:

d') Dacă $P(y, z) > 0$ pe $(DEFG)$ şi $Q(y, z) > 0$ pe $(BCDE)$ atunci $u(x, y, z)$ soluţia ecuaţiei (48) nu poate să-şi atingă maximul sau minimul în Ω sau pe feţele $y = Y$, $z = Z$.

Modul cum au fost obținute rezultatele din acest paragraf arată că ele pot fi generalizate pentru ecuația (1) cînd numărul variabilelor x_i sau y_k este oarecare.

К ИЗУЧЕНИЮ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

I. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

РЕЗЮМЕ

Предметом работы является исследование уравнений

$$E(U) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_4^2} - Y_1 \frac{\partial U}{\partial y_1} - \ldots - Y_m \frac{\partial U}{\partial y_m} = 0, \quad (\alpha)$$

где

$$Y_k = Y_k(y_1, y_2, \ldots, y_m) \quad k = 1, 2, \ldots m.$$

Сначала строится элементарное решение, которое позволит решить задачу Коши, а именно

$$v(x, x_0; y, y_0) = [G(y) - G(y_0)]^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right], \quad (\beta)$$

если

$$G(y) > G(y_0) \quad \text{и}$$
$$v(x, x_0; y, y_0) = 0,$$

если

$$G(y) \leqslant G(y_0),$$

где

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $r^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2$ и $G(y) - G(y_0)$ — решение уравнения

$$Y_1 \frac{\partial U}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial U}{\partial y_2} + \ldots + Y_m \frac{\partial U}{\partial y_m} = 1,$$

сводящееся при $y_m = y_m^0$ к $y_1 = y_1^0$.

Элементарное решение удовлетворяет также и уравнению, сопряженному к (α) если

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial Y_m}{\partial y_m} = 0 \quad (\gamma)$$

Решение задачи Коши осуществляется для уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - P(y, z)\frac{\partial U}{\partial y} - Q(y, z)\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \qquad (\delta)$$

при условии

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \qquad (\varepsilon)$$

причем показывается, что не возникает никаких трудностей, если число переменных x произвольно, однако появляются геометрические трудности, если число переменных y уменьшается. Показывается, что, если выполнены следующие условия:

a) Функции $P(y, z)$ и $Q(y, z)$ ограничены в окрестности (D) точки $(n_1\ \zeta)$,

$$| y - \eta | < r, \ | z - \zeta | < r, \qquad r > 0$$

и отличны от нуля в точке (η, ζ).

b) Решение дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dy} P(y, z) - Q(y, z) = 0,$$

проходящее через точку (η, ζ), пересекает ось oz в точке $[0, \alpha(\eta, \zeta')]$ такой, что заключенная между этими точками дуга целиком лежит в (D).

c) В области $D' \subset D$ непрерывная функция $w = G(\eta, \zeta) - G(y, z)$ удовлетворяет неравенству

$$G(\eta, \zeta) - G(y, z) > 0, \qquad (y, z) \in (D'),$$

то существует решение в (D'), удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{y \to 0} u(x, y, z) = \varphi(x, z),$$

где $\varphi(x, z)$ ограничена в (D), причем относительно переменной x она удовлетворяет дополнительному неравенству

$$| \varphi(x, z) | < M \exp(kx^2), \quad k < \frac{1}{4r}$$

это решение определяется как

$$u(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{Q(\eta, \zeta)} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, \varphi(x, \alpha)\, v(x, 0, \alpha; \xi, \eta, \zeta)\, dx,$$

где v — элементарное решение.

Доказывается, что найденное решение удовлетворяет уравнению, а также и начальному условию. Далее рассматриваются краевые задачи, причем определение решения сводится к решению системы двух интегральных уравнений.

В основу решения положено подробное исследование интеграла

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\varphi(\eta, \zeta)\,(x-\xi)}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(\xi - x)^2}{G(\eta, z) - G(\eta, \zeta)}\right],$$
$$[Q(\eta, \zeta)\, d\eta - P(\eta, \zeta)\, d\zeta]$$

где (C) — контур, приведенный на рис. 7. Решение краевых задач проводится для уравнения (δ) без ограничения (ε).

Работа заканчивается установлением нескольких свойств решений уравнения (δ).

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE

I. ÉTUDE D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

RÉSUMÉ

L'objet du travail est une étude des équations

$$E(U) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} - Y_1 \frac{\partial U}{\partial y_1} - Y_2 \frac{\partial U}{\partial y_2} - \ldots - Y_m \frac{\partial U}{\partial y_m} = 0 \qquad (\alpha)$$

où

$$Y_k = Y_k(y_1, y_2, \ldots, y_m),\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

L'auteur commence par construire la solution élémentaire qui permettra de résoudre le problème de Cauchy. Cette solution est donnée par

$$v(x, x_0;\ y, y_0) = [G(y) - G(y_0)]^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{r^2}{G(y) - G(y_0)}\right] \qquad (\beta)$$

si

$$G(y) > G(y_0),$$

et par

$$v(x,\ x_0;\ y,\ y_0) = 0$$

si

$$G(y) \leqslant G(y_0)$$

où

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_m),\ r^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + \\ + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2$$

et $G(y) - G(y_0)$ est une solution de l'équation

$$Y_1 \frac{\partial U}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial U}{\partial y_2} + \ldots + Y_m \frac{\partial U}{\partial y_m} = 1$$

qui, pour $y_m = y_m^0$, se réduit à $y_1 - y_1^0$.

La solution élémentaire satisfait aussi à l'équation adjointe à l'équation (α), si

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial Y_m}{\partial y_m} = 0. \qquad (\gamma)$$

On résout le problème de Cauchy pour l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - P(y, z)\frac{\partial U}{\partial y} - Q(y, z)\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \qquad (\delta)$$

à condition que

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \qquad (\varepsilon)$$

tout en mentionnant, pourtant, que, quel que soit le nombre des variables x, il n'y aura aucune difficulté, mais que, par contre, l'accroissement du nombre des variables y soulève des difficultés géométriques.

Admettons que l'on satisfasse aux conditions suivantes :

a) Les fonctions $P(y, z)$ et $Q(y, z)$ sont limitées dans un voisinage (D) du point (η, ζ)

$$|y - \eta| < r,\ |z - \zeta| < r,\ r > 0,$$

et sont non nulles au point (η, ζ).

b) La solution de l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dy} P(y, z) - Q(y, z) = 0$$

passant par le point (η, ζ) coupe l'axe $0z$ dans un point $[0, \alpha(\eta, \zeta)]$ de manière que l'arc compris entre ces deux points soit entièrement compris dans (D).

c) Dans le domaine $D' \subset D$, la fonction continue $w = G(\eta, \zeta) - G(y, z)$ vérifie l'inégalité

$$G(\eta, \zeta) - G(y, z) > 0,\quad (y, z) \in (D').$$

Dans ces conditions il y a une solution en (D') satisfaisant à la condition initiale

$$\lim_{\nu \to 0} u(x, y, z) = \varphi(x, z)$$

avec $\varphi(x, z)$ limitée en (D) et, de plus, vérifiant par rapport à x l'inégalité

$$| \varphi(x, z) | < M \exp (k x^2), \qquad k < \frac{1}{4r}.$$

Cette solution est fournie par

$$u(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{Q(\eta, \zeta)} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, \varphi(x, \alpha)\, v(x, 0, \alpha; \xi, \eta, \zeta)\, dx$$

où v est la solution élémentaire.

L'auteur montre ensuite que la solution trouvée satisfait à l'équation $(\delta) + (\varepsilon)$, aussi bien qu'à la condition initiale. En continuant, il traite des problèmes aux limites, en réduisant la détermination de la solution à un système de deux équations intégrales.

La base de la solution réside dans une étude minutieuse de l'intégrale

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\varphi(\eta, \zeta)\,(x - \xi)}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(\xi - x)^2}{G(y, z) - G(\eta, \zeta)}\right]$$
$$[Q(\eta, \zeta)\, d\eta - P(\eta, \zeta)\, d\zeta]$$

où (C) représente le contour de la figure (7). Pour résoudre les problèmes aux limites, il utilise l'équation (δ) sans la restriction (ε).

Pour finir, l'auteur établit plusieurs propriétés des solutions de l'équation (δ).

BIBLIOGRAFIE

1. S. L. SOBOLEV, *Ecuațiile fizicii matematice*. Ed. tehnică, București, 1955.
2. V. I. SMIRNOV, *Curs de matematici superioare*. IV, Ed. tehnică, București, 1956.

DETERMINAREA SPAȚIILOR A_3 CU GRUP G_5 CU VARIETĂȚI DE INTRANZITIVITATE UNIDIMENSIONALE

DE

VIOREL DUMITRAȘ

Studiind spațiile A_n cu grup maxim, academicianul G. Vrănceanu [1] a arătat că în cazul cînd grupul de mișcări al unui asemenea spațiu este intranzitiv el are cel mult n^2-1 parametri și acest maxim este atins. Componentele conexiunii spațiilor A_n cu grup intranzitiv maxim se poate scrie sub forma canonică

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \psi_j \tag{1}$$

unde

$$\varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0$$

iar φ_1, ψ_1 sînt funcții arbitrare de variabila x^1. Această formă canonică a fost dată de I. P. Egorov [2].

În două lucrări anterioare [3, 4] autorul a arătat că nu există spații A_3 cu grup intranzitiv G_7 și a determinat conexiunea spațiilor A_3 cu grup intranzitiv G_6. Continuînd aceste cercetări, vom determina spațiile A_3 cu grup intranzitiv G_5; în primul rînd vom considera cazul cînd grupul are varietăți de intranzitivitate cu o dimensiune. Pentru determinarea acestor grupuri vom porni de la subgrupurile lor de stabilitate ale originii care într-un sistem convenabil de coordonate sînt grupuri liniare și omogene cu patru parametri.

Aceste grupuri liniare cu 4 parametri le găsim în clasificarea lui Sophus Lie [5]; vom omite din această clasificare grupurile care conțin transformarea infinitezimală distinsă.

$$U = x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3 \text{*)} \tag{2}$$

---

*) Notăm $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$

deoarece am arătat [6]*) că acestea nu pot fi grupuri de stabilitate a unui spaţiu A_3 neeuclidian . Vom considera deci grupurile ale căror transformări infinitezimale sînt

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} && x^3p_1,\quad x^3p_2,\quad x^1p_1 + x^2p_2 + aU,\quad x^1p_2 + U,\\
&\text{(II)} && x^3p_1 + U,\quad x^3p_2,\quad x^1p_2,\quad x^2p_2 + aU,\\
&\text{(III)} && x^1p_2,\quad x^2p_1,\quad x^1p_1 - x^2p_2,\quad x^1p_1 + x^2p_2 + aU,\\
&\text{(IV)} && x^3p_2,\quad x^1p_2,\quad x^1p_1 + aU,\quad x^2p_2 + bU,\\
&\text{(V)} && x^3p_1,\quad x^3p_2,\quad x^1p_1 + aU,\quad x^2p_2 + bU,\\
&\text{(VI)} && x^3p_1,\quad x^3p_2,\quad x^1p_2,\quad x^2p_2 + aU
\end{aligned}
\tag{3}
$$

În cele ce urmează indicii notaţi cu litere greceşti iau valori de la 4 pînă la 7, iar indicii notaţi cu litere latine iau valorile 1, 2, 3. Vom utiliza convenţia de sumare a lui Einstein.

§ 1. SPAŢIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (I)

Avem

$$
\text{(I)}\qquad X_4 = x^3p_1,\quad X_5 = x^3p_2,\quad X_6 = x^1p_1 + x^2p_2 + aU,\quad X_7 = x^1p_2 + U
$$

şi

$$
\begin{aligned}
&(X_4X_5) = 0, && (X_4X_6) = X_4, && (X_4X_7) = X_5\\
&(X_5X_6) = X_5, && (X_5X_7) = 0, && (X_6X_7) = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Varietatea liniară cu o dimensiune invariantă a acestor grupuri este dreapta $x^1 = x^3 = 0$. Pe această dreaptă grupul de mişcări al spaţiului acţionează tranzitiv (în punctele dintr-o vecinătate a originii), prin urmare expresia unicului operator principal se poate scrie sub forma

$$
X_2 = p_2 + a^s(x)p_s
$$

unde a^k sînt funcţii de variabilele x^1, x^2, x^3, care se anulează în origine. Alegînd convenabil operatorul X_2 parantezele (X_2X_β) vor avea expresii de forma

$$
\begin{aligned}
&(X_2X_4) = c^\alpha_{24}X_\alpha, && (X_2X_5) = c^\alpha_{25}X_\alpha\\
&(X_2X_6) = (1+a)X_2 + c^\alpha_{26}X_\alpha, && (X_2X_7) = X_2
\end{aligned}
\tag{4'}
$$

şi identităţile $(X_2X_6X_7) = 0$, $(X_2X_4X_6) = 0$, $(X_2X_5X_6) = 0$ ne dau condiţiile $c^\alpha_{2\beta} = 0$. Putem deci lua

$$
X_2 = p_2 \tag{5}
$$

*) Teorema 3.

Pentru determinarea componentelor conexiunii spațiului vom folosi ecuațiile mișcărilor infinitezimale. Se știe că dacă o mișcare a spațiului este $\xi^i p_i$ atunci avem

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^s} \xi^s + \Gamma^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Gamma^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \tag{6}$$

Spațiul admițînd transformarea X_2 rezultă că toate componentele Γ^i_{jk} sînt funcții numai de variabilele x^1 și x^3. De asemenea spațiul admițînd transformarea X_5, din (6) avem relațiile

$$\Gamma^i_{2k} \delta^3_j + \Gamma^i_{j2} \delta^3_k - \Gamma^3_{jk} \delta^i_2 = 0 \tag{7}$$

din care rezultă

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = 0 \\ &\Gamma^1_{23} + \Gamma^1_{32} = 0, \qquad \Gamma^3_{13} = \Gamma^2_{12}, \quad \Gamma^3_{31} = \Gamma^2_{21}, \quad \Gamma^3_{33} = \Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{32} \end{aligned} \tag{8}$$

Să scriem acum ecuațiile (6) relativ la transformările X_4, X_6 și X_7 pentru $i = j = k = 1$; avem

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\Gamma^1_{11}}{\mathrm{d}x^3} x^3 + \Gamma^1_{11} = 0, \quad a\left(\frac{\mathrm{d}\Gamma^1_{11}}{\mathrm{d}x^3} x^3 + \Gamma^1_{11}\right) + \Gamma^1_{11} = 0$$

și din ultimele două relații rezultă

$$\Gamma^1_{11} = 0$$

La fel se arată apoi că și celelalte componente ale conexiunii sînt nule, prin urmare spațiul este euclidian.

Avem deci:

LEMA 1. *Nu există spații neomogene A_3 cu grup de mișcări G_5 al cărui grup de stabilitate este dat de transformările infinitezimale (I).*

§ 2. SPAȚIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (II)

Avem

$$X_4 = x^3 p_1 + U, \quad X_5 = x^3 p_2, \quad X_6 = x^1 p_2, \quad X_7 = x^2 p_2 + aU$$

și

$$\begin{aligned} &(X_4 X_5) = 0, \qquad (X_4 X_6) = X_5, \qquad (X_4 X_7) = 0 \\ &(X_5 X_6) = 0, \qquad (X_5 X_7) = X_5, \qquad (X_6 X_7) = X_6 \end{aligned}$$

Varietatea liniară invariantă (cu o dimensiune) este tot dreapta $x^1 = x^3 = 0$. Se arată la fel ca și în paragraful precedent că parantezele $(X_2 X_\beta)$ au expresiile

$$(X_2 X_4) = X_2, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = 0, \quad (X_2 X_7) = (1 + a) X_2$$

și putem lua iarăși $X_2 = p_2$.

Componentele conexiunii nu depind de variabila x^2 și ținînd seama de transformările X_5 și X_6 avem în afară de relațiile (7) și relațiile

$$\Gamma^i_{j2}\,\delta^1_k + \Gamma^i_{2k}\,\delta^1_j - \Gamma^1_{jk}\,\delta^i_2 = 0 \tag{7'}$$

Va rezulta de aici

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{22} = 0 \\ &\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = 0 \end{aligned} \tag{8'}$$

Să scriem acum ecuațiile (6) relativ la transformarea X_4, pentru $i = j = k = 1$, avem

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1}(x^1 + x^3) + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^3}\,x^3 + \Gamma^1_{11} = 0 \tag{9}$$

deci funcția Γ^1_{11} este o soluție a ecuației (9). Sistemul de ecuații diferențiale ordinare, corespunzător acestei ecuații cu derivate parțiale este

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{x^1 + x^3} = \frac{\mathrm{d}x^3}{x^3} = \frac{\mathrm{d}\Gamma^1_{11}}{-\Gamma^1_{11}} \tag{9'}$$

Egalînd primele două rapoarte avem ecuația

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}x^3} = \frac{x^1}{x^3} + 1$$

care integrată ne dă

$$\ln C_1 x^3 = \frac{x^1}{x^3} \tag{10}$$

Egalînd apoi ultimele două rapoarte avem

$$\frac{\mathrm{d}x^3}{x^3} = \frac{\mathrm{d}\Gamma^1_{11}}{-\Gamma^1_{11}}$$

și integrînd rezultă

$$x^3\,\Gamma^1_{11} = C_2$$

Sistemul de integrale prime al ecuației (9) este

$$\frac{1}{x^3}\,e^{\frac{x^1}{x^3}} = C_1\,, \qquad x^3\,\Gamma^1_{11} = C_2$$

și soluția care conține o funcție arbitrară Φ este

$$\Phi\left(x^3\,\Gamma^1_{11},\ \frac{1}{x^3}\,e^{\frac{x^1}{x^3}}\right) = 0.$$

Rezolvînd în raport cu primul argument și apoi în raport cu Γ^1_{11} obținem

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{x^3}\Psi\left(\frac{1}{x^3}e^{\frac{x^1}{x^3}}\right)$$

unde Ψ este de asemenea o funcție arbitrară.

Funcția care ne dă pe Γ^1_{11} nu este definită în origine; trebuie deci neapărat să avem $\Gamma^1_{11} = 0$. În același mod se arată că și celelalte componente ale conexiunii sînt nule, deci și în acest caz spațiul este euclidian. Putem enunța:

LEMA 2. *Nu există spații neomogene A_3 cu grup de mișcări G_5 al cărui grup de stabilitate să fie dat de transformările infinitezimale (II).*

§ 3. SPAȚIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (III)

Vom pune

$$\text{(III)}\quad X_4 = x^1 p_2,\ X_5 = x^2 p_1,\ X_6 = x^1 p_1 - x^2 p_2,\ X_7 = x^1 p_1 + x^2 p_2 + aU$$

Varietatea liniară cu o dimensiune, invariantă a acestor grupuri este dreapta $x^1 = x^2 = 0$. Ecuațiile de structură ale grupului de stabilitate se scriu

$$\begin{aligned} &(X_4X_5) = X_6, \quad &&(X_4X_6) = -2X_4, \quad &&(X_4X_7) = 0\\ &(X_5X_6) = 2X_5, \quad &&(X_5X_7) = 0, \quad &&(X_6X_7) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Grupul de mișcări al spațiului acționînd tranzitiv pe dreapta $x^1 = x^2 = 0$, operatorul principal va avea o expresie de forma

$$X_3 = p_3 + a^s(x)p_s$$

Parantezele (X_3X_α) se vor scrie

$$\begin{aligned} &(X_3X_4) = c^\alpha_{34}X_\alpha, \quad &&(X_3X_5) = c^\alpha_{35}X_\alpha,\\ &(X_3X_6) = x^\alpha_{36}X_\alpha, \quad &&(X_3X_7) = aX_3 + c^\alpha_{37}X_\alpha \end{aligned} \tag{11'}$$

și făcînd transformarea de operator

$$\overline{X}_3 = X_3 + \frac{1}{2}c^4_{36}X_4 - \frac{1}{2}c^5_{36}X_5 - \frac{1}{2}c^4_{34}X_6$$

putem anula constantele c^4_{36}, c^5_{36} și c^4_{34}. Ținînd seama de aceste condiții identitățile $(X_3X_4X_6) = 0$, $(X_3X_5X_6) = 0$, $(X_3X_7X_6) = 0$ $(X_3X_7X_4) = 0$ se vor scrie

$$\begin{aligned} &[(X_3X_4)X_6] + 2(X_3X_4) + 2c^6_{36}X_4 = 0\\ &[(X_3X_5)X_6] - 2(X_3X_5) - 2c^6_{36}X_5 = 0\\ &[(X_3X_7)X_6] = 0, \quad [(X_3X_7)X_4] = 0 \end{aligned}$$

și rezultă

$$(X_3X_4)=0,\quad (X_3X_5)=0,\quad (X_3X_6)=c_{36}^7X_7,\quad (X_3X_7)=aX_3+c_{37}^7X_7$$

avînd în plus condiția

$$ac_{37}^7=0$$

Dacă $a\neq 0$, avem deci $c_{36}^7=0$ și putem anula și constanta c_{37}^7. Se arată că și dacă $a=0$ trebuie să avem $c_{36}^7=c_{37}^7=0$ pentru ca grupul respectiv să fie grupul de mișcări al unui spațiu A_3. Vom putea deci lua

$$X_3=p_3$$

și componentele conexiunii nu depind de variabila x^3. Să presupunem mai întîi că $a\neq 1,0$. Scriind ecuațiile (6) relativ la transformările X_6 și X_7 pentru $i=j=k=1$ avem

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^1}x^1-\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^2}x^2+\Gamma_{11}^1=0,\qquad \frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^1}x^1+\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^2}x^2+\Gamma_{11}^1=0$$

scăzînd aceste două ecuații avem

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^2}=0$$

și apoi

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_{11}^1}{\mathrm{d}x^1}x^2+\Gamma_{11}^1=0$$

din care prin integrare rezultă

$$\Gamma_{11}^1=\frac{K}{x^1}$$

și dacă $K\neq 0$, Γ_{11}^1 nu ar fi definită în origine. Trebuie deci să avem

$$\Gamma_{11}^1=0 \tag{12}$$

La fel rezultă și

$$\Gamma_{22}^1=\Gamma_{11}^2=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\Gamma_{22}^2=\Gamma_{13}^3=\Gamma_{31}^3=\Gamma_{23}^3=\Gamma_{32}^3=0 \tag{12'}$$

Să scriem acum ecuațiile (6) relativ la transformările X_6, X_7, X_4 și X_5 pentru $i=3$, $j=1$, $k=2$; și apoi pentru $i=3$, $j=2$, $k=1$; avem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Gamma_{12}^3}{\partial x^1}x^1-\frac{\partial\Gamma_{12}^3}{\partial x^2}x^2=0, && \frac{\partial\Gamma_{21}^3}{\partial x^1}x^1-\frac{\partial\Gamma_{21}^3}{\partial x^2}x^2=0\\
&(1+a)\left(\frac{\partial\Gamma_{12}^3}{\partial x^1}x^1+\frac{\partial\Gamma_{12}^3}{\partial x^2}x^2\right)+(2+a)\Gamma_{12}^3=0,\\
&(1+a)\left(\frac{\partial\Gamma_{21}^3}{\partial x^1}x^1+\frac{\partial\Gamma_{21}^3}{\partial x^2}x^2\right)+(2+a)\Gamma_{21}^3=0,\\
&\frac{\partial\Gamma_{12}^3}{\partial x^2}x^1+\Gamma_{22}^3=0, && \frac{\partial\Gamma_{21}^3}{\partial x^2}x^1+\Gamma_{22}^3=0\\
&\frac{\partial\Gamma_{12}^3}{\partial x^1}x^2+\Gamma_{11}^3=0, && \frac{\partial\Gamma_{21}^3}{\partial x^1}x^2+\Gamma_{11}^3=0
\end{aligned} \tag{13}$$

Din primele ecuații (13) rezultă că Γ^3_{12} și Γ^3_{21} sînt funcții numai de produsul x^1x^2. Ținînd seama de aceasta, următoarele ecuații (13) se scriu

$$2(1+a)\frac{d\Gamma^3_{12}}{du}u + (2+a)\Gamma^3_{12} = 0, \quad 2(1+a)\frac{d\Gamma^3_{21}}{du}u + (2+a)\Gamma^3_{21} = 0 \quad (13')$$

unde $u = x^1x^2$. Integrînd ecuațiile (13'), obținem

$$\Gamma^3_{12} = (\theta+\eta)(x^1x^2)^{-\frac{2+a}{2(1+a)}}, \quad \Gamma^3_{21} = (\theta-\eta)(x^1x^2)^{-\frac{2+a}{2(1+a)}} \quad (14)$$

cu θ și η constante.

Ultimele ecuații (13) ne dau

$$\Gamma^3_{11} = \frac{2+a}{2(1+a)}\theta(x^1)^{-\frac{4+3a}{2(1+a)}}(x^2)^{\frac{a}{2(1+a)}}, \quad \Gamma^3_{22} = \frac{2+a}{2(1+a)}\theta(x^1)^{\frac{a}{2(1+a)}}(x^2)^{-\frac{4+3a}{2(1+a)}} \quad (14')$$

și $\eta = 0$.

Scriind ecuațiile (6) relativ la transformarea X_5 pentru $i = 3$, $j = k = 1$ rezultă că dacă $a \neq -2, -\frac{4}{3}$, avem $\theta = 0$, deci

$$\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = 0 \quad (15)$$

Cazurile $a = -2, -\frac{4}{3}$ le vom studia mai jos.

Să facem acum în ecuațiile (6), $i = j = 1$, $k = 3$, apoi $i = k = 1$, $j = 3$ și să ținem seama de transformările X_6 și X_7; avem

$$\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^1}x^1 - \frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^2}x^2 = 0, \qquad \frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^1}x^1 - \frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^2}x^2 = 0$$

$$(1+a)\left(\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^1}x^2 + \frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^2}x^2\right) + a\Gamma^1_{13} = 0, \quad (1+a)\left(\frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^1}x^1 + \frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^2}x^2\right) + a\Gamma^1_{31} = 0$$

și integrînd obținem

$$\Gamma^1_{13} = (\alpha+\beta)(x^1x^2)^{-\frac{a}{2(1+a)}}, \quad \Gamma^1_{31} = (\alpha-\beta)(x^1x^2)^{-\frac{a}{2(1+a)}} \quad (16)$$

cu α și β constante.

Scriind apoi ecuațiile (6) pentru aceleași valori date indicilor însă relativ la transformările X_4 și X_5, obținem

$$\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^1}x^2 - \Gamma^2_{13} = 0, \quad \frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^1}x^2 - \Gamma^2_{31} = 0$$

$$\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^2}x^1 + \Gamma^1_{23} = 0, \quad \frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^2}x^1 + \Gamma^1_{32} = 0$$

ecuaţii din care scoatem :

$$\Gamma^1_{23} = \frac{a}{2(1+a)}(\alpha+\beta)(x^1)^{\frac{2+a}{2(1+a)}}(x^2)^{-\frac{2+3a}{2(1+a)}}$$

$$\Gamma^1_{32} = \frac{a}{2(1+a)}(\alpha-\beta)(x^1)^{\frac{2+a}{2(1+a)}}(x^2)^{-\frac{2+3a}{2(1+a)}}$$

$$\Gamma^2_{13} = -\frac{a}{2(1+a)}(\alpha+\beta)(x^1)^{-\frac{2+3a}{2(1+a)}}(x^2)^{\frac{2+a}{2(1+a)}} \tag{16'}$$

$$\Gamma^2_{31} = -\frac{a}{2(1+a)}(\alpha-\beta)(x^1)^{-\frac{2+3a}{2(1+a)}}(x^2)^{\frac{2+a}{2(1+a)}}$$

Scriind din nou ecuaţiile (6) relativ la transformarea X_5 şi pentru $i=1,\ j=2,\ k=3$; $i=1,\ j=3,\ k=2$, rezultă

$$\frac{\partial\Gamma^1_{23}}{\partial x^1}x^2 + \Gamma^1_{13} - \Gamma^2_{23} = 0, \quad \frac{\partial\Gamma^1_{32}}{\partial x^1}x^2 + \Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{32} = 0$$

ecuaţii din care scoate

$$\Gamma^2_{23} = \frac{5a^2+10a+4}{4(1+a)^2}(\alpha+\beta)(x^1x^2)^{-\frac{a}{2(1+a)}},$$

$$\Gamma^2_{32} = \frac{5a^2+10a+4}{4(1+a)^2}(\alpha-\beta)(x^1x^2)^{-\frac{a}{2(1+a)}}. \tag{16''}$$

În sfîrşit scriind ecuaţiile (6) pentru $i=1,\ j=2,\ k=3$; $i=1,\ j=3,\ k=2$ rezultă

$$\frac{\partial\Gamma^1_{23}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial\Gamma^1_{32}}{\partial x^2} = 0 \tag{16'''}$$

prin urmare dacă $a \neq -\frac{2}{3}$ atunci avem $\alpha = \beta = 0$.

Să considerăm acum şi componentele conexiunii care au mai rămas anume Γ^1_{33}, Γ^2_{33} şi Γ^3_{33}. Tot din ecuaţiile (6) scrise relativ la transformările X_6 şi X_7, pentru $i=1,\ j=k=3$ avem

$$\frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^1}x^1 - \frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^2}x^2 - \Gamma^1_{33} = 0$$

$$(1+a)\left(\frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^1}x^1 + \frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^2}x^2\right) + (a-1)\,\Gamma^1_{33} = 0 \tag{17}$$

din prima ecuaţie (17) scoatem

$$\frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^1}x^1 = \frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial x^2}x^2 + \Gamma^1_3$$

și înlocuind această valoare în a doua ecuație (17) avem

$$(1+a)\frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x^2}x^2 + a\,\Gamma^1_{33} = 0$$

de unde rezultă

$$\Gamma^1_{33} = \Theta(x^1)\cdot(x^2)^{-\frac{a}{1+a}}$$

Ținînd seama de prima ecuație (17) avem pentru determinarea funcției $\Theta(x^1)$ următoarea ecuație diferențială

$$\frac{d\Theta}{dx^1}x^1 - \frac{1}{1+a}\Theta = 0 \tag{17'}$$

care integrată ne dă

$$\Theta(x^1) = \chi(x^1)^{\frac{1}{1+a}}$$

unde χ este o constantă. Avem deci

$$\Gamma^1_{33} = \chi(x^1)^{\frac{1}{1+a}}(x^2)^{-\frac{a}{1+a}} \tag{18}$$

Ținînd seama de ecuațiile (6) scrise relativ la transformările X_4 și X_5 pentru $i = 1$, $j = k = 3$, rezultă că în ipoteza $a \neq 0$, componentele Γ^1_{33} și Γ^2_{33} sînt nule.

Prin calcule similare găsim

$$\Gamma^3_{33} = 2\gamma(x^1x^2)^{-\frac{a}{2(1+a)}} \tag{19}$$

și ținînd seama de transformările X_4 și X_5 în ecuațiile (6) scrise pentru $i = j = k = 3$ rezultă că dacă $a \neq 0$ atunci $\gamma = 0$.

Din cercetarea făcută mai sus rezultă că dacă $a \neq 0, -1, -2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$ atunci toate componentele conexiunii sînt nule, deci spațiul este euclidian.

Să considerăm acum și cazurile omise.

1°. $a = -2$. Atunci singurele componente nenule ale conexiunii sînt

$$\Gamma^3_{12} = \theta + \eta, \quad \Gamma^3_{21} = \theta - \eta \tag{20}$$

și regăsim spații cu conexiune nesimetrică generală cu grup maxim G_9 [6].

2°. $a = 0$. În acest caz componentele nenule ale conexiunii se scriu

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \alpha + \beta, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \alpha - \beta \\ &\Gamma^3_{33} = 2\gamma, \quad \Gamma^1_{33} = Xx^1, \quad \Gamma^2_{33} = Xx^2 \end{aligned} \tag{21}$$

Regăsim forma canonică dată de G. Vrănceanu [8] pentru conexiunea spațiilor A_3 cu grup maxim (vezi și lucrarea [7]).

3°. $a = -\frac{4}{3}$. Singurele componente nenule ale conexiunii sînt

$$\Gamma^3_{11} = -\theta(x^2)^2,\ \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \theta x^1 x^2,\ \Gamma^3_{22} = -\theta(x^1)^2 \qquad (22)$$

şi spaţiul este un spaţiu cu grup tranzitiv G_7[9] *) (grupul de mişcări al spaţiului care are conexiunea dată de formulele (22′) nu este tranzitiv în origine).

Avem deci:

LEMA 3. *Nu există spaţii neomogene A_3 cu grup de mişcări G_4 al cărui grup de stabilitate să fie dat de transformările infinitezimale (III) în care* $a \neq -1, -\frac{2}{3}$.

4°. $a = -\frac{2}{3}$. În acest caz avem

$$X_7 = x^1 p_1 + x^2 p_2 - 2x^3 p_3$$

şi componentele nenule ale conexiunii se scriu

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{13} = -\Gamma^3_{23} = (\alpha+\beta)x^1x^2, && \Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{32} = (\alpha-\beta)x^1x^2 \\ &\Gamma^1_{23} = -(\alpha+\beta)(x^1)^2 && \Gamma^1_{32} = -(\alpha-\beta)(x^1)^2 \\ &\Gamma^2_{13} = (\alpha+\beta)(x^2)^2 && \Gamma^2_{31} = (\alpha-\beta)(x^2)^2 \end{aligned} \qquad (23)$$

componentele nenule ale tensorului de curbură sînt

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{113} = -\Gamma^2_{213} = (\alpha+\beta)x^2, && \Gamma^2_{223} = -\Gamma^1_{123} = (\alpha+\beta)x^1 \\ &\Gamma^1_{213} = 2(\alpha+\beta)x^1 && \Gamma^2_{123} = -2(\alpha+\beta)x^2 \\ &\Gamma^1_{312} = 3(\alpha-\beta)x^1 && \Gamma^2_{312} = 3(\alpha-\beta)x^2 \end{aligned} \qquad (24)$$

Tensorul contractat strîmb simetric $P_{kl} = \Gamma^i_{ikl}$ are toate componentele nule, iar componentele tensorului contractat $\Gamma_{jl} = \Gamma^i_{ijl}$ sînt

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11} = \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \Gamma_{22} = \Gamma_{33} = 0 \\ &\Gamma_{13} = -3(\alpha+\beta)x^2, && \Gamma_{31} = -3(\alpha-\beta)x^2 \\ &\Gamma_{23} = 3(\alpha+\beta)x^1, && \Gamma_{32} = 3(\alpha-\beta)x^1 \end{aligned}$$

Să determinăm ecuaţiile grupului de mişcări ale spaţiilor avînd conexiunea (23). Dacă ecuaţiile acestui grup sînt

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3) \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (25)$$

avem în primul rînd ţinînd seama de invarianţa tensorului de curbură

$$\bar{\Gamma}^i_{rst} u^r_j u^s_k u^t_l - \Gamma^r_{jkl} u^i_r = 0 \ **) \qquad (26)$$

*) p. 212, formulele (5.7).

**) Notăm $u^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}$

Făcînd în primul rînd în ecuațiile (26) $i = 3$, $j = k = 1$, $l = 3$; $i = 3$; $j = k = 2$, $l = 3$ rezultă

$$u_1^3 = u_2^3 = 0 \tag{27}$$

și prin urmare $\bar{x}^3$ este funcție numai de variabila x^3. Ținînd seama de ecuațiile care ne dau legea de transformare a conexiunii

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = \bar{\Gamma}^i_{rs} u^r_j u^s_k - \Gamma^r_{jk} u^i_r = 0 \tag{28}$$

avem pentru $i = j = k = 3$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^3}{(\mathrm{d}x^3)^2} = 0$$

deci $\bar{x}^3$ este o funcție liniară de x^3 și ecuațiile (25) capătă forma

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1, x^2, x^3),\ \bar{x}^2 = \bar{x}^2(x^1, x^2, x^3),\ \bar{x}^3 = a^3_3 x^3 + a^3 \tag{25'}$$

Să considerăm tensorul simetric ale cărui componente sînt

$$g_{ij} = \frac{1}{6\alpha}(\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) \qquad (\alpha \neq 0) \tag{29}$$

Componentele acestui tensor se scriu

$$g_{11} = g_{22} = g_{12} = g_{33} = 0, \qquad g_{13} = -x^2,\ g_{23} = x^1 \tag{29'}$$

și din legea sa de transformare

$$\bar{g}_{rs} u^r_j u^s_k = g_{jk} \tag{30}$$

rezultă dacă dăm indicilor j, k pe rînd valorile 3, 3; 1, 3; și 2, 3,

$$\bar{x}^2 u^1_3 - \bar{x}^1 u^2_3 = 0,\ (\bar{x}^2 u^1_1 - \bar{x}^1 u^2_1)\, a^3_3 = x^2;\ (\bar{x}^2 u^1_2 - \bar{x}^1 u^2_2)\, a^3_3 = -x^1 \tag{31}$$

Scriind acum ecuațiile (28) pentru $i = j = k = 1$; $i = j = 1$, $k = 2$; $i = 1, j = k = 2$; $i = 1, j = k = 3$; $i = 2, j = k = 1$; $i = j = 2, k = 1$; $i = j = k = 2$; $i = 2$, $j = k = 3$; rezultă dacă ținem seama de condițiile (31)

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^1}{(\partial x^1)^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^1}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^1}{(\partial x^2)^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^1}{(\partial x^3)^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^2}{(\partial x^1)^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^2}{(\partial x^2)^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^2}{(\partial x^3)^2} = 0$$

și ecuațiile (25') devin

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= (px^1 + qx^2 + s)\, x^3 + a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1 \\ \bar{x}^2 &= (mx^1 + nx^2 + r)\, x^3 + a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2 \\ \bar{x}^3 &= a^3_3 x^3 + a^3 \end{aligned} \tag{25''}$$

Înlocuind aceste valori în primele două relații (31) avem

$$(a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + a^1)(mx^1 + nx^2 + r) = (a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a^2)(px^1 + qx^2 + s),$$

$$[(mx^1 + nx^2 + r)\,x^3 + a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + a^2](px^3 + a_1^1)\,a_3^3 - \tag{31'}$$

$$- [(px^1 + qx^2 + s)\,x^3 + a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + a^1](mx^3 + a^2{}_1)a^3{}_3 = x^2.$$

Identificînd coeficienții lui x^2 în ultima relație (31′) rezultă

$$a_3^3\,(a_1^1a_2^2 - a_2^1a_1^2) = 1 \tag{32}$$

Anulînd coeficientul lui $(x^1)^2$ din prima relație (31′) și coeficientul lui x^2x^3 din a doua relație (31′) avem

$$ma_1^1 - pa_1^2 = 0, \quad ma_2^1 - pa_2^2 = 0$$

și avem un sistem de două ecuații liniare și omogene în m și p; determinantul acestui sistem este diferit de zero după cum se vede din ecuația (32); rezultă deci

$$m = p = 0$$

La fel anulînd coeficienții lui x^1x^2 și $(x^2)^2$ și apoi coeficienții lui x^1 și x^2 din prima relație (31″) rezultă

$$n = q = r = s = 0$$

Anulînd apoi termenii liberi din ultima relație (31′) și din ultima relație (31) scrisă dezvoltat rezultă

$$a^1 = a^2 = 0.$$

Ecuațiile grupului de mișcări ale spațiului capătă astfel forma definitivă

$$\bar{x}^1 = a_1^1x^1 + a_2^1x^2, \quad \bar{x}^2 = a_1^2x^1 + a_2^2x^2, \quad \bar{x}^3 = a_3^3x^3 + a^3$$
$$a_3^3\,(a_1^1a_2^2 - a_2^1a_1^2) = 1 \tag{33}$$

Acest grup este intranzitiv și are chiar 5 parametri. Rezultă

TEOREMA 1. *Spațiile neomogene A_3 cu varietăți de intranzitivitate unidimensionale, avînd grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale x^1p_2, x^2p_1, $x^1p_1 - x^2p_2$, $x^1p_1 + x^2p_2 - 2x^3p_3$, sînt spațiile a căror conexiune este dată de formulele* (23) *și au grupul de mișcări G_5, avînd ecuațiile* (33).

5°. $a = -1$. Avem atunci $X_7 = x^3p_3$ și scriind ecuațiile (6) relativ la această transformare rezultă

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = 0$$
$$\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{33}^2 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{33}^3 = 0$$

Pentru a calcula mai ușor componentele nenule ale conexiunii vom pune

$$\Gamma_{jk}^i = S_{jk}^i + \frac{1}{2}\,T_{jk}^i \tag{34}$$

unde S^i_{jk} sînt componentele conexiunii simetrice atașate spațiului ($S^i_{jk} = S^i_{kj}$), iar T^i_{jk} sînt componentele tensorului de torsiune. Pentru determinarea funcțiilor S^i_{jk} ne folosim de ecuațiile :

$$[i\,jk] \equiv \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} - \left(\frac{\partial S^i_{jk}}{\partial x^s} \xi^s + S^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + S^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - S^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \right) = 0 \qquad (35)$$

care rezultă imediat din (6).

Scriind ecuațiile (35) [2 11] relativ la transformările X_5 și X_6 avem succesiv

$$\frac{\partial S^2_{11}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}S^2_{11}}{\mathrm{d}x^2} x^2 - 3S^2_{11} = 0 \qquad (36)$$

și prin integrare obținem

$$S^2_{11} = \alpha (x^2)^3 \qquad (37)$$

α fiind o constantă.

Scriind acum ecuațiile (35) [111] relativ la aceleași transformări avem

$$\frac{\partial S^1_{11}}{\partial x^1} x^2 - S^2_{11} = 0, \quad \frac{\partial S^1_{11}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial S^1_{11}}{\partial x^2} x^2 + S^1_{11} = 0 \qquad (36')$$

și ținînd seama de (37), rezultă

$$S^1_{11} = \alpha x^1 (x^2)^2 + 2\beta x^2 \qquad (37')$$

β fiind o altă constantă.

Scriind acum ecuațiile (35) [211], [111] relativ la transformarea X_4, avem ecuațiile

$$\frac{\partial S^2_{11}}{\partial x^2} x^1 + 2S^2_{12} - S^1_{11} = 0, \quad \frac{\partial S^1_{11}}{\partial x^2} x^1 + 2S^1_{12} = 0$$

din care scoatem

$$S^2_{12} = -\alpha x^1 (x^2)^2 + \beta x^2, \quad S^1_{12} = -\alpha (x^1)^2 x^2 - \beta x^1 \qquad (37'')$$

Apoi ecuația. [112] scrisă relativ la transformarea X_4 ne dă

$$\frac{\partial S^1_{12}}{\partial x^2} x^1 + S^1_{22} = 0$$

și rezultă

$$S^1_{22} = \alpha (x^1)^3 \qquad (37''')$$

În sfîrșit din ecuația [122] scrisă relativ la transformarea X_5, avem

$$\frac{\partial S^1_{22}}{\partial x^1} x^2 + 2S^1_{13} - S^2_{22} = 0$$

de unde scoatem

$$S^2_{22} = \alpha (x^1)^2 x^2 - 2\beta x^1 \qquad (37^{IV})$$

Scriind apoi ecuațiile [313] relativ la transformările X_5, X_4 și X_6, avem succesiv

$$\frac{\partial S^3_{13}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}S^3_{13}}{\mathrm{d}x^2} x^2 - S^3_{13} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}S^3_{13}}{\mathrm{d}x^2} x^1 + S^3_{23} = 0$$

și integrînd rezultă

$$S^3_{13} = \gamma x^2, \quad S^3_{23} = -\gamma x^1 \tag{37^{V}}$$

în care γ este o nouă constantă.

Pentru a calcula componentele T^i_{jk} ale tensorului de torsiune vom folosi ecuațiile

$$\frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^s} \xi^s + T^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + T^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - T^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} = 0 \tag{38}$$

care constituie de asemenea o consecință a ecuațiilor (6). Făcînd calcule similare celor de mai sus, găsim

$$T^1_{12} = -\eta x^1, \quad T^2_{21} = +\eta x^2, \quad T^3_{32} = -\chi x^1, \quad T^3_{31} = +\chi x^2 \tag{39}$$

cu η și χ constante.

Ținînd seama de formulele (37), (37′), (37″), (37‴), (37^{IV}), (37^{V}) și (39) rezultă că putem scrie componentele nenule ale conexiunii spațiului

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = \alpha x^1 (x^2)^2 + 2\beta x^2, && \Gamma^2_{22} = \alpha (x^1)^2 x^2 - 2\beta x^1 \\
&\Gamma^1_{12} = -\alpha (x^1)^2 x^2 - \beta x^1 - \eta x^1, && \Gamma^1_{21} = -\alpha (x^1)^2 x^2 - \beta x^1 + \eta x^1 \\
&\Gamma^2_{21} = -\alpha x^1 (x^2)^2 + \beta x^2 + \eta x^2, && \Gamma^2_{12} = -\alpha x^1 (x^2)^2 + \beta x^2 - \eta x^2 \\
&\Gamma^3_{31} = (\gamma + \chi) x^2, && \Gamma^3_{13} = (\gamma - \chi) x^2 \\
&\Gamma^3_{32} = -(\gamma + \chi) x^1, && \Gamma^3_{23} = -(\gamma - \chi) x^1 \\
&\Gamma^1_{22} = \alpha (x^1)^3, && \Gamma^2_{11} = \alpha (x^2)^3
\end{aligned} \tag{40}$$

Pentru a determina grupul de mișcări ale spațiului vom considera numai partea simetrică a conexiunii S^i_{jk}. Componentele nenule ale tensorului de curbură format cu această conexiune se scriu

$$\begin{aligned}
&S^1_{112} = (4\alpha - \beta^2) x^1 x^2 + 3\beta, && S^1_{221} = (4\alpha - \beta^2) (x^1)^2 \\
&S^2_{221} = (4\alpha - \beta^2) x^1 x^2 - 3\beta, && S^2_{112} = (4\alpha - \beta^2) (x^2)^2 \\
&S^3_{113} = \gamma (\gamma - 2\beta) (x^2)^2, && S^3_{223} = \gamma (\gamma - 2\beta) (x^1)^2 \\
&S^3_{123} = -\gamma + \gamma (2\beta - \gamma) x^1 x^2, && S^3_{213} = \gamma + \gamma (2\beta - \gamma) x^1 x^2 \\
&&& S^3_{312} = 2\gamma
\end{aligned} \tag{41}$$

Componentele tensorului contractat strîmb simetric $R_{kl} = S^i_{ikl}$, sînt

$$R_{12} = 6\beta + 2\gamma, \qquad R_{13} = R_{23} = 0 \tag{41′}$$

Să determinăm acum ecuațiile (25) ale grupului de mișcări. Din legea care ne dă invarianța tensorului R_{kl}

$$\overline{R}_{rs}\, u_k^r\, u_l^s = R_{kl} \tag{42}$$

avem dacă dăm indicilor k, l valorile $k = 1$, $l = 2$; $k = 1$, $l = 3$; $k = 2$, $l = 3$,

$$\begin{gathered} u_1^1 u_2^2 - u_2^1 u_1^2 = 1, \quad u_1^1 u_3^2 - u_1^2 u_3^1 = 0 \\ u_2^1 u_3^2 - u_2^2 u_3^1 = 0 \end{gathered} \tag{43}$$

și ultimele ecuații (43) formează un sistem liniar omogen în u_3^1, u_3^2 cu determinantul diferit de zero după cum vedem din prima ecuație (43). Rezultă că $u_3^1 = u_3^2 = 0$ deci x^1 și x^2 sînt funcții numai de variabilele x^1 și x^2.

Tensorul contractat $S_{jl} = S^i_{,il}$ are componentele nenule

$$\begin{gathered} S_{11} = (\beta^2 - 4\alpha + 2\beta\gamma - \gamma^2)(x^2)^2, \qquad S_{22} = (\beta^2 - 4\alpha + 2\beta\gamma - \gamma^2)(x^1)^2 \\ S_{12} = 3\beta + \gamma + (4\alpha - \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2)\, x^1 x^2, \\ S_{21} = -(3\beta + \gamma) + (4\alpha - \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2)\, x^1 x^2 \end{gathered} \tag{41''}$$

Vom considera pentru ușurință, tensorul simetric g_{jl} ale cărui componente sînt

$$g_{jl} = \frac{S_{jl} + S_{lj}}{2(\beta^2 - 4\alpha + 2\beta\gamma - \gamma^2)}$$

Avem

$$g_{11} = (x^2)^2, \quad g_{12} = -x^1 x^2, \quad g_{22} = (x^1)^2 \tag{41'''}$$

și dacă în legea (30) de transformare a acestui tensor facem $j = l = 1$ și $j = l = 2$, rezultă condițiile

$$\overline{x}^2 u_1^1 - \overline{x}^1 u_1^2 = x^2, \quad \overline{x}^1 u_2^2 - \overline{x}^2 u_2^1 = x^1 \tag{44}$$

Ținînd seama de aceste condiții în formulele care ne dau legea de transformare a conexiunii

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = \overline{S}^i_{rs}\, u_j^r\, u_k^s - S^r_{jk}\, u_r^i \tag{45}$$

avem

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^u}{(\partial x^1)^2} = \frac{\partial^2 \overline{x}^u}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 \overline{x}^u}{(\partial x^2)^2} = \frac{\partial^2 \overline{x}^3}{(\partial x^3)^2} = \frac{\partial^2 \overline{x}^3}{\partial x^1 \partial x^3} = \frac{\partial^2 \overline{x}^3}{\partial x^2 \partial x^3} = 0$$

și ecuațiile grupului de mișcări ale spațiului sînt de forma

$$\begin{gathered} \overline{x}^1 = a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a^1, \quad \overline{x}^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a^2, \quad \overline{x}^3 = a_3^3 x^3 + n\,(x^1, x^2) \\ (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2) = 1 \end{gathered} \tag{46}$$

Înlocuind valorile lui x^1 și x^2 în condițiile (44), rezultă dacă anulăm coeficienții termenilor liberi

$$a^2a_1^1 - a^1a_1^2 = 0, \qquad a^2a_2^1 - a^1a_2^2 = 0$$

și din aceste relații avem $a^1 = a^2 = 0$.

Din ecuațiile (45) scrise pentru $i = 3, j = k = 1$; $i = 3, j = k = 2$; $i = 3, j = 1, k = 2$ avem

$$\frac{\partial^2 n}{(\partial x^1)^2} = x^2(2\gamma - \alpha x^1x^2 - 2\beta)\frac{\partial n}{\partial x^1} - \alpha(x^2)^3\frac{\partial n}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 n}{(\partial x^2)^2} = x^1(-2\gamma - \alpha x^1x^2 + 2\beta)\frac{\partial n}{\partial x^2} - \alpha(x^1)^3\frac{\partial n}{\partial x^1}$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^1\partial x^2} = x^1(-\gamma + \beta + \alpha x^1x^2)\frac{\partial n}{\partial x^1} + x^2(\gamma - \beta + \alpha x^1x^2)\frac{\partial n}{\partial x^2}$$

și aceste ecuații sînt satisfăcute dacă $\dfrac{\partial n}{\partial x^1} = \dfrac{\partial n}{\partial x^2} = 0$

Ecuațiile grupului de mișcări ale spațiului se vor scrie deci

$$\bar{x}^1 = a_1^1x^1 + a_2^1x^2, \quad \bar{x}^2 = a_1^2x^1 + a_2^2x^2, \quad \bar{x}^3 = a_3^3x^3 + a^3, \qquad (a_1^1a_2^2 - a_2^1a_1^2 = 1). \tag{46'}$$

Grupul este intranzitiv și are tot 5 parametri. Rezultă :

TEOREMA 2. *Spațiile neomogene A_3 cu varietăți de intransitivitate unidimensionale, avînd grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale x^1p_2, x^2p_1, $x^1p_1 - x^2p_2$, x^3p_3 sînt spațiile a căror conexiune este dată de formulele* (40) *și au un grup de mișcări cu 5 parametri dat de ecuațiile* (46')

§ 4. SPAȚIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (IV)

Transformările infinitezimale ale grupului de stabilitate sînt

$$X_4 = x^3p_1, \quad X_5 = x^3p_2, \quad X_6 = x^1p_1 + aU, \quad X_7 = x^2p_2 + bU$$

iar ecuațiile sale de structură se scriu

$$\begin{aligned} &(X_4X_5) = 0, \quad &&(X_4X_6) = X_4, \quad &&(X_4X_7) = 0 \\ &(X_5X_6) = 0, \quad &&(X_5X_7) = X_5, \quad &&(X_6X_7) = 0 \end{aligned} \tag{47}$$

Grupurile (IV) au două varietăți invariante cu o dimensiune și anume dreptele $x^1 = x^3 = 0$ și $x^2 = x^3 = 0$. Observăm că dacă schimbăm între ele variabilele x^1 și x^2 transformările grupului (IV) rămîn aceleași. Prin urmare este deajuns să considerăm cazul cînd varietatea invariantă este

dreapta $x^2 = x^3 = 0$. Vom avea atunci un operator principal care are o expresie de forma

$$X_1 = p_1 + a^s(x)\, p_s$$

Parantezele (X_1X_β) se vor scrie

$$(X_1X_4) = c^\alpha_{14}X_\alpha, \quad (X_1X_5) = c^\alpha_{15}X_\alpha, \quad (X_1X_6) = (1+a)X_1 + c^\alpha_{16}X_\alpha, \quad (X_1X_7) = bX_1 + c^\alpha_{17}X_\alpha \tag{47'}$$

Dacă presupunem $a \neq 0, -1$ putem printr-o transformare de operatori

$$\overline{X}_1 = X_1 + c^\alpha X_\alpha$$

cu constantele c^α convenabil alese să anulăm coeficienții c^α_{16}. Considerînd apoi identitățile $(X_1X_6X_\beta) = 0$ ($\beta = 4, 5, 7$) rezultă că dacă avem în plus $a \neq -2$ atunci toate constantele $c^\alpha_{1\beta}$, ($\alpha = 4, 5, 6, 7,$; $\beta = 4, 5, 7$) sînt nule. Dacă $a = -2$, dar $b \neq 0{,}1$ ajungem la același rezultat. Cînd $a = -2$ și $b = 0$ atunci parantezele (X_iX_α) se scriu

$$(X_1X_4) = \mu X_6, \quad (X_1X_5) = 0, \quad (X_1X_6) = -X_1, \quad (X_1X_7) = 0 \tag{47''}$$

și avem

$$X_6 = -(x^1p_1 + 2x^2p_2 + 2x^3p_3), \quad X_7 = x^2p_2.$$

Făcînd o transformare de variabile $y^i = x^i + \ldots$ (termenii nescriși sînt de ordin superior în x) putem lua $X_1 = q_1$ *), iar expresiile operatorilor grupului de stabilitate vor fi

$$Y_4 = y^3q_1 - \mu\left[\frac{(y^1)^2}{2}\, q_1 + 2y^1y^2q_2 + 2y^1y^3q_3\right], \quad Y_5 = y^3q_2,$$

$$Y_6 = -(y^1q_1 + 2y^2q_2 + 2y^3q_3), \qquad Y_7 = y^2q_2$$

Scriind ecuațiile (6) relativ la transformarea X_1 rezultă că toate componentele Γ^i_{jk} nu depind de variabila y^1. Scriind apoi ecuațiile (6) relativ la transformările Y_5 și Y_7 și pentru $i = j = 1$, $k = 3$; $i = k = 1$, $j = 3$; $i = j = k = 3$; $i = j = 2$, $k = 3$; $i = k = 2$, $j = 3$ rezultă

$$\frac{\partial\Gamma^1_{13}}{\partial x^2} = \frac{\partial\Gamma^1_{31}}{\partial x^2} = \frac{\partial\Gamma^3_{33}}{\partial x^2} = \frac{\partial\Gamma^2_{23}}{\partial x^2} = \frac{\partial\Gamma^2_{32}}{\partial x^2} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = 0$$

Scriem acum ecuațiile (6) relativ la transformările Y_5, Y_7, Y_6 pentru $i = j = 2$, $k = 1$; avem

$$\frac{\partial\Gamma^2_{21}}{\partial x^2} = 0, \quad 2\frac{d\Gamma^2_{21}}{dx^3}\, x^3 + \Gamma^2_{21} = 0$$

*) Punem $q_i = \dfrac{\partial f}{\partial y^i}$.

de unde rezultă

$$\Gamma_{21}^{2} = \frac{\alpha}{(x^3)^{\frac{1}{2}}}$$

și conexiunea nu este definită în origine decît dacă $\alpha = 0$. Deci avem $\Gamma_{21}^{2} = 0$.

În sfîrșit ținînd seama în ecuațiile (6) de transformarea Y_4 scrisă tot pentru $i = j = 2$, $k = 1$, rezultă

$$\mu = 0$$

condiția ca grupul să poată fi grup de mișcări al unui spațiu A_3.

Prin urmare dacă $a \neq 0, -1$ putem lua $X_1 = p_1$ în afară de cazul cînd avem $a = -2$, $b = 1$. Se arată că aceeași concluzie este valabilă și atunci cînd $a = -1$ și $a = 0$ (în acest ultim caz numai dacă $b \neq -1$).

Cînd avem $a = -2$, $b = 1$ parantezele $(X_1 X_\alpha)$ se scriu

$$(X_1X_4) = \lambda X_5, \quad (X_1X_5) = 0, \quad (X_1X_6) = -X_1, \quad (X_1X_7) = X_1 \qquad (47''')$$

și putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1 - \lambda x^1 p_2$$

Scriind ecuațiile (6) relativ la toate transformările grupului și pentru orice valori date indicilor rezultă că toate componentele conexiunii sînt nule deci în acest caz spațiul este euclidian.

Dacă $a = 0$, $b = -1$, avem

$$\begin{gathered}(X_1X_4) = 0, \quad (X_1X_5) = X_4, \quad (X_1X_6) = X_1, \quad (X_1X_7) = -X_1 \\ X_6 = x^1 p_1, \quad X_7 = -(x^1 p_1 + x^3 p_3)\end{gathered} \qquad (47^{IV})$$

și putem lua

$$X_1 = p_1 - \rho x^2 p_1$$

Componentele conexiunii spațiului A_3 corespunzător se vor scrie

$$\Gamma_{jk}^{i} = \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \psi_j \qquad (48)$$

unde

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \psi_1 = \psi_3 = 0, \quad \varphi_2 = \alpha + \beta, \ \psi_2 = \alpha - \beta \qquad (48')$$

Spațiul este în acest caz un spațiu A_3 cu grup maxim G_9.

Vom presupune de i că operatorul principal este $X_1 = p_1$. Componentele conexiunii nu depind deci de variabila x^1. Ținînd seama de transformarea X_4 avem

$$\Gamma_{1k}^{i}\delta_j^3 + \Gamma_{j1}^{i}\delta_k^3 - \Gamma_{jk}^{3}\delta_1^i = 0$$

și din aceste relații rezultă

$$\begin{gathered}\Gamma_{11}^{1} = \Gamma_{21}^{2} = \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{11}^{2} = \Gamma_{11}^{3} = \Gamma_{12}^{3} = \Gamma_{21}^{3} = \Gamma_{13}^{3} = \Gamma_{31}^{3} = 0 \\ \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{32}^{3}, \quad \Gamma_{21}^{1} = \Gamma_{23}^{3}, \quad \Gamma_{33}^{3} = \Gamma_{13}^{1} + \Gamma_{31}^{1}, \quad \Gamma_{13}^{2} + \Gamma_{31}^{2} = 0\end{gathered} \qquad (49)$$

Să determinăm acum componentele nenule ale conexiunii. Facem mai întîi în ecuațiile (6) $i = j = 1$, $k = 2$ și ținem seama de transformările X_5 și X_6, avem succesiv

$$\frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^2} = 0, \quad a\left(\frac{\mathrm{d}\Gamma_{12}^1}{\mathrm{d}x^3} x^3 + \Gamma_{12}^1\right) = 0$$

și dacă $a \neq 0$. Conexiunea nu este definită în origine decît pentru $\Gamma_{12}^1 = 0$. La fel rezultă că în ipoteza $a \neq 0$ trebuie să avem

$$\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{33}^2 = \Gamma_{33}^3 = 0.$$

Scriind acum ecuațiile (6) pentru $i = 1$, $j = k = 2$ rezultă dacă ținem seama de transformările X_5, X_6, X_7

$$\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^2} = 0, \quad a\frac{\mathrm{d}\Gamma_{22}^1}{\mathrm{d}x^3} x^3 + (a-1)\,\Gamma_{22}^1 = 0, \quad b\frac{\mathrm{d}\Gamma_{22}^1}{\mathrm{d}x^3} x^3 + (b+2)\Gamma_{22}^1 = 0 \quad (50)$$

și ultimele două ecuații nu sînt compatibile decît dacă avem

$$\frac{a}{b} = \frac{a-1}{b+2}$$

deci $2a + b = 0$.

Presupunînd că $2a + b \neq 0$, deci $\Gamma_{22}^1 = 0$ avem pentru $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$.

$$\frac{\partial \Gamma_{23}^1}{\partial x^2} = 0, \quad a\frac{\mathrm{d}\Gamma_{23}^1}{\mathrm{d}x^3} x^3 + (a-1)\,\Gamma_{23}^1 = 0, \quad b\frac{\mathrm{d}\Gamma_{23}^1}{\mathrm{d}x^3} x^3 + (b+1)\Gamma_{23}^1 = 0 \quad (50')$$

și iarăși ultimele două ecuații nu sînt compatibile decît dacă

$$a + b = 0$$

la fel avem și pentru $i = 2$, $j = 1$, $k = 3$,

$$\frac{\partial \Gamma_{13}^2}{\partial x^2} = 0, \quad a\frac{\mathrm{d}\Gamma_{13}^2}{\mathrm{d}x^3} x^3 + (a+1)\,\Gamma_{13}^2 = 0, \quad b\frac{\mathrm{d}\Gamma_{13}^2}{\mathrm{d}x^3} x^3 + (b-1)\,\Gamma_{13}^2 = 0 \quad (50'')$$

și găsim din nou condiția $a + b = 0$.

Presupunem că avem $2a + b \neq 0$, $a + b \neq 0$ deci $\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = 0$ și facem în ecuațiile (6) $i = 1$, $j = k = 3$; avem

$$\frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x^2} = 0, \quad a\frac{\mathrm{d}\Gamma_{33}^1}{\mathrm{d}x^3} x^3 + (a-1)\,\Gamma_{33}^1 = 0, \quad b\left(\frac{\mathrm{d}\Gamma_{33}^1}{\mathrm{d}x^3} x^3 + \Gamma_{33}^1\right) = 0$$

și dacă $b \neq 0$ conexiunea nu este definită în origine decît dacă $\Gamma_{33}^1 = 0$. În ipoteza că $b = 0$, dar $a \neq 0$ singura componentă nenulă a conexiunii este

$$\Gamma_{33}^1 = \gamma\,(x^3)^{\frac{1-a}{a}}$$

În acest caz însă toate componentele tensorului de curbură sînt nule deci spațiul este euclidian.

Prin urmare dacă sînt îndeplinite condițiile

$$a \neq 0, \quad 2a + b \neq 0, \quad a + b \neq 0$$

spațiul este euclidian.

Să studiem acum și cazurile lăsate deoparte.

1°. $a \neq 0$, $2a + b = 0$. Din a doua ecuație (50) avem

$$\Gamma^1_{22} = \alpha (x^3)^{\frac{1-a}{a}} \tag{51}$$

Ținînd seama de transformarea X_5 rezultă

$$\frac{\partial \Gamma^1_{23}}{\partial x^2} x^3 + \Gamma^1_{22} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma^1_{32}}{\partial x^2} x^3 + \Gamma^1_{22}, \quad \frac{\partial \Gamma^1_{33}}{\partial x^2} x^3 + \Gamma^1_{23} + \Gamma^1_{32} = 0$$

și de aici scoatem

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = -\alpha x^2 (x^3)^{\frac{1-2a}{a}}, \quad \Gamma^1_{33} = \alpha (x^2)^2 (x^3)^{\frac{1-3a}{a}} \tag{51'}$$

Restul componentelor conexiunii sînt nule. Spațiile avînd conexiunea dată de formulele (51), (51′) cu $0 < a < 1$, mai admit însă și transformarea $x^2 p_1$. Grupul de mișcări are deci mai mult decît 5 parametri.

2°. $a \neq 0$, $a + b = 0$. La fel ca mai sus găsim că singurele componente nenule ale conexiunii sînt

$$\Gamma^1_{23} = (\alpha - \beta)(x^3)^{\frac{1-a}{a}}, \quad \Gamma^1_{32} = (\alpha + \beta)(x^3)^{\frac{1-a}{a}}, \quad \Gamma^1_{33} = -2\alpha x^2 (x^3)^{\frac{1-2a}{a}}$$
$$\Gamma^2_{13} = -\Gamma^2_{31} = \gamma (x^3)^{-\frac{1+a}{a}} \tag{52}$$

Conexiunea nu este însă definită decît în cazul $0 < a < 1$ cînd însă trebuie să avem $\gamma = 0$, și în cazul $-1 < a < 0$ cînd trebuie să avem $\alpha = \beta = 0$. În primul caz spațiul corespunzător mai admite și transformarea $x^2 p_1$, iar în al doilea caz transformarea $x^1 p_2$; prin urmare grupul de mișcări are un număr de parametri superior lui 5.

3°. $a = b = 0$. Avem atunci $X_6 = x^1 p_1$, $X_7 = x^2 p_2$ și singurele componente ale conexiunii sînt

$$\Gamma^1_{13} = \Phi_1 (x^3) + \Psi_1 (x^3), \quad \Gamma^1_{31} = \Phi_1 (x^3) - \Psi_1 (x^3), \quad \Gamma^3_{33} = 2\Phi_1 (x^3)$$
$$\Gamma^2_{23} = \Phi_2 (x^3) + \Psi_2 (x^3), \quad \Gamma^2_{32} = \Phi_2 (x^3) - \Psi_2 (x^3) \tag{53}$$

unde Φ_1, Φ_2, Ψ_1, Ψ_2 sînt funcții arbitrare de variabila x^3. Regăsim astfel o categorie de spații A_3 cu grup intranzitiv G_6[4].

4°. $a = 0$, $b = -1$. Avem

$$X_6 = x^1 p_1, \quad X_7 = x^3 p_3$$

și conexiunea are componentele nenule

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{32} = \alpha + \beta, \quad \Gamma^1_{21} = \Gamma^3_{23} = \alpha - \beta, \quad \Gamma^2_{22} = \gamma \tag{54}$$

și aceste spații au un grup de mișcări maxim cu 9 parametri.

5°. $a = 0$, $b \neq 0$. Avem

$$X_6 = x^1 p_1, \; X_7 = (1 + b)\, x^2 p_2 + b x^3 p_3$$

și componentele nenule ale conexiunii se scriu sub forma

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{32} = (\alpha + \beta)\,(x^3)^{-\frac{1+b}{b}}, && \Gamma^1_{21} = \Gamma^3_{23} = (\alpha - \beta)\,(x^3)^{-\frac{1+b}{b}} \\
&\Gamma^1_{13} = -(\alpha + \beta)\, x^2\,(x^3)^{-\frac{1+2b}{b}}, && \Gamma^1_{31} = -(\alpha - \beta)\, x^2\,(x^3)^{-\frac{1+2b}{b}} \\
&\Gamma^2_{22} = \gamma\,(x^3)^{-\frac{1+b}{b}}, && \Gamma^3_{33} = -2\alpha x^2\,(x^3)^{-\frac{1+2b}{b}} \\
&\Gamma^2_{23} = (\alpha - \beta - \gamma)\, x^2\,(x^3)^{-\frac{1+2b}{b}}, && \Gamma^2_{32} = (\alpha + \beta - \gamma)\, x^2\,(x^3)^{-\frac{1+2b}{b}} \\
&\Gamma^2_{33} = (\gamma - 2\alpha)\,(x^2)^2\,(x^3)^{-\frac{1+3b}{b}}
\end{aligned} \tag{55}$$

Această conexiune nu este definită în origine decît dacă $-1 < b < 0$.

Printr-o transformare de variabile aleasă convenabil putem face să avem $\gamma = 2\alpha$ și atunci conexiunea spațiului se poate scrie sub forma (48) cu

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = \psi_1 = 0, \; \varphi_2 = (\alpha + \beta)\,(x^3)^{-\frac{1+b}{b}}, \; \varphi_3 = -(\alpha + \beta)\, x^2\,(x^3)^{-\frac{1+2b}{b}}, \\
&\psi_2 = (\alpha - \beta)\,(x^3)^{-\frac{1+b}{b}}, \; \psi_3 = -(\alpha - \beta)\, x^2\,(x^3)^{-\frac{1+2b}{b}}
\end{aligned} \tag{48''}$$

Aceste spații mai admit și transformarea $x^2 p_1$ deci grupul de mișcări are mai mult de 5 parametri. Rezultă

LEMA 4. *Nu există spații A_3 neomogene cu grup de mișcări G_5 al cărui grup de stabilitate să fie dat de transformările infinitezimale (IV).*

Observație. Dacă în formulele (48'') facem $b = -\frac{1}{2}$ atunci obținem o clasă de spații A_3 a căror conexiune este dată de formulele (48) cu

$$\varphi_1 = \psi_1 = 0, \; \varphi_2 = (\alpha + \beta)\, x^2, \; \varphi_3 = -(\alpha + \beta)\, x^2, \; \psi_2 = (\alpha - \beta)\, x^3,$$
$$\psi_3 = -(\alpha - \beta)\, x^2$$

Regăsim în acest mod spațiile A_3 cu forma Pfaff invariantă diferită de o diferențială totală exactă cu grup maxim G_7; aceste spații au fost puse în evidență de G. Vrănceanu [10].

§ 5. SPAȚIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (V)

Grupul de stabilitate are transformările infinitezimale

$$X_4 = x^3 p_2, \; X_5 = x^1 p_2, \; X_6 = x^1 p_1 + aU, \; X_7 = x^2 p_2 + bU$$

şi ecuaţiile sale de structură se scriu

$$\begin{aligned} &(X_4X_5) = 0, \quad (X_4X_6) = 0, \quad (X_4X_7) = X_4 \\ &(X_5X_6) = -X_5, \quad (X_5X_7) = X_5, \quad (X_6X_7) = 0 \end{aligned} \tag{56}$$

Varietatea liniară unidimensională invariantă a grupurilor (V) este dreapta $x^1 = x^3 = 0$. Operatorul principal va fi deci de forma

$$X_2 = p_2 + a^s(x)\, p_s$$

Dacă $b \neq 0, -1$, putem alege convenabil operatorul principal astfel încît să avem

$$\begin{aligned} &(X_2X_4) = c^\alpha_{24}X_\alpha, (X_2X_5) = c^\alpha_{25}X_\alpha, (X_2X_6) = aX_2 + c^\alpha_{26}X_\alpha, \\ &(X_2X_7) = (1+b)\, X_2 \end{aligned} \tag{57}$$

şi identităţile $(X_2X_4X_7) = 0$, $(X_2X_5X_7) = 0$, $(X_2X_6X_7) = 0$ se scriu

$$\begin{aligned} &[(X_2X_4)\, X_7] - (2+b)\,(X_2X_4) = 0 \\ &[(X_2X_5)\, X_7] - (2+b)\,(X_2X_5) = 0 \\ &[(X_2X_6)\, X_7] - (1+b)\,(X_2X_6) = 0 \end{aligned}$$

şi rezultă $c^\alpha_{26} = 0$, iar dacă avem în plus şi $b \neq -2$ atunci şi constantele c^α_{24}, c^α_{25} sînt nule. Dacă $b = -2$ atunci considerînd şi identitatea $(X_3X_4X_5) = 0$, ecuaţiile (57) devin

$$\begin{aligned} &(X_2X_4) = c^6_{24}(X_6 + X_7), (X_2X_5) = c^\alpha_{25}X_6, (X_2X_6) = aX_2, \\ &(X_2X_7) = (1+b)\, X_2 \end{aligned} \tag{57'}$$

Identităţile $(X_2X_4X_6) = 0$, $(X_2X_5X_6) = 0$ se scriu

$$\begin{aligned} &[(X_2X_4)\, X_6] - a\,(X_2X_4) = 0 \\ &[(X_2X_5)\, X_6] - (a-1)\,(X_2X_5) = 0 \end{aligned}$$

şi rezultă

$$ac^6_{24} = 0, \quad (a-1)\, c^6_{25} = 0$$

Se poate arăta că şi dacă $a = 0$ sau 1 trebuie să avem $c^6_{24} = c^6_{25} = 0$ altfel grupul respectiv nu ar mai fi grupul de mişcări al unui spaţiu A_3.

Presupunînd că $b = -1$ putem face să avem

$$\begin{aligned} &(X_2X_4) = c^5_{24}X_5 + c^6_{24}X_6 + c^7_{24}X_7 \\ &(X_2X_5) = c^4_{25}X_4 + c^6_{25}X_6 + c^7_{25}X_7, \\ &(X_2X_6) = aX_2 + c^\alpha_{26}X_\alpha \\ &(X_2X_7) = c^6_{27}X_6 + c^7_{27}X_7 \end{aligned} \tag{58}$$

și identitățile $(X_2X_4X_7) = 0$, $(X_2X_5X_7) = 0$, $(X_2X_6X_7) = 0$, $(X_2X_4X_6) = 0$, $(X_2X_5X_6) = 0$ se scriu succesiv

$$\begin{aligned}
&[(X_2X_4)\,X_7] - (X_2X_4) + c_{27}^7 X_4 = 0\\
&[(X_2X_5)\,X_7] - (X_2X_5) + (c_{27}^7 - c_{27}^6)\,X_5 = 0\\
&[(X_2X_6)\,X_7] = 0\\
&[(X_2X_4)\,X_6] - a\,(X_2X_4) + c_{26}^7 X_4 = 0\\
&[(X_2X_5)\,X_6] - (a-1)\,(X_2X_5) + (c_{26}^7 - c_{26}^6)\,X_5 = 0
\end{aligned}$$

și ne dau

$$\begin{gathered}
(X_2X_4) = c_{24}^5 X_5,\quad (X_2X_5) = c_{25}^4 X_4,\quad (X_2X_6) = aX_2,\quad (X_2X_7) = 0\\
ac_{24}^5 = 0,\quad (a-1)\,c_{25}^4 = 0
\end{gathered} \tag{58'}$$

Dacă $a = 1, b = -1$ atunci $X_6 = 2x^1p_1 + x^2p_2 + x^3p_3$, $X_7 = -(x^1p_1 + x^3p_3)$ iar $c_{24}^5 = 0$ și putem satisface la structura respectivă luînd

$$X_2 = p_2 + c_{25}^4 x^3 p_1$$

și scriind ecuațiile (6) relativ la toate transformările grupului rezultă că dacă $c_{25}^4 \neq 0$, conexiunea spațiului are toate componentele nule, deci spațiul este euclidian.

Dacă $a = 0$, $b = -1$ atunci $X_6 = x^1p_1$, $X_7 = -(x^1p_1 + x^3p_3)$ și putem din nou arăta că trebuie să avem $c_{24}^5 = 0$. Rezultă că dacă $b \neq 0$ vom putea lua $X_2 = p_2$. Se poate însă arăta că aceeași concluzie este valabilă și în cazul $b = 0$.

Luînd $X_2 = p_2$ rezultă că avem

$$\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^2} = 0$$

și apoi ținînd seama de transformările X_4 și X_5 rezultă că sînt valabile relațiile (7) și (7') din care scoatem

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0\\
&\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = 0\\
&\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{21}^2,\quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{12}^2,\quad \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{32}^2\\
&\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2,\quad \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2,\quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^2
\end{aligned} \tag{59}$$

Scriind ecuațiile (6) relativ la transformările X_6 și X_7 pentru $i = 2$, $j = k = 1$ avem

$$(1+a)\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^1}\,x^1 + a\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^3}\,x^3 + (2+a)\,\Gamma_{11}^2 = 0$$

$$b\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^1}\,x^1 + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^3}\,x^3\right) + (b-1)\,\Gamma_{11}^2 = 0$$

Aceste ecuaţii pot fi compatibile numai dacă am avea

$$\frac{b}{1+a} = \frac{b}{a} = \frac{b-1}{2+a}$$

şi obţinem un sistem de ecuaţii algebrice incompatibil. Trebuie deci să avem

$$\Gamma_{11}^2 = 0 \tag{59'}$$

La fel rezultă şi

$$\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{33}^2 = 0 \tag{59''}$$

Ţinînd seama de formulele (59), (59'), (59'') rezultă că putem scrie componentele conexiunii spaţiului sub forma (48) cu $\varphi_2 = \psi_2 = 0$ şi φ_1, ψ_1, φ_3, ψ_3 funcţii de variabilele x^1 şi x^3.

Ţinînd seama iarăşi de transformările X_6 şi X_7 în ecuaţiile (6) rezultă că funcţia φ_1 satisface la ecuaţiile

$$\begin{gathered}(1+a)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^1}x^1 + a\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^3}x^3 + (1+a)\varphi_1 = 0 \\ b\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^1}x^1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x^3}x^3 + \varphi_1\right) = 0\end{gathered} \tag{60}$$

De asemenea funcţia ψ_1 satisface la ecuaţii asemănătoare. Se observă uşor că ecuaţiile (60) nu sînt compatibile decît dacă $b = 0$.

La fel avem

$$\begin{gathered}(1+a)\frac{\partial\varphi_3}{\partial x^1}x^1 + a\frac{\partial\varphi_3}{\partial x^3}x^3 + a\varphi_3 = 0 \\ b\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x^1}x^1 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x^3}x^3 + \varphi_3\right) = 0\end{gathered} \tag{60'}$$

şi ecuaţia asemănătoare pentru ψ_3. Iarăşi nu avem compatibilitate decît pentru $b = 0$.

Prin urmare dacă $b \neq 0$, trebuie să avem $\varphi_1 = \psi_1 = \varphi_3 = \psi_3 = 0$ şi spaţiul corespunzător este afin euclidian. Avem deci

LEMA 5. *Nu există spaţii A_3 cu grup intranzitiv G_5 avînd grupul de stabilitate (V) dacă $b \neq 0$.*

Presupunem acum că $b = 0$. Atunci putem determina pe φ_1 şi φ_3 din primele ecuaţii (60) respectiv (60'). Sistemele asociate sînt

$$\frac{dx^1}{(1+a)x^1} = \frac{dx^3}{ax^3} = -\frac{d\varphi_1}{(1+a)\varphi_1}; \quad \frac{dx^1}{(1+a)x^1} = \frac{dx^3}{ax^3} = -\frac{d\varphi_3}{a\varphi_3} \tag{61}$$

Primul din aceste sisteme are integralele prime

$$x^1\varphi_1 = C_1, \quad (x^3)^{1+a} = C_2(x^1)^a$$

şi deci φ_1 are expresia

$$\varphi_1 = \frac{1}{x^1}\Phi\left[x^3\left(\frac{x^3}{x^1}\right)^a\right] \tag{62}$$

unde Φ este o funcție arbitrară. Al doilea sistem (61) are integralele prime

$$x^3\varphi_3 = C_3, \quad (x^3)^{1+a} = C_4 (x^1)^a$$

și rezultă

$$\varphi_3 = \frac{1}{x^3} \Psi \left[x^3 \left(\frac{x^3}{x^1} \right)^a \right] \tag{62'}$$

cu Ψ o funcție arbitrară.

Pentru ψ_1 și ψ_3 se obțin expresii asemănătoare

$$\psi_1 = \frac{1}{x^1} \Theta \left[x^3 \left(\frac{x^3}{x^1} \right)^a \right], \quad \psi_3 = \frac{1}{x^3} \mathrm{X} \left[x^3 \left(\frac{x^3}{x^1} \right)^a \right] \tag{62''}$$

Θ și X fiind de asemenea funcții arbitrare.

Observăm că dacă $a = -1$ atunci avem

$$\varphi_1 = \Phi (x^1), \quad \psi_1 = \Theta (x^1), \quad \varphi_3 = \frac{\Psi (x^1)}{x^3}, \quad \psi_3 = \frac{\mathrm{X} (x^1)}{x^3} \tag{63}$$

iar dacă $a = 0$

$$\varphi_1 = \frac{\Phi (x^3)}{x^1}, \quad \psi_1 = \frac{\Theta (x^3)}{x^1}, \quad \varphi_3 = \Psi_1 (x^3) \tag{63'}$$

În general conexiunea spațiilor considerate este dată de formulele (48), cu $\varphi_2 = \psi_2 = 0$, iar φ_1, ψ_1, φ_3, ψ_3 dați de formulele (62), (62'), (62''). Putem enunța

TEOREMA 3. *Spațiile neomogene A_3 cu varietăți de intranzitivitate unidimensionale, avînd grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale x^3p_1, x^1p_2, $x^1p_1 + aU$, x^2p_2 sînt spațiile a căror conexiune este dată de formulele* (48), (62), (62'), (62'') *(cu $\varphi_2 = \psi_2 = 0$) și au un grup intranzitiv de mișcări cu 5 parametri.*

§ 6. SPAȚIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (VI)

Operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului de stabilitate sînt

$$\text{(VI)} \quad X_4 = x^3p_1, \quad X_5 = x^3p_2, \quad X_6 = x^1p_2, \quad X_7 = x^2p_2 + aU$$

iar ecuațiile de structură ale acestui grup se scriu

$$\begin{array}{lll} (X_4X_5) = 0, & (X_4X_6) = X_5, & (X_4X_7) = 0 \\ (X_5X_6) = 0, & (X_5X_7) = X_5; & (X_6X_7) = X_6 \end{array}$$

Varietatea liniară unidimensională invariantă a grupului (VI) este dreapta $x^1 = x^3 = 0$ și operatorul principal este de forma

$$X_2 = p_2 + a^s (x) p_s$$

Parantezele (X_2X_α) se vor scrie

$$(X_2X_4) = c^\alpha_{24} X_\alpha, \quad (X_2X_5) = c^\alpha_{25} X_\alpha, \quad (X_2X_\alpha) = c^\alpha_{26} X_\alpha,$$
$$(X_2X_7) = (1 + a) X_2 + c^\alpha_{27} X_\alpha \tag{64}$$

Făcînd transformarea de operator

$$\overline{X}_2 = X_2 + c^5_{24}X_6 + c^5_{25}X_7 - c^5_{26}X_4$$

putem anula constantele c^5_{24}, c^5_{26}, c^5_{25}. Dacă $a \neq 0$ putem anula şi constanta c^5_{27}.

Presupunînd deci că $c^5_{24} = c^5_{26} = c^5_{25} = 0$, identităţile $(X_2X_\alpha X_\beta) = 0$ se scriu

$$\begin{aligned}
&[(X_2X_4)\,X_5] + c^6_{25}X_5 = 0\\
&[(X_2X_5)\,X_6] + c^7_{26}X_5\\
&[(X_2X_4)\,X_6] - (X_2X_5) + c^6_{25}X_5 = 0\\
&[(X_2X_4)\,X_7] - (1+a)\,(X_2X_4) + c^6_{27}X_5 = 0\\
&[(X_2X_5)\,X_7] - (2+a)\,(X_2X_5) + c^7_{27}X_5 = 0\\
&[(X_2X_6)\,X_1] - (2+a)\,(X_2X_5) - c^4_{27}X_5 + c^7_{27}X_6 = 0
\end{aligned}$$

şi ecuaţiile (64) devin

$$(X_2X_4) = \rho X_4 + \lambda X_6, \quad (X_2X_5) = 0, \quad (X_2X_6) = -\rho X_6,$$
$$(X_2X_7) = (1+a)\,X_2 + \mu X_5 \qquad (64')$$

avînd

$$(1+a)\,\rho = 0, \quad a\lambda = a\mu = 0$$

Deci dacă $a \neq 0, -1$ avem $\rho = \lambda = \mu = 0$ şi putem satisface la structura corespunzătoare luînd $X_2 = p_2$.

Se poate arăta că şi pentru $a = 0$, trebuie să avem $\lambda = \mu = 0$ deci şi atunci putem lua $X_2 = p_2$.

Dacă $a = -1$, atunci putem satisface la structura respectivă luînd

$$X_2 = p_2 - \rho x^1 p_1$$

şi considerînd ecuaţiile (6) scrise pentru toate transformările grupului rezultă că spaţiul este euclidian dacă $\rho \neq 0$.

Vom presupune deci că în toate cazurile avem

$$X_2 = p_2$$

Atunci componentele conexiunii nu depind de variabila x^2 şi ţinînd seama de transformările X_5 şi X_6 rezultă că sînt valabile formulele (59).

Scriind acum ecuaţiile (6) relativ la transformările X_4 şi X_7 pentru $i = j = k = 1$; avem succesiv

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} = 0, \quad a\left(\frac{d\Gamma^1_{11}}{dx^3}\,x^3 + \Gamma^1_{11}\right) = 0$$

şi dacă $a \neq 0$ conexiunea nu este definită în origine decît dacă $\Gamma^1_{11} = 0$.

La fel se arată că în ipoteza $a \neq 0$ trebuie să avem

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{33} = 0$$

Singurele componente ale conexiunii care nu sînt nule (în ipoteza $a \neq 0$) sînt

$$\Gamma^2_{11} = \alpha (x^3)^{\frac{1-a}{a}}, \quad \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = -\alpha x^1 (x^3)^{\frac{1-2a}{a}}, \quad \Gamma^2_{33} = \alpha (x^1)^2 (x^3)^{\frac{1-3a}{a}}$$

Această conexiune am mai găsit-o (formulele (51')) și aparține unor spații A_3 care au un grup de mișcări cu un număr de parametri superior lui 5. Rezultă

LEMA 6. *Nu există spații A_3 cu grup intranzitiv G_5 avînd grupul de stabilitate VI, dacă $a \neq 0$.*

Să presupunem că $a = 0$, deci

$$X_7 = x^2 p_2$$

Atunci scriind ecuațiile (6) relativ la transformarea X_7 pentru $i = 2$, $j = k = 1$; $i = 2$, $j = 1$, $k = 3$; $i = 2$, $j = 3$, $k = 1$; $i = 2$, $j = k = 3$ rezultă

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{33} = 0$$

și componentele nenule ale conexiunii se pot scrie sub forma (48) cu $\varphi_2 = \psi_2 = 0$.

Scriind ecuațiile (6) relativ la transformarea X_4 pentru $i = j = k = 1$; $i = j = 2$, $k = 1$; $i = j = 3$, $k = 1$; $i = 2$, $j = 1$, $k = 2$; $i = 3$, $j = 1$, $k = 3$, avem

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} = \frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial x^1} = \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} = \frac{\partial \Gamma^3_{31}}{\partial x^1} = \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial x^1} = 0$$

deci Γ^1_{11}, Γ^2_{21}, Γ^2_{12}, Γ^3_{31}, Γ^3_{13}, sînt funcții arbitrare de variabila x^3, același lucru este valabil deci și pentru funcțiile φ_1 și ψ_1; vom lua

$$\varphi_1 = x^3 \Phi (x^3), \quad \psi_1 = x^3 \Psi (x^3) \tag{65}$$

unde Φ și Ψ sînt funcții arbitrare.

Scriind acum ecuațiile (6) relativ la transformarea X_4 pentru $i = j = 1$, $k = 3$; $i = 1$, $j = 3$, $k = 1$ rezultă

$$\varphi_3 = -x^1 \Phi (x^3) + \Theta (x^3), \quad \psi_3 = -x^1 \Psi (x^3) + X (x^3) \tag{65'}$$

unde Θ și X sînt alte funcții arbitrare

Putem enunța:

TEOREMA 4. *Spațiile neomogene A_3 avînd varietăți de intranzivitate unidimensionale și avînd grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale $x^3 p_1$, $x^3 p_2$, $x^1 p_2$, $x^2 p_2$, sînt spațiile avînd conexiunea dată de formulele (48), (65), (65') cu $\varphi_2 = \psi_2 = 0$, și posedă un grup de mișcări cu 5 parametri.*

§ 7. SPAŢIILE A_3 CU GRUPUL DE STABILITATE (VII)

Grupul de stabilitate are transformările infinitezimale

$$X_4 = x^3 p_1,\ X_5 = x^3 p_2,\ X_6 = x^1 p_2,\ X_7 = x^1 p_1 + c x^2 p_2 + aU$$

iar ecuaţiile sale de structură se scriu

$$\begin{aligned} &(X_4X_5) = 0, \quad (X_4X_6) = X_5, \quad (X_4X_7) = X_4 \\ &(X_5X_6) = 0, \quad (X_5X_7) = cX_5, \quad (X_6X_7) = (c-1)\,X_6 \end{aligned} \tag{66}$$

Ca şi paragraful precedent varietatea liniară invariantă a grupului este dreapta $x^1 = x^3 = 0$, iar operatorul principal este de forma $X_2 = p_2 + a^s(x)\,p_s$. Alegînd convenabil acest operator parantezele $(X_2 X_\alpha)$ se vor scrie

$$\begin{aligned} &(X_2X_4) = c_{24}^4 X_4 + c_{24}^6 X_6,\ (X_2X_5) = c_{25}^\alpha X_\alpha \\ &(X_2X_6) = c_{26}^4 X_4 + c_{26}^6 X_6 + c_{26}^7 X_7,\ (X_2X_7) = (c+a)\,X_2 + c_{27}^\alpha X_\alpha \end{aligned} \tag{67}$$

iar dacă $a \neq 0$ putem anula şi pe c_{27}^5.

Identităţile $(X_2X_\alpha X_\beta) = 0$ se scriu

$$\begin{aligned} &[(X_2X_4)\,X_5] = 0 \\ &[(X_2X_4)\,X_6] - (X_2X_5) + c_{26}^6 X_5 + c_{26}^7 X_4 = 0 \\ &[(X_2X_4)\,X_7] - (c+a+1)\,(X_2X_4) + c_{27}^6 X_5 + c_{27}^7 X_4 = 0 \\ &[(X_2X_5)\,X_6] + cc_{26}^7 X_5 = 0 \\ &[(X_2X_5)\,X_7] - (2c+a)\,(X_2X_5) + cc_{27}^7 X_5 = 0 \\ &[(X_2X_6)\,X_7] - (2c+a-1)\,(X_2X_6) - c_{27}^4 X_5 + (c-1)\,c_{27}^7 X_6 = 0 \end{aligned}$$

şi ne dau

$$\begin{aligned} &c_{25}^6 = c_{25}^7 = c_{27}^4 = c_{27}^6 = 0,\ (c+1)\,c_{25}^4 = (c+1)\,c_{26}^7 = 0 \\ &(a+2)\,c_{24}^6 = 0,\ c_{27}^7 = (c+a)\,c_{24}^4,\ c_{25}^5 = c_{24}^4 + c_{26}^6 \\ &(2c+a)\,c_{26}^4 = 0,\ (c+1)\,c_{24}^4 + c_{26}^6 = 0,\ (c-1)\,c_{24}^4 - c_{26}^6 = 0. \end{aligned}$$

De aici rezultă că dacă sînt îndeplinite condiţiile

$$a \neq 0,\ -2;\ c \neq 0,\ -1;\ c + a \neq 0,\ 2c + a \neq 0, \tag{68}$$

avem

$$(X_2X_4) = 0,\ (X_2X_5) = 0,\ (X_2X_6) = 0,\ (X_2X_7) = (c+a)\,X_2 \tag{67'}$$

şi putem deci lua

$$X_2 = p_2 \tag{69}$$

O analiză mai amănunţită a cazurilor omise ne arată că aceeaşi concluzie este valabilă numai dacă nu avem

$$c + a = 0,\ c = 0$$

Dacă $c = 0$, dar $a \neq 0$ atunci ecuațiile de structură (67) devin

$$(X_2X_4) = \rho X_4,\ (X_2X_5) = 2\rho X_5,\ (X_2X_6) = \rho X_6,\ (X_2X_7) = aX_2 \quad (67'')$$

și putem satisface la această structură luînd

$$X_2 = p_2 + \rho x^1 p_1 + 2\rho x^3 p_3 \quad (69')$$

Presupunînd că $\rho \neq 0$ și scriind ecuațiile (6) relativ la toate transformările grupului rezultă că toți Γ^i_{jk} sînt nuli, deci spațiul este euclidian; va trebui deci să presupunem $\rho = 0$.

Dacă $c + a = 0$, dar $a \neq 0$ atunci ecuațiile (67) devin

$$(X_2X_4) = \rho X_4,\ (X_2X_5) = (\rho + \lambda) X_5,\ (X_2X_6) = \lambda X_6,\ (X_2X_7) = \mu X_5 \quad (67''')$$

și se poate arăta că trebuie să avem $\mu = 0$, în caz contrar grupul nu poate fi grup de mișcări al unui spațiu A_3. Putem deci lua

$$X_2 = p_2 + \lambda x^1 p_1 + (\rho + \lambda)\, x^3 p_3 \quad (69'')$$

Dacă $\rho = \lambda$, revenim la expresia (69') a operatorului X_2 și calcule similare ne arată că spațiul este euclidian. De asemenea va rezulta că spațiul este euclidian dacă nu este îndeplinită una din condițiile

$$\rho + \lambda + a\lambda = 0,\quad \rho + \lambda + a\rho = 0 \quad (70)$$

Dacă este îndeplinită prima din condițiile (70) atunci toate componentele conexiunii sînt nule în afară de

$$\Gamma^2_{13} = -\Gamma^2_{31} = \eta\,(x^3)^{-\frac{2a+1}{a}}$$

și aceste spații mai admit și alte transformări decît cele considerate, de exemplu $x^2 p_1$; ele nu pot avea deci un grup total de mișcări cu 5 parametri.

Dacă $\rho + \lambda = -a\rho$ atunci avem

$$X_2 = p_2 - \rho X_7$$

și putem lua iarăși pentru operatorul X_2, expresia (69).

Să presupunem acum că $a = c = 0$. Ecuațiile de structură (67) capătă iarăși forma (67''') (cu $a = 0$) și expresia operatorului X_2 este dată tot de formula (69''); cum în acest caz, avem $X_7 = x^1 p_1$, rezultă că putem lua

$$X_2 = p_2 + \rho x^3 p_3$$

Și în acest caz rezultă că dacă $\rho \neq 0$, spațiul este euclidian (toate componentele conexiunii fiind nule).

Deci în definitiv vom lua $X_2 = p_2$, și prin urmare componentele conexiunii nu depind de variabila x^2. Ținînd apoi seama de transformările X_5 și X_6 rezultă că sînt valabile formulele (59). Scriind apoi formulele (6)

relativ la transformările X_4 și X_7 determinăm componentele nenule ale conexiunii :

$$\Gamma^1_{11} = 2\alpha\,(x^3)^{-\frac{1+a}{a}}, \qquad \Gamma^3_{33} = -\,2\alpha x^1\,(x^3)^{-\frac{1+2a}{a}}$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = (\alpha+\beta)\,(x^3)^{-\frac{1+a}{a}}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = (\alpha-\beta)\,(x^3)^{-\frac{1+a}{a}}$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = -\,(\alpha+\beta)\,x^1\,(x^3)^{-\frac{1+2a}{a}}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = -\,(\alpha-\beta)\,x^1\,(x^3)^{-\frac{1+2a}{a}} \tag{71}$$

$$\Gamma^2_{11} = \gamma\,(x^3)^{\frac{c-a-2}{a}}, \quad \Gamma^2_{33} = \gamma\,(x^1)^2\,(x^3)^{\frac{c-3a-2}{a}} + (\eta_1+\eta_2)\,x^1\,(x^3)^{\frac{c-2a-1}{a}} + \chi\,(x^3)^{\frac{c-a}{a}}$$

$$\Gamma^2_{13} = -\,\gamma x^1\,(x^3)^{\frac{c-2a-2}{a}} + \eta_1\,(x^3)^{\frac{c-a-1}{a}}, \quad \Gamma^2_{31} = -\,\gamma\,x^1\,(x^3)^{\frac{c-2a-2}{a}} + \eta_2\,(x^3)^{\frac{c-a-1}{a}}$$

Am exclus cazul $a = 0$.

Ținînd seama de expresie lui Γ^1_{11} rezultă că pentru ca această componentă să fie definită în origine trebuie să avem

$$-\frac{1+a}{a} = p \qquad (p \text{ întreg pozitiv})$$

Ținînd seama și de expresia lui Γ^2_{11} rezultă că sau avem

$$1 \leqslant c < 2$$

și atunci componentele nenule ale conexiunii se scriu

$$\Gamma^1_{11} = 2\alpha\,(x^3)^p, \qquad \Gamma^3_{33} = -\,2\alpha x^1\,(x^3)^{p-1}$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = (\alpha+\beta)\,(x^3)^p, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = (\alpha-\beta)\,(x^3)^p$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = -\,(\alpha+\beta)\,x^1\,(x^3)^{p-1}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = -\,(\alpha-\beta)\,x^1\,(x^3)^{p-1} \tag{72}$$

$$\Gamma^2_{11} = \gamma\,(x^3)^q, \quad \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = -\,\gamma x^1\,(x^3)^{q-1}, \quad \Gamma^2_{33} = \gamma\,(x^1)^2\,(x^3)^{q-2}$$

$$(q = (2-c)\,(p+1) - 1)$$

dacă $c \neq 0$, și

$$\Gamma^1_{11} = 2\alpha\,(x^3)^p, \qquad \Gamma^3_{33} = -\,2\alpha\,x^1\,(x^3)^{p-1}$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = (\alpha+\beta)\,(x^3)^p, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = (\alpha-\beta)\,(x^3)^p$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = -\,(\alpha+\beta)\,x^1\,(x^3)^{p-1}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = -\,(\alpha-\beta)\,x^1\,(x^3)^{p-1} \tag{72'}$$

$$\Gamma^2_{11} = \gamma\,(x^3)^{2p+1}, \quad \Gamma^2_{33} = \gamma\,(x^1)^2\,(x^3)^{2p-1} + (\eta_1+\eta_2)\,x^1\,(x^3)^{p-1}$$

$$\Gamma^2_{13} = -\,\gamma x^1\,(x^3)^{2p} + \eta_1\,(x^3)^p, \quad \Gamma^2_{31} = -\,\gamma x^1\,(x^3)^{2p} + \eta_2\,(x^3)^p$$

dacă $c = 0$, sau avem $\gamma = \eta_1 = \eta_2 = 0$. În acest ultim caz spațiul are un grup de mișcări avînd un număr de parametri superior lui 5.

Dacă presupunem de la început că $a = -1$ atunci componentele nenule ale conexiunii spațiului se scriu

$$\Gamma^1_{11} = 2\alpha, \qquad \Gamma^3_{33} = -2\alpha\frac{x^1}{x^3}$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \alpha + \beta, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \alpha - \beta$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = -(\alpha+\beta)\frac{x^1}{x^3}, \qquad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = -(\alpha-\beta)\frac{x^1}{x^3} \tag{73}$$

$$\Gamma^2_{11} = \gamma(x^3)^{1-c}, \quad \Gamma^2_{33} = \gamma(x^1)^2(x^3)^{-(1+c)} + (\eta_1+\eta_2)x^1(x^3)^{-(1+c)} + \chi(x^3)^{-(1+c)}$$

$$\Gamma^2_{13} = -\gamma x^1(x^3)^{-c} + \eta_1(x^3)^{-c}, \quad \Gamma^2_{31} = -\gamma x^1(x^3)^{-c} + \eta_2(x^3)^{-c}$$

Dacă $a = 0$ atunci regăsim conexiunea spațiilor A_3 cu grup intranzitiv maxim G_8, în afară de cazurile cînd $c = 2$ sau $c = 1$. În primul caz găsim conexiunea

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \Phi(x^3) + \Psi(x^3), && \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \Phi(x^3) - \Psi(x^3) \\ &\Gamma^3_{33} = 2\Phi(x^3), && \Gamma^2_{11} = (x^3)^2\Theta(x^3) \\ &\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = -x^1x^3\Theta(x^3), && \Gamma^2_{33} = (x^1)^2\Theta(x^3) \end{aligned} \tag{74}$$

unde Φ, Ψ și Θ sînt funcții arbitrare de variabila x^3.

Iar în al doilea caz găsim conexiunea

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \Phi(x^3) + \Psi(x^3), && \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \Phi(x^3) - \Psi(x^3) \\ &\Gamma^3_{33} = 2\Phi(x^3), && \Gamma^2_{33} = -x^1[\Theta(x^3) + \Omega(x^3)] \\ &\Gamma^2_{13} = x^3\Theta(x^3), && \Gamma^2_{31} = x^3\,\Omega(x^3) \end{aligned} \tag{74'}$$

unde Φ, Ψ, Θ și Ω sînt de asemenea funcții arbitrare. Avem

TEOREMA 5. *Spațiile A_3 avînd conexiunea dată de una din formulele (72), (72'), (74), (74') sînt spații care admit grupul intranzitiv de mișcări G_5 de transformări infinitezimale p_2, x^3p_1, x^3p_2, x^1p_2, $x^1p_1 + cx^2p_2 + aU$. (În primele cazuri cu $a \neq 0$, iar în ultimele două cazuri cu $a = 0$, $c = 2$ respectiv $c = 1$).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ A_3, ОБЛАДАЮЩИХ ГРУППОЙ G_5 С ОДНОМЕРНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ ИНТРАНЗИТИВНОСТИ

РЕЗЮМЕ

В работе продолжается классификация пространств A_3 с интранзитивными группами движений. Для определения групп движений автор исходит из их стационарных подгрупп, которые в рассматриваемом случае являются однородными линейными четырехпараметрическими группами с тремя переменными.

Сначала доказывается, что не существует пространств A_3 с группой G_5, стационарная подгруппа которых является одной из групп

(I), (II), (III) $\left(\text{если } a \neq -1, -\frac{2}{3}\right)$, (IV), (V) (если $b \neq 0$) и (VI) (если $a \neq 0$) (см. формулы (3)).

Доказаны следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Пространства A_3 с одномерными многообразиями интранзитивности, обладающие стационарной группой, определяемой бесконечно малыми преобразованиями x^1p_2, x^2p_1, $x^1p_1 - x^2p_2$, $x^1p_1 + x^2p_2 - 2x^3p_3$, — это пространства, связность которых дана формулами* (23); *они имеют группу движений G_5 с уравнениями* (33).

ТЕОРЕМА 2. *Пространства A_3 с одномерными многообразиями интранзитивности и со стационарной группой, определяемой бесконечно-малыми преобразованиями x^1p_2, x^2p_1, $x^1p_1 - x^2p_2$, x^3p_3* — это *пространства, связность которых дана формулами* (40); *они имеют 5-параметрическую группу движений с уравнениями* (46′).

ТЕОРЕМА 3. *Пространства A_3 с одномерными многообразиями интранзитивности и со стационарной группой, определяемой бесконечно-малыми преобразованиями x^3p_2, x^1p_2, $x^1p_1 + aU$, x^2p_2, — это пространства, связность которых дана формулами* (48), (62), (62′), (62″) *при $\varphi_2 = \psi_2 = 0$; они имеют 5-параметрическую интранзитивную группу движений.*

ТЕОРЕМА 4. *Пространства A_3 с одномерными многообразиями интранзитивности и со стационарной группой, определяемой бесконечномалыми преобразованиями x^3p_1, x^3p_2, x^1p_2, x^2p_2, — это пространства, связность которых дана формулами* (48), (65), (65′) *при $\varphi_2 = \psi_2 = 0$; они обладают 5-параметрической группой движений.*

ТЕОРЕМА 5. *Пространства A_3 со связностью, определяемой одной из формул* (72), (72′), (74), (74′), *являются пространствами, обладающими интранзитивной группой движений G_5 с бесконечно малыми преобразованиями p_2, x^3p_1, x^3p_2, x^1p_2, $x^1p_1 + cx^2p_2 + aU$. (В первых двух случаях при $a \neq 0$ а в последних двух случаях при $a = 0$ $c = 2$, соответственно, $c = 1$).*

DÉTERMINATION DES ESPACES A_3 À GROUPE G_5, AVEC DES VARIÉTÉS D'INTRANSITIVITÉ UNIDIMENSIONNELLES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur continue la classification des espaces A_3 à groupes intransitifs de mouvements. Afin de déterminer les groupes de mouvements, il prend comme point de départ leurs sous-groupes de stabilité qui, dans le cas considéré, sont des groupes linéaires et homogènes à 4 paramètres, en 3 variables.

Il montre d'abord qu'il n'y a pas d'espaces A_3 à groupe G_5 dont le sous-groupe de stabilité soit un des groupes (I), (II), (III) $\left(\text{si } a \neq -1, -\frac{2}{3}\right)$, (IV), (V) (si $b \neq 0$) et (VI) (si $a \neq 0$) (voir les formules (3)).

Il démontre les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. *Les espaces A_3 à variétés d'intransitivité unidimensionnelles et ayant un groupe de stabilité fourni par les transformations infinitésimales x^1p_2, x^2p_1, $x^1p_1 - x^2p_2$, $x^1p_1 + x^2p_2 - 2x^3p_3$ sont des espaces dont la connexion est donnée par les formules* (23), *et qui possèdent un groupe de mouvements G_5 dont les équations sont* (33).

THÉORÈME 2. *Les espaces A_3, qui ont des variétés d'intransitivité unidimensionnelles et un groupe de stabilité donné par les transformations infinitésimales x^1p_2, x^2p_1, $x^1p_1 - x^2p_2$, x^3p_3 sont des espaces dont la connexion est exprimée par les formules* (40), *et qui possèdent un groupe de mouvements à 5 paramètres dont les équations sont* (46').

THÉORÈME 3. *Les espaces A_3, qui ont des variétés d'intransitivité unidimensionnelles, ainsi qu'un groupe de stabilité donné par les transformations infinitésimales x^3p_2, x^1p_2, x^2p_2, $x^1p_1 + aU$, sont des espaces dont la connexion est donnée par les formules* (48), (62), (62'), (62'') *(avec $\varphi_2 = \psi_2 = 0$) et qui possèdent un groupe intransitif de mouvements à 5 paramètres.*

THÉORÈME 4. *Les espaces A_3 ayant des variétés d'intransitivité unidimensionnelles et un groupe de stabilité donné par les transformations infinitésimales x^3p_1, x^3p_2, x^1p_2, x^2p_2 sont des espaces dont la connexion est exprimée par les formules* (48), (65), (65') *avec $\varphi_2 = \psi_2 = 0$ et qui possèdent un groupe de mouvements à 5 paramètres.*

THÉORÈME 5. *Les espaces A_3 ayant une connexion donnée par l'une des formules* (72), (72'), (74), (74') *sont des espaces qui admettent le groupe intransitif de mouvements G_5 de transformations infinitésimales p_2, x^3p_1, x^3p_2, x^1p_2, $x^1p_1 + cx^2p_2 + aU$ (dans les premiers cas, $a \neq 0$, et dans les deux derniers cas $a = 0$, $c = 2$, respectivement $c = 1$).*

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Leçons de Géométrie Différentielle.* **I.** Bucarest 1947.
2. И. П. ЕГОРОВ, *Движения в пространствах аффинной связности.* ДАН СССР, **87**, *5*, 693 (1952); **89** *5*, 781 (1953).
3. V. DUMITRAȘ, *Asupra spațiilor A_3 cu subgrup intranzitiv maxim.* Com. Acad. R.P.R. **IX**, *9*, 899–903, (1959)
4. — *Determinarea spațiilor A_3 cu grup intranzitiv G_6.* Studii și cercetări științifice (Matematica) Iași, *2*, (1959).
5. S. LIE, F. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen.* Leipzig, **III**, 1893, 117.
6. V. DUMITRAȘ, *Asupra grupului de mișcare al unui spațiu A_n.* Com. Acad. R.P.R. **IX**, *9*, 875–879 (1959).
7. — *Asupra spațiilor A_3 cu grup tranzitiv maxim.* Analele Univ. C. I. Parhon (seria Șt. Naturii), *13*, 25, (1957).
8. G. VRĂNCEANU, *Proprietăți diferențiale globale ale spațiilor A_n cu grup maxim G_{n^2}.* Bul. Științific, Acad. R.P.R., secția de Științe Mat. și Fiz., **6**, *1*, 49–59 (1954).
9. V. DUMITRAȘ, *Determinarea spațiilor A_3 cu grup tranzitiv G_7.* Studii și cercetări matematice, **VIII**, *1–2*, 183–234 (1957).
10. G. VRĂNCEANU, *Sur les groupes de mouvements des espaces à connexion affine projectifs.* Annales de l'École Normale Supérieure, *3* (1957).

O GENERALIZARE A ECUAȚIEI FREDHOLM ȘI O NOUĂ METODĂ PENTRU STUDIUL ACESTEIA

DE

N. PRAPORGESCU

În lucrările noastre [1], [2], [3] am întîlnit ecuații Fredholm, în care sîmburele era funcție de parametrul λ. Studiem acum această ecuație cu o metodă nouă. Miezul acestei metode îl constituie faptul că funcțiile numite *minori* care au rolul fundamental nu se mai construiesc adăugînd linii și coloane la anumiți determinanți, ci cu ajutorul derivatelor în raport cu λ a acelor determinanți.

Derivata de ordinul i este funcție liniară de minorii de ordinul $1, 2, \ldots, i$ și complementarii lor, ale căror elemente sînt derivate ale elementelor determinantului inițial suma ordinelor de derivare fiind i. Operația de derivare este mai simplă și mai puțin ingenioasă.

Această metodă se aplică unei clase mai generală de ecuații, al căror sîmbure este funcție de λ. Tocmai că este simplă și naturală, se poate, ca această metodă să nu fi fost întrebuințată.

Pentru ecuația Volterra un astfel de studiu a fost făcut de N. Cioărănescu [5].

*

Elementele, de care ne folosim, sînt următoarele.

1. — *Sîmburele* este $S(\lambda, s, t)$, în loc de λ. $K(s, t)$. $S(\lambda, s, t)$ este o funcție continuă de λ, s și t într-un interval (a, b), cu derivate de orice ordin, în raport cu λ, mărginită în acel interval, astfel ca

$$|S(\lambda, s, t)| < |\lambda^p| M \qquad (S(0, s, t) = 0) \tag{1$_1$}$$

p fiind un întreg pozitiv.

2. — *Ecuația* de care ne ocupăm este

$$\varphi(s) - \int_a^b S(\lambda, s, t)\ \varphi(t)\, dt = f(s) \tag{2$_1$}$$

φ și f sînt funcții de asemenea continue în (a,b); ele, evident, depind de λ. Și variabilele, și funcțiile sînt reale.

3. — *Sîmburele rezolvant sau rezolvanta* are expresia

$$\underline{S}(\lambda, s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} S^{(\nu)}(\lambda, s, t), \quad (S^{(1)}(\lambda, s, t) = S'_\lambda(\lambda, s, t)), \tag{1_2}$$

în care

$$\underline{S}^{(\nu)}(\lambda, s, t) = \int_a^b S'_\lambda(\lambda, s, r_1)\, S(\lambda, r_1, r_2) \ldots S(\lambda, r_{\nu-1}, t)\, dr_1 \ldots dr_{\nu-1}. \tag{1_3}$$

Seria converge pentru $|\lambda^p| < 1/(b-a)M$.

Se verifică că $\underline{S}$ satisface ecuația *)

$$\underline{S}(\lambda, s, t) = S'_\lambda(\lambda, s, t) + \int S(\lambda, s, r)\, \underline{S}(\lambda, r, t)\, dr, \tag{3_1}$$

dacă este satisfăcută condiția

$$\int S'_\lambda(\lambda, s, r)\, S(\lambda, r, t)\, dr = \int S(\lambda, s, r)\, S'_\lambda(\lambda, r, t)\, dr. \tag{3_2}$$

Avem de asemenea

$$\overline{S}(\lambda, s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{S}^{\nu}(\lambda, s, t), \quad (\overline{S}^{(1)}(\lambda, s, t) = S(\lambda, s, t))$$

în care

$$\overline{S}^{(\nu)}(\lambda, s, t) = \int S(\lambda, s, r_1)\, S(\lambda, r_1, r_2) \ldots S(\lambda, r_{\nu-1}, t)\, dr_1 \ldots dr_{\nu-1}$$

care verifică relația

$$\overline{S}(\lambda, s, t) = S(\lambda, s, t) + \int S(\lambda, s, r)\, \overline{S}(\lambda, r, t)\, dr. \tag{3_3}$$

Cînd $S(\lambda, s, t) = \lambda.K(s, t)$, avem $\underline{S}(\lambda, s, t) = K(\lambda, s, t)$ și $\overline{S}(\lambda, s, t) = \lambda.K(\lambda, s, t)$. $S'_\lambda(\lambda, s, t)$ este derivata lui $S(\lambda, s, t)$ în raport cu λ.

4. — *Funcția* $\underline{\Delta}(\lambda, s, t)$. Unica transcendentă ce folosim este

$$\Delta(\lambda, s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta\left(\lambda, \begin{matrix} s, r_2, \ldots, r_\nu \\ t, r_2, \ldots, r_\nu \end{matrix}\right) dr_2 \ldots dr_\nu, \tag{4_1}$$

în care

$$\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} r_1, \ldots, r_\nu \\ r_1, \ldots, r_\nu \end{matrix}\right) = |S(\lambda, r_p, r_q)|, (p, q = 1, 2, \ldots \nu);$$

pentru $\nu = 1$, termenul general este $-\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} s \\ t \end{matrix}\right) = -S(\lambda, s, t)$.

*) Pentru simplificare scriem integralele fără indicarea intervalului și multiplicitatea lor este numărul factorilor diferențiali; de asemenea $\Delta^{(i)}_\lambda$, înseamnă derivata în raport cu λ de ordinul i.

Cu ajutorul acestei transcendente definim funcțiile

$$\Delta(\lambda, s) = 1 - \int \underline{\Delta}(\lambda, s, r_1)\, dr_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta\left(\lambda_1, \begin{matrix} s, r_2, \ldots r_\nu \\ r_1, r_2, \ldots, r_\nu \end{matrix}\right) dr_1 \ldots dr_\nu \quad (4_2)$$

$$\Delta(\lambda) = 1 - \int \underline{\Delta}(\lambda, r_1, r_1)\, dr_1 = \sum_{\nu=0} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \Delta\left(\lambda, \begin{matrix} r_1, \ldots r_\nu \\ r_1, \ldots r_\nu \end{matrix}\right) dr_1 \ldots dr_\nu \; ; \quad (4_3)$$

în ambele serii, pentru $\nu = 0$, termenul general este 1. Am notat cu $\Delta(\lambda)$ determinantul caracteristic al sîmburelui.

Din (4_2), (4_3) prin derivare deducem

$$-\underline{\Delta}_\lambda^{(i)}(\lambda, s, t) = \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta_\lambda^{(i)}\left(\lambda, \begin{matrix} s, r_2 \ldots r_\nu \\ t, r_2 \ldots r_\nu \end{matrix}\right) dr_2 \ldots dr_\nu \quad (5_1)$$

$$\Delta_\lambda^{(i)}(\lambda, s) = \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta_\lambda^{(i)}\left(\lambda, \begin{matrix} s, r_2 \ldots r_\nu \\ r_1, r_2 \ldots r_\nu \end{matrix}\right) dr_1 \ldots dr_\nu \quad (4_4)$$

$$\Delta_\lambda^{(i)}(\lambda) = \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta_\lambda^{(i)}\left(\lambda, \begin{matrix} r_1 \ldots r_\nu \\ r_1 \ldots r_\nu \end{matrix}\right) dr_1 \ldots dr_\nu \quad (4_5)$$

pentru $\nu = 1$, termenul general în (5_1) este $-\Delta_\lambda^{(i)}\begin{pmatrix} \lambda, & s \\ & t \end{pmatrix} = -S_\lambda^{(i)}(\lambda, s, t)$.

Funcțiile

$$-\underline{\Delta}_\lambda^{(i)}(\lambda, s, r_1) = \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta_\lambda^{(i)}\left(\lambda, \begin{matrix} s, r_2 \ldots r_\nu \\ r_1, r_2 \ldots r_\nu \end{matrix}\right) dr_2 \ldots dr_\nu . \quad (4_6)$$

sînt minorii de ordinul i ai lui $\Delta(\lambda, s,)$; iar

$$-\underline{\Delta}_\lambda^{(i)}(\lambda, r_1, r_1') = \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta_\lambda^{(i)}\left(\lambda, \begin{matrix} r_1 \ldots r_\nu \\ r_1' \ldots r_\nu \end{matrix}\right) dr_2 \ldots dr_\nu \quad (4_7)$$

sînt minorii de ordinul i ai lui $\Delta(\lambda)$. Cînd $r_1 = r_1'$, minorii sînt principali. Evident, avem relațiile

$$\Delta_\lambda^{(i)}(\lambda, s) = -\int \underline{\Delta}_\lambda^{(i)}(\lambda, s, r_1)\, dr_1 = \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta_\lambda^{(i)}\left(\lambda, \begin{matrix} s, \ldots r_\nu \\ r_1, \ldots r_\nu \end{matrix}\right) dr_1 \ldots dr_\nu \quad (5_2)$$

$$\Delta_\lambda^{(i)}(\lambda) = -\int \underline{\Delta}_\lambda^{(i)}(\lambda, r_1, r_1)\, dr_1 = \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta_\lambda^{(i)}\left(\lambda, \begin{matrix} r_1, \ldots r_\nu \\ r_1, \ldots r_\nu \end{matrix}\right) dr_1 \ldots dr_\nu . \quad (5_3)$$

Seriile converg oricare ar fi λ, în baza inegalității (1_1), și, deoarece am presupus $S(0, s, t) = 0$, avem $\Delta(0, s) = 1$, $\Delta(0) = 1$, $\underline{\Delta}(0, s, r) = 0$. Ordinul de multiplicitate al unui zero λ_0 al lui $\underline{\Delta}_\lambda'(\lambda, s, t)$ este mai mic cel puțin cu o unitate de cît pentru $\Delta(\lambda)$ și $\Delta(\lambda, r_1)$; cînd $S(\lambda, s, t) = \lambda K(s, t)$, avem $\underline{\Delta}_\lambda'(\lambda, s, t) = D(\lambda, s, t)$ și $\Delta(\lambda) = D(\lambda)$.

Relaţia (5_3) este fundamentală pentru metoda noastră.

5. — Cum se ştie, derivata unui determinant $\Delta = S_{pq}(\lambda)$, $(p, q = 1, 2, \ldots, \nu)$, în raport cu parametrul λ, de care depind elementele sale, are expresia

$$\Delta_\lambda^{(i)} = \sum_{i_h i_j}{}_\lambda S'_{i_p i_q} \cdot \Delta_{i_h}^{i_j} = \sum_{i_h} \begin{vmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1i} & \ldots & S_{i\nu} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ S'_{i_h 1} & \ldots & S'_{i_h i} & \ldots & S'_{i_h \nu} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ S_{\nu 1} & \ldots & S_{\nu i} & \ldots & S_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

$\Delta_{i_h}^{i_j}$ fiind minorul corespunzător elementului $S_{i_h i_j}$.

Derivata de ordinul i a unui determinant cu ν linii şi coloane generează ν determinanţi la prima derivare, ν^2 determinanţi la a doua derivare, ν^i determinanţi la a i-a derivare, respectiv cîte ν^0, $\nu^1, \ldots, \nu^{i-1}$ pentru fiecare linie, dintre care, cînd $i \leqslant \nu$, sînt $\dfrac{\nu!}{(\nu - i)!}$ determinanţi, ale căror elemente sînt derivatele cel mult de ordinul întîi ale elementelor determinantului Δ, adică cîte $(\nu - 1)! : (\nu - i)!$ de linie; în afară de aceştia din urmă nici ceilalţi nu sînt toţi distincţi. Ei sînt de forma următoare, în care pentru simplificare scriem numai indicii ordinelor de derivare, pentru prima linie a lui Δ.

$$\left|\begin{matrix} i \ldots i \\ 0 \ldots 0 \\ \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} i-1 \ldots i-1 \\ 1 \ldots 1 \\ \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} i-2 \ldots i-2 \\ 2 \ldots 2 \\ \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} i-2 \ldots i-2 \\ 1 \ldots 1 \\ 1 \ldots 1 \\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} i-3 \ldots i-3 \\ 3 \ldots 3 \\ \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right|$$

$$(5_4)$$

$$\left|\begin{matrix} i-3 \ldots i-3 \\ 2 \ldots 2 \\ 1 \ldots 1 \\ \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} i-3 \ldots i-3 \\ 1 \ldots 1 \\ 1 \ldots 1 \\ 1 \ldots 1 \\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} i-2 \ldots i-2 \\ 1 \ldots 1 \\ 1 \ldots 1 \\ \cdot \ldots \cdot \\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 \ldots 1 \\ 1 \ldots 1 \\ \cdot \ldots \\ 2 \ldots 2 \\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 \ldots 1 \\ 1 \ldots 1 \\ \cdot \ldots \\ 1 \ldots 1 \\ 0 \ldots 0 \end{matrix}\right|$$

Fiecare are ν linii şi coloane, suma ordinelor de derivare din fiecare coloană fiind i.

Suma acestor determinanţi este derivata de ordinul i a lui Δ. Dacă aceasta este derivata de ordinul cel mai mic nenulă pentru $\lambda = \lambda_0$, atunci între determinanţii precedenţi există cel puţin unul — principal sau nu — care este nenul pentru $\lambda = \lambda_0$ şi λ_0 este un zero cel puţin de ordinul i de multiplicitate al lui Δ.

Un determinant component, evident, este funcţie liniară de minorii de un ordin $(i - i')$ ai lui Δ şi de complementarii acestora care sînt

determinanți de ordinul i', ale căror linii conțin numai derivate ale elementelor lui Δ, suma ordinelor de derivare fiind i'.

Pentru derivate de ordin superior lui ν, se repetă operațiile de mai sus, Δ fiind înlocuit cu ultimul determinant din schema de mai sus, ale cărui elemente sînt derivatele de ordinul întîi ale elementelor lui Δ.

Cînd $\Delta(\mu)$ are forma

$$\Delta(\mu) = |\, \delta_{pq} \cdot \mu - k_{pq} \,|, \quad \left(p, q = \ldots \nu, \ \delta_{pq} = \begin{cases} 1 \text{ cînd } p = q \\ 0 \text{ ,, } p \neq q \end{cases} \right)$$

atunci $\Delta_{\mu}^{(i)}(\mu) = \sum_{p_1 \ldots p_i = 1}^{\nu} \Delta_{p_1 \ldots p_i}^{p_1 \ldots p_i}(\mu)$ termenii fiind minorii principali de ordinul i ai lui Δ. Cînd toți acești minori, ca și cei de ordin mai mic, sînt nuli pentru $\mu = \mu_0$, atunci și $\Delta_{\mu}^{(i)}(\mu) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots i)$ și μ_0 este un zero de ordinul i al lui Δ. Prin analogie, funcțiile de mai sus le numim *minori*; ele au aceleași proprietăți.

Toate acestea se constată și din cele expuse în lucrarea [2]*), unde am dat soluția acestei probleme sub altă înfățișare.

6. — *Rezolvanta* se exprimă astfel

$$\underline{S}(\lambda, s, t) = \frac{\underline{\Delta}'_{\lambda}(\lambda, s, t)}{\Delta(\lambda)}. \tag{6_1}$$

Avem, în adevăr, în baza lui (3_1) și (4_3),

$$\underline{S}(\lambda, s, t)\ \Delta(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \underline{S}^{(\mu+1)}(\lambda, s, t) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \int \Delta\left(\lambda, {}^{r_1 \ldots r_\nu}_{r_1 \ldots r_\nu}\right) dr_1 \ldots dr_\nu$$

$$= \sum_{\mu=0} \underline{S}^{(\mu+1)}(\lambda, s, t) \sum_{\nu=0} \left[1 - \frac{1}{1!} \int \Delta\left(\lambda, {}^{r_1}_{r_1}\right) dr_1 + \frac{1}{2!} \int \Delta\left(\lambda, {}^{r_1 \cdot r_2}_{r_1 \cdot r_2}\right) dr_1\, dr_2 + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!} \int \Delta\left(\lambda, {}^{r_1 \ldots r_{\nu-\mu}}_{r_1 \ldots r_{\nu-\mu}}\right) dr_1 \ldots dr_{\nu-\mu} \right]$$

$$= \sum_{\nu=0} \sum_{\mu=0} \frac{(-1)^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!} \underline{S}^{\mu+1}(\lambda, s, t) \int \Delta\left(\lambda, {}^{r_1 \ldots r_\nu}_{r_1 \ldots r_\nu}\right) dr_1 \ldots dr_{\nu-\mu}.$$

De asemenea, din (5_1) cu o ușoară schimbare de notație avem

$$\underline{\Delta}'_{\lambda}(\lambda, s, t) = -\sum_{\nu=0} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \int \Delta'_{\lambda}\left(\lambda, {}^{r_1 \ldots r_\nu}_{r_1 \ldots r_\nu}\right) dr_1 \ldots dr_\nu,$$

*) p. 591, unde, la derivate, s-a omis a se menționa că sumarea se face și în raport cu indicii h.

pentru $\nu = 0$, termenul general se reduce la $-S'_\lambda(\lambda, s, t)$. Din dezvoltarea convenabilă a determinantului din termenul general, ținînd seama de cele arătate la punctul (5) și de relația (1_3), obținem [6]*

$$\underline{\Delta}'_\lambda(\lambda, s, t) = \sum_{\nu=0} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\left[S'_\lambda(\lambda, s, t)\,\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} r_1 \dots r_\nu \\ r_1 \dots r_\nu \end{matrix}\right) dr_1 \dots dr_\nu\right.$$

$$\left.(-1)^\mu(\nu+1)\,\nu(\nu-1)\dots(\nu-\mu+1)\,\underline{S}^{(\mu+1)}(\lambda, s, t)\int \Delta\left(\lambda, \begin{matrix} r_1 \dots r_{\nu-\mu} \\ r_1 \dots r_{\nu+\mu} \end{matrix}\right) dr_1 \dots dr_{\nu-\mu}\right]$$

$$= \sum_{\nu=0} \sum_{\mu=0} \frac{(-1)^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!}\,\underline{S}^{(\mu+1)}(\lambda, s, t)\int \Delta\left(\lambda, \begin{matrix} r_1 \dots r_{\nu-\mu} \\ r_1 \dots r_{\nu-\mu} \end{matrix}\right) dr_1 \dots dr_{\nu-\mu}$$

identic cu rezultatul precedent.

Funcția (6_1) verifică, deci, ecuația (3_1) care se scrie

$$\underline{\Delta}'_\lambda(\lambda, s, t) = \Delta(\lambda).\,S'_\lambda(\lambda, s, t) + \int S(\lambda, s, r)\,\underline{\Lambda}'_\lambda(\lambda, r, t)\,dr. \qquad (3_4)$$

7. — *Ecuația lui* $\underline{\Delta}^{(i)}_\lambda(\lambda, s, t)$. Cînd $\Delta(\lambda)$ și toți minorii — principali și neprincipali — pînă la acei de ordinul $(i-1)$ ai săi sînt identic nuli oricare ar fi r și r' pentru $\lambda = \lambda_0$, atunci, în baza celor demonstrate la punctul 4, toate primele $(i\text{-}1)$ derivate ale lui $\Delta(\lambda)$, cît și primele $(i-1)$ derivate ale lui $\underline{\Delta}(\lambda, s, t)$ sînt nule pentru $\lambda = \lambda_0$ și , deci, λ_0 este un zero de ordinul egal cel puțin cu i pentru $\Delta(\lambda)$ și egal cu $(i-1)$ pentru $\underline{\Delta}'_\lambda(\lambda, s, t)$; dacă el este egal cu 1, $\underline{\Delta}^{(i)}_\lambda(\lambda, s, t) \neq 0$ și $\Delta^{(i)}_\lambda(\lambda) \neq 0$.

Din (3_4) deducem

$$(\underline{\Delta}'_\lambda(\lambda, s, t))^{(i-1)}_\lambda = (\Delta(\lambda)\,S'_\lambda(\lambda, s, t))^{(i-1)}_\lambda + \int (S(\lambda, s, r)\,\underline{\Delta}'_\lambda(\lambda, r, t))^{(i-1)}_\lambda\,dr,$$

adică

$$\underline{\Delta}^{(i)}_\lambda(\lambda, s, t) = \Delta^{(i-1)}_\lambda(\lambda)\cdot S'_\lambda(\lambda, s, t) + \dots + \Delta(\lambda)\,S^{(i-1)}_\lambda(\lambda, s, t)$$

$$+\int S(\lambda, s, r)\,\underline{\Delta}^{(i)}_\lambda(\lambda, r, t)\,dr + \binom{i-1}{1}\left[\int S'_\lambda(\lambda, s, r)\,\underline{\Delta}^{(i-1)}_\lambda(\lambda, r, t) + \dots + \right.$$

$$\left. + S^{(i-1)}_\lambda(\lambda, s, r)\,\underline{\Delta}'_\lambda(\lambda, r, t)\right] dr, \qquad (7_1)$$

din care, în baza celor precedente, obținem

$$\underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, t) - \int S(\lambda_0, s, r)\,\underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, r, t)\,dr = 0. \qquad (7_2)$$

Procedînd invers prin integrare de la zero la λ_0, ținînd seama de valoarea constantelor de integrare, de la (7_1) se ajunge la (3_4). Cînd ordinul de multiplicitate al zeroului λ_0 al lui $\Delta(\lambda)$ este $i' > i \geqslant 1$,

*) p. 435.

pentru care nu este necesar ca și toți minorii de ordin superior lui $(i-1)$ să fie identic nuli, în cele ce urmează i se înlocuiește prin i'', dacă $S = \lambda^p K(s, t)$, $\underline{\Delta}_\lambda^{(i-j)} \equiv 0$, $j = 1, \ldots p$, $i + p < i'' \leqslant i'$. Pentru aceasta derivăm pe (7_1) încă de $(i''-i)$ ori și ținem seama că $S_\lambda^{(p')} \equiv 0$, $(p' > p)$.

8. — *Soluția unică* a ecuației (2_1) este

$$\varphi(s) = f(s) + \int \frac{\underline{\Delta}_\lambda'(\lambda, s, t)}{\Delta(\lambda)} f(t)\, dt, \qquad (2_2)$$

ceea ce se verifică prin înlocuirea acesteia în (2_1) și se ține seama de (3_1); însă numai cînd $S(\lambda, s, t) = \lambda K(s, t)$,

Unicitatea se demonstrează ca în teoria clasică; se înlocuiește în (2_2) $f(s)$ prin valoarea sa

$$f(s) = \varphi_1(s) - \int S(\lambda, s, t)\, \varphi_1(t)\, dt$$

φ_1 fiind o a doua soluție, și se ține seama de (3_1).

În cazul general, soluția lui (2_1) este

$$\varphi(s) = f(s) + \int \overline{S}(\lambda, s, t) f(t)\, dt, \qquad (2_3)$$

ceea ce se verifică de asemenea prin înlocuirea acesteia în (2_1) și se ține seama de (3_3).

9. — Din (5_3), ținînd seama de (6_1) și că $\Delta(0) \neq 0$, obținem

$$(\log\ \Delta(\lambda))_\lambda' = -[A_1(\lambda) + \ldots + A_j(\lambda) + \ldots], \qquad (5_5)$$

în care

$$A_j(\lambda) = \int \underline{S}^{(j)}(\lambda, r, r)\, dr$$

și rezultă

$$\Delta(\lambda) = e^{-\int_0^\lambda [A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + \cdots]\, d\lambda}. \qquad (5_6)$$

$\Delta(\lambda)$ este, deci, funcție întreagă de $\sum_j \int A_j(\lambda)\, d\lambda$, seria este convergentă, fiindcă $\Delta(\lambda)$ converge pentru orice λ; natura ei depinde de aceea a sîmburelui.

10. — Ținînd seama de (5_1) și (7_2) soluțiile ecuației

$$\varphi(s) - \int S(\lambda_0, s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \qquad (8_1)$$

şi ale asociatei acesteia sînt respectiv

$$\varphi_n(s) = -\underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, r_n) = \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}\left(\lambda, {}^{r_1 \ldots s \ldots r_\nu}_{r_1 \ldots r_n \ldots r_\nu}\right)$$

$$dr_1 \ldots dr_{n-1}\, dr_{n+1} \ldots dr_\nu, \qquad (8_2)$$

$$\psi_n(s) = -\underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, r_n, s) = \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int \Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}\left(\lambda, {}^{r_1 \ldots r_n \ldots r_\nu}_{r_1 \ldots s \ldots r_\nu}\right)$$

$$dr_1 \ldots dr_{n-1}\, dr_{n+1} \ldots dr_\nu \qquad (8_3)$$

$(n = 1, 2, \ldots \nu)$.

Cînd

$$\Delta^{(i)} = \Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}\left(\lambda, {}^{r_1 \ldots r_\nu}_{r_1 \ldots r_\nu}\right)$$

este nenul numai pentru anumite valori ale variabilelor r, integralele respective se înlocuiesc prin sume în raport cu acele valori pentru fiecare variabilă.

Dacă integralele ar fi în sensul Lebesgue, am spune că funcţia $\Delta^{(i)}$ fiind nenulă numai în nişte mulţimi de puncte din (a, b) de măsură nulă, fiecare integrală şi, deci, aria delimitată de ea sînt nule şi integrala respectivă se înlocuieşte prin suma valorilor acestei funcţii în punctele în care ea nu este nulă.

Aceste soluţii sînt biortogonale, dacă $S(\lambda_1, s, t) \neq S(\lambda_2, s, t)$, cum se poate constata cu ajutorul ecuaţiei (8_1) şi asociata sa

$$\psi(s) - \int S(\lambda_0, t, s)\, \psi(t)\, dt = 0, \qquad (8_4)$$

din care se deduce

$$\int \varphi(s)\, \psi(s)\, ds = \iint S(\lambda_1, s, t)\, \varphi(t)\, \psi(s)\, ds dt$$

$$= \iint S(\lambda_2, t, s)\, \varphi(s)\, \psi(t)\, dt ds.$$

Ele pot fi şi normalizate multiplificînd pe fiecare cu factorul

$$\frac{1}{\left(\int \varphi_n(t)\, \psi_n(t)\, dt\right)^{1/2}}.$$

Cînd între determinanţii $\Delta^{(i)}$ numai $(\nu - l)$ sînt nenuli, integralele din (8_2) şi (8_3) se referă numai la $(\nu - l)$ variabile, restul se înlocuieşte prin constante aşa fel ca minorul respectiv să fie nenul. Şi, dacă ei sînt diferiţi de zero numai pentru anumite valori ale variabilelor rămase, integralele respective se înlocuiesc prin sume în raport cu valorile fiecărei

variabile, ca mai sus. În particular, cînd $l = \nu' - 1$, expresiile de mai sus se reduc la

$$\varphi_n(s) = \sum_{\sigma r'} \left[\frac{(-1)^{\nu'}}{\nu'!} \Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}\left(\lambda, \begin{matrix} \sigma r_1 & \dots & s & \dots & \sigma r_{\nu'} \\ \sigma r'_1 & \dots & \sigma r_n & \dots & \sigma r'_n \end{matrix}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu'+p}}{(\nu'+p)!} \int \Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}\left(\lambda, \begin{matrix} \sigma r_1 & \dots & s & \dots & \sigma r_{\nu'} & r_{\nu'+1} & \dots & r_{\nu'+p} \\ \sigma r'_n & \dots & \sigma r_n & \dots & \sigma r'_{\nu'} & r_{\nu'+1} & \dots & r_{\nu'+p} \end{matrix}\right) dr_{\nu'+1} \dots dr_{\nu'+p} \right] \qquad (8_5)$$

$$= \sum_{\sigma r} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu'+p}}{(\nu'+p)!} \int \Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}\left(\lambda, \begin{matrix} \sigma r_1 & \dots & s & \dots & \sigma r_{\nu'} & r_{\nu'+1} & \dots & r_{\nu'+p} \\ \sigma r'_1 & \dots & \sigma r_n & \dots & \sigma r'_{\nu'} & r_{\nu'+1} & \dots & r_{\nu'+p} \end{matrix}\right) dr_{\nu'+1} \dots dr_{\nu'+p}$$

și o altă similară pentru $\psi_n(s)$.

Orice combinație liniară cu coeficienți constanți a acestor soluții, evident, este și ea soluție a aceleiași ecuații și reciproc, orice soluție a lui (8_1) este o astfel de combinație. În adevăr, expresia cea mai generală a soluțiilor ecuației (7_2) este

$$\varphi(s) = \int c(t)\, \Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda_1, s, t)\, dt$$

$c(t)$ fiind o funcție arbitrară. Și, dacă ținem seama că funcția de sub integrală este nenulă numai pentru $t = r_n$ $(n = 1, 2, \dots \nu)$, expresia precedentă devine

$$\varphi(s) = \sum_n c(r_n)\, \Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, r_n) = \sum_n c(r_n) \varphi_n(s)$$

numărul termenilor fiind limitat.

Aceste soluții sînt și liniar distincte, dacă nu există constante așa fel ca suma precedentă să fie nulă, soluția banală $\varphi(s) = 0$ fiind exclusă peste tot din considerațiile noastre. Pentru aceasta este necesar și suficient ca determinantul

$$\left| \underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s_m, r_n) \right| \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

să fie diferit de zero pentru orice s din (a, b), căci atunci sistemul

$$\underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s_m, r_n)\, c(r_n) = 0$$

nu are decît soluții $c(r_n)$ identic nule. Ca mai sus, aceasta se poate exprima, că ecuația

$$\int \underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, t)\, c(t)\, dt = 0$$

să nu aibă decît soluția identic nulă, soluțiile nenule numai în punctele unei mulțimi de măsură nulă fiind excluse.

11. — Cînd

$$S(\lambda, s, t) = S(\Lambda(\lambda), s, t)$$

$\Lambda(\lambda)$ fiind un polinom de gradul p, din determinanții (5_4) pot să rămînă acei ce conțin derivate pînă la ordinul p și în seriile de mai sus sumarea începe cu termenul cu indicele $\nu' = i - p + 1 \geqslant 1$, iar numărul soluțiilor ecuațiilor (8_1) și (8_4) este $(i - p + 1)$; el este cuprins între i cînd $p = 1$ și unu cînd $p \geqslant i$.

12. — Putem să avem

$$S(\lambda_m, s, t) = \sum_n \varphi_n(\lambda_n, s)\, \psi_n(\lambda_m, t), \tag{9_1}$$

cînd λ_m este un zero de ordinul i_m și, dacă însemnăm

$$T(s, t) = \sum_{m,n} \varphi_n(\lambda_m, s)\, \psi_n(\lambda_m, t)$$

seria trebuind să fie regulat convergentă în s și t, atunci ecuația

$$\varphi(s) - \int T(s, t)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

are o soluție și numai una egală cu una oricare din șirul $\varphi_n(\lambda_m, s)$ și asociata acesteia are tot numai o soluție egală cu una oricare din șirul $\psi_n(\lambda_m, s)$.

13. — Rezultatele din teoria clasică privitoare la coeficienții Fourier și dezvoltările în serii de funcții fundamentale, inclusiv cele referitoare la ecuația de speța întîia nu sînt valabile și pentru ecuația (2_1), factorul λ nu poate fi cuprins în funcțiile ce intervin.

De asemenea, în aplicațiile la ecuațiile diferențiale, acolo unde λ figurează ca factor pe lîngă o funcție, el nu poate fi inclus în acea funcție.

14. — Ecuația (8_1) cu membrul al doilea $f(s)$, este satisfăcută de

$$\varphi(s, \lambda_0) = f(s) + \int \frac{\Delta^{(i+1)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, t)}{\Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda)}\, f(t)\, dt, \tag{8_6}$$

la care se adaugă o combinație liniară a soluțiilor $\varphi_n(s)$ ale ecuației (8_1), dar numai cînd $S(\lambda, s, t) = \lambda \cdot K(s, t)$.

Funcția $f(s)$ trebuie să satisfacă condiția

$$\int \psi_n(s, \lambda_0)\, f(s)\, ds = 0 \tag{8_7}$$

care se deduce, dacă se multiplică relația

$$\varphi(s) - \int S(\lambda_0, s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s) \tag{8_8}$$

cu $\psi_n(s, \lambda_0)$ — soluțiile (8_3) ale ecuației (8_4) — și se integrează în raport cu s.

Derivînd apoi încă o dată relația (7_1) în raport cu λ și ținînd seama și de cele menționate la punctul 7, obținem pentru $\lambda = \lambda_0$, cînd $\Delta^{(i)}_{(\lambda_0)} \neq 0$.

$$\frac{\Delta^{(i+1)}_\lambda(\lambda, s, t)}{\Delta^{(i)}_\lambda(\lambda)} = S'_\lambda(\lambda, s, t) + \int S(\lambda, s, r)\, \frac{\Delta^{(i+1)}_\lambda(\lambda, r, t)}{\Delta^{(i)}_\lambda(\lambda)}\, dr$$

$$+ \int S'_\lambda(\lambda, s, r)\, \frac{\Delta^{(i)}_\lambda(\lambda, r, t)}{\Delta^{(i)}_\lambda(\lambda)}\, dr. \tag{8_9}$$

Dacă înlocuim apoi pe (8_6) în (8_7), ținînd seama de (8_9) și că $S'_\lambda(,s,t) = K(s,t)$ obținem termenul

$$\int S'_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, r)\frac{\Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, r, t)}{\Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda)} f(t)\,dr\,dt$$

care, în baza lui (8_3) și (8_7), este nul:

$$\sum_{n=1} S'_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, r_n)\int \psi_r(t, \lambda_0) f(t)\,dt = 0.$$

Condiția (8_7) este prin urmare și suficientă.

Integrala se reduce la o sumă, cum am arătat mai sus la punctul 10. Cînd $\underline{\Delta}^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, r_n, r_{n'})$ este unicul minor nenul, avem $\Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda) = -\underline{\Delta}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, r_n, r_{n'})$.

Dacă pentru $\lambda = \lambda_0, \Delta^{(i)}_\lambda(\lambda), \ldots, \Delta^{(i+k-1)}_\lambda(\lambda)$ sînt nuli, deci λ_0 este un zero de ordinul $(i+k)$, pentru care în baza lui (5_2) nu este necesar ca și $\underline{\Delta}^{(i)}_\lambda(\lambda, s, r), \ldots \underline{\Delta}^{(i+k-1)}_\lambda(\lambda, s, r)$ să fie identic nuli, din (7_1), în care eventual i a fost înlocuit prin i' cum am arătat la punctul 7, prin derivare în raport cu λ de $(k+1)$ ori se obține pentru $\lambda = \lambda_0$, relația

$$\frac{\underline{\Delta}^{(i+k+)}_\lambda(\lambda, s, t)}{\Delta^{(i+k)}_\lambda(\lambda)} = S'_\lambda(\lambda, s, t) + \int S(\lambda, s, r)\frac{\Delta^{(i+k+1)}_\lambda(\lambda, r, t)}{\Delta^{(i+k)}_\lambda(\lambda)}\,dr +$$

$$+ \binom{i+k}{1}\int S'_\lambda(\lambda, s, r)\frac{\Delta^{(i+k)}_\lambda(\lambda, r, t)}{\Delta^{(i+k)}_\lambda(\lambda)} + \ldots + \int S^{(k+1)}_\lambda(\lambda, s, r)\frac{\Delta^{(i)}_\lambda(\lambda, r, t)}{\Delta^{(i+k)}_\lambda(\lambda)}\,dr$$

care înlocuiește pe (8_9). În (8_6) i se înlocuiește prin $(i+k)$ și fiindcă $S'_\lambda(\lambda, s, r) = K(s, r)$, iar $S^{(2)}_\lambda, \ldots, S^{(k+1)}_\lambda$ sînt identic nuli, la condiția necesară (8_7) se adaugă condiția suficientă

$$\int \underline{\Delta}^{(i+k)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda, s, t) f(t)\,dt = 0.$$

Se constată astfel o analogie completă cu cele știute din Algebră privitor la un sistem de ecuații liniare, dacă ținem seama de cele menționate la punctul 10 în ce privește multiplicitatea integralelor.

15. — Cînd sîmburele are expresia

$$S(\lambda, s, t) = \Lambda(\lambda) \cdot S(s, t) \qquad (9_2)$$

$\Lambda(\lambda)$ fiind un polinom de gradul p și $\Lambda(0) = 0$, numărul soluțiilor ecuației (8_1) este $i - p + 1 \geqslant 1$, cum am arătat la punctul 11. Condiția (3_2) este îndeplinită.

În particular, cînd $S(\lambda, s, t) = \lambda K(s, t)$, din determinanții (5_4) rămîn numai acei care conțin derivate de ordinul întîi, în număr de $\nu!$, ceilalți sînt identic nuli avînd linii cu derivate de ordin superior, așa că

în seriile de mai sus sumarea începe cu termenul cu indicele $\nu' = i$. Numărul soluțiilor este i.

În acest caz funcți le (8_5)

$$\underset{\lambda=\lambda_0}{\Delta^{(i)}}\left(\lambda, {}^{0r_1,\ldots s,\ldots 0r_i}_{0r_1',\ldots 0r_n,\ldots 0r_i'}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(i+k)!} \int \Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda^0}\left(\lambda, {}^{0r_1\ldots s,\ldots 0r_i\cdot r_{i+1}\ldots r_{i+p}}_{0r_1',\ldots 0r_n,\ldots 0r_i'\cdot r_{i+1},\ldots r_{i+p}}\right)$$

$$dr_{i+1} \ldots dr_{i+p}$$

sînt identice cu minorii lui Fredholm *)

$$D\left(\lambda_0, {}^{0r_1,\ldots s,\ldots r_i}_{0r_1',\ldots r_n,\ldots r_i'}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \int K\left({}^{r_1,\ldots s,\ldots r_i\cdot \rho_1,\ldots \rho_p}_{r_1',\ldots r_n,\ldots r_i'\cdot \rho_1,\ldots \rho_p}\right) d\rho_1 \ldots d\rho_p$$

Soluțiile lui (8_8) sînt identice **), iar pentru ale lui (8_1) avem relația

$$\Delta^{(j)}(s, r_n) = (-1)^i \sum D\left(\lambda_0, {}^{r_1,\ldots s,\ldots r_i}_{r_1,\ldots r_n,\ldots r_i}\right). \qquad (8_{11})$$

fiind suficient din (7_1) ca $\underset{\lambda_0}{\Delta^{(i-1)}} \equiv 0$ și $\Delta^{(j)}_{\lambda_0} = 0$, $(j = 0, 1, \ldots i-1)$.

Cînd între acești minori numai $(i - l)$ sînt nenuli, în expresia generală a soluției

$$\varphi(s) = \int a(r_1) \ldots m(r_i) \int D\left(\lambda_0, {}^{r_1,\ldots s,\ldots r_i}_{r_1,\ldots r_n,\ldots r_i}\right) dr_1 \ldots dr_i$$

$a(r_1), \ldots m(r_i)$ fiind funcții arbitrare se ia în considerare numai $(i - l)$ variabile, restul se înlocuiesc prin constante așa fel ca minorii respectivi să fie nenuli, iar integralele se înlocuiesc prin sume în raport cu acele constante. Și, dacă și minorii rămași sînt diferiți de zero numai pentru anumite valori ale variabilelor rămase, integralele respective se înlocuiesc prin sume în raport cu valorile fiecărei variabile, ca la punctul 10. Pentru $l = i - 1$, soluția este

$$\varphi(s) = \sum_n c(r_n) D\left(\lambda_0, {}^{0r_1,\ldots s,\ldots 0r_i}_{0r_1',\ldots 0r_n',\ldots 0r_i'}\right)$$

$$= \sum_n c(r_n) \sum_{p=0} \frac{(-\lambda_0)^p}{p!} \int K\left({}^{0r_1,\ldots s,\ldots 0r_i\cdot \rho_1,\ldots \rho_p}_{0r_1',\ldots 0r_n',\ldots 0r_i'\cdot \rho_1,\ldots \rho_p}\right) d\rho_1 \ldots d\rho_p .$$

În acest caz numărul soluțiilor calculate cu (8_2) și (8_{10}) este i.

16. — Să examinăm acum cazul cînd sîmburele are expresia

$$S(\lambda, s, t) = \sum_{m=1}^{n} \lambda^m S_m(s, t) \qquad (9_3)$$

sîmburii componenți fiind ortogonali doi cîte doi, adică

$$\int S_l(s, r) S_{l'}(r, t)\, dr = \int S_l(r, t) S_{l'}(s, r)\, dr = 0. \qquad (l \neq l') \quad (9_4)$$

---

*) $\dfrac{1}{(i+p)!} \cdot \dfrac{(i+p)!}{(i+p-i)!} = \dfrac{1}{p!}$

**) Din (8_6), (5_3), (8_{11}).

Menționăm după G o u r s a t care a studiat acești sîmburi [6] * rezultatele mai principale. Condiția (3_2) este de asemenea satisfăcută.

Rezolvanta este suma rezolvantelor fiecărui sîmbure S_m cu parametrul λ^m. Determinantul caracteristic este egal cu produsul determinanților caracteristici ai fiecărui sîmbure component. Orice pol al rezolvantei unui sîmbure component este un pol și pentru rezolvanta sîmburelui rezultant. Orice funcție fundamentală a unui sîmbure component este o funcție fundamentală și pentru sîmburele rezultant.

Orice funcție fundamentală a sîmburelui rezultant este o funcție fundamentală pentru unul din sîmburii componenți sau se obține adunînd funcțiile fundamentale ale sîmburilor componenți care corespund la un pol comun al rezolvantelor lor. În particular, dacă rezolvantele sîmburilor componenți luați doi cîte doi n-au poluri comune, funcțiile fundamentale ale sîmburelui rezultant se obține luînd totalitatea funcțiilor fundamentale ale sîmburilor componenți **). Aceste rezultate se pot obține din cele expuse mai sus.

În adevăr, din (1_2) se constată, ținînd seama de (9_3), că rezolvanta rezultantă este

$$\underline{S}(\lambda, s, t) = \sum_m \lambda^m \underline{S}_m(s, t)$$

și cu ajutorul lui (5_5) obținem

$$\Delta(\lambda) = \prod_m \Delta_m(\lambda^m) \tag{10_1}$$

Δ_m fiind determinantul caracteristic al lui S_m.

Din (5_3) avem

$$\Delta'_{\lambda m}(\lambda^m) = -\int \underline{\Delta}'_{\lambda m}(\lambda^m, r, r)\, dr$$

și din (10_1) deducem

$$\Delta'_\lambda(\lambda) = \sum_m \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)} \Delta'_{\lambda m}(\lambda^m), \tag{10_2}$$

deci

$$\Delta'_\lambda(\lambda) = -\int \underline{\Delta}'_\lambda\, \lambda(\lambda, r, r)\, dr = -\sum_m \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)} \int \underline{\Delta}'_{\lambda m}(\lambda^m, r, r)\, dr,$$

din care rezultă

$$\underline{\Delta}'_\lambda(\lambda, r, r) = \sum_m \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)} \underline{\Delta}'_{\lambda m}(\lambda^m, r, r). \tag{10_3}$$

În baza lui (6_1) și (9_2) avem

$$\frac{\Delta'_\lambda(\lambda, s, t)}{\Delta(\lambda)} = \sum \frac{\Delta'_{\lambda m}(\lambda^m, s, t)}{\Delta_m(\lambda^m)}, \tag{11_1}$$

---

*) p. 394.

**) Din $\dfrac{\lambda^n}{\underline{\Delta}^{i}_{\lambda}(\lambda, s, r_n)} \int S_n(s, r)\, \Delta^{(i)}_{\lambda}(\lambda, r, r_{n'})\, dr = \delta_{nn'}$.

de unde deducem

$$\underline{\Delta}'_{\lambda}(\lambda, s, t) = \sum_{m} \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)} \underline{\Delta}'_{\lambda m}(\lambda^m, s, t) \qquad (11_2)$$

similară cu (10_3) și din aceasta în baza lui (5_2)

$$\underline{\Delta}'_{\lambda}(\lambda, s) = \sum_{m} \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)} \underline{\Delta}'_{\lambda m}(\lambda^m, s)$$

similară cu (10_2), însă $\Delta(\lambda, s) \neq \prod_m \Delta_m(\lambda^m, s)$.

Din (11_2), în baza formulei (2_2), deducem relația dintre soluțiile ecuației (2_1) cu fiecare sîmbure component $\varphi_m(s)$ și cu sîmburele rezultant $\varphi(s)$

$$\sum_{m} (\varphi_m(s) - f(s)) = \varphi(s) - f(s). \qquad (9_5)$$

Din (11_1) și (11_2) se pot obține rezultatele de mai sus, ținînd seama de repartizarea zerourilor lui $\Delta(\lambda)$ asupra determinanților caracteristici componenți.

În adevăr, din (11_2) deducem

$$(\underline{\Delta}'_{\lambda}(\lambda, s, t))^{(i-1)}_{\lambda} = \sum_{m} \left(\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)} \underline{\Delta}'_{\lambda m}(\lambda, s, t) \right)^{(i-1)}_{\lambda}. \qquad (11_3)$$

Dacă λ_0 este un zero de ordinul i pentru $\Delta(\lambda)$ și de ordinul i_m pentru $\underline{\Delta}_m(\lambda^m)$, de ordinul $(i-1)$ pentru $\underline{\Delta}'_{\lambda}(\lambda, s, t)$ și de ordinul $(i_m - 1)$ pentru $\underline{\Delta}'_{\lambda m}(\lambda^m, s, t)$, atunci el rămîne un zero de ordinul $(i - i_m)$ pentru

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)}$$

iar în dezvoltarea (11_3) termenul

$$\left(\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)} \underline{\Delta}'_{\lambda m}(\lambda, s, t) \right)^{(i-1)}_{\lambda} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \left(\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)} \right)^{(j)}_{\lambda} \underline{\Delta}'^{(i-j-1)}_{\lambda m}(\lambda, s, t)$$

se reduce la

$$\binom{i-1}{i-i_m} \left(\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)} \right)^{(i-i_m)}_{\lambda=\lambda_0} \underline{\Delta}^{(i_m)}_{\lambda m}(\lambda, s, t).$$

Din aceasta prin integrare în raport cu t, în baza lui (8_2), obținem relația dintre funcțiile fundamentale ale sîmburelui rezultant și acele ale sîmburilor componenți, pentru λ_0,

$$\varphi(s, i) = \sum_{m=1}^{n} \binom{i-1}{i-i_m} \left(\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)} \right)^{(i-i_m)}_{\lambda} \varphi_m(s, i_m)$$

punînd în evidență și ordinul de multiplicitate al zeroului.

Din (11_3) după ce derivăm încă o dată în raport cu λ prin multiplicare cu $f(t)$ și integrare în raport cu t, în baza lui (8_5) obținem relația dintre soluțiile ecuației (8_8) cu sîmburele rezultant și acele ale aceleiași ecuații cu sîmburii componenți : $\lambda S_m(s, t)$

$$(\varphi(s) - f(s))\,\Delta^{(i)}_{\lambda=\lambda_0}(\lambda) = \sum_{m=1}^{n} \binom{i}{i-i_m} \left(\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_m(\lambda^m)}\right)^{(i-i_m)}_{\lambda=\lambda_0} (\varphi_m(s) - f(s))\,\Delta^{(i)}_{\lambda^m}(\lambda^m)$$

care pentru $i = 0$ se reduce la (9_5). Relații similare există și pentru ecuațiile asociate.

Funcția $f(s)$ trebuie să satisfacă condiția (8_7) pentru fiecare sîmbure component și pentru cel rezultant.

17. — Studiul sîmburelui

$$S(\lambda, s, t) = \int N(s, t, u)\, e^{\lambda u}\, du = \sum_{0}^{\infty} \lambda^n S_n(s, t), \qquad (9_6)$$

în care

$$S_n(s, t) = \int N(s, t, u) \frac{u^n}{n!}\, du,$$

ce am întîlnit în lucrările noastre, se poate reduce la acel al sîmburilor ortogonali de la punctul precedent.

În adevăr, pentru îndeplinirea condiției (3_2), făcînd calculul, se ajunge la relația

$$\sum_{n,n'=0}^{\infty} (n - n')\, \lambda^{n+n'-1} \int S_n(s, r)\, S_{n'}(r, t)\, dr = 0$$

care este, evident, satisfăcută cînd $n = n'$, iar cînd $n \neq n'$ este suficient să avem :

$$\int S_n(s, r)\, S_{n'}(r, t)\, dr = 0.$$

Cînd unul din indici este egal cu zero este necesar ca $S_0(s, t)$ să fie identic nul ; $S(\lambda, s, t)$ satisface astfel și celelalte condiții menționate la punctul 1.

18. — Metoda ce am expus se aplică și sîmburelui singular

$$S(\lambda, s, t) = \sum_{1}^{n} S_m(\lambda, s, t), \qquad (12_1)$$

în care

$$S_m(\lambda, s, t) = \lambda.\ a_m(s)\ b_m(t)$$

funcțiile a și b, liniar distincte, fiind biortonormale, adică

$$\int a_m(s)\, b_{m'}(s)\, ds = \vartheta_{mm'}, \qquad (12_2)$$

pe care l-am întîlnit în lucrarea [4]*). Condiția (3_2) este îndeplinită.

*) Cititorii sînt rugați a face la p. 406, rîndul 18 de sus, corectura : „semnul + se înlocuiește prin —" și la p. 422, rîndul 2 sus, se adăugă la urmă „$m_{q'} = q'\ m_1$".

Pentru $\lambda = 1$, sîmburele este identic cu iteratele sale, seria (1_3) este divergentă. Ecuația

$$\varphi(s) - \int S(1, s, t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

scapă astfel teoriei generale.

Totuși, metoda noastră se aplică. Funcția $\underline{\Delta}(\lambda, s, t)$ se reduce la primul ei termen

$$\underline{\Delta}(\lambda, s, t) = S_m(\lambda, s, t) = \lambda\, a_m(s)\, b_m(t), \qquad (12_3)$$

deoarece, cum vom arăta mai jos, acum avem pentru $\nu > 1$

$$\int \Delta\left(\lambda, {}^{s, \ldots r_\nu}_{r_1 \ldots r_\nu}\right) dr_1 \ldots dr_\nu = 0. \qquad (12_4)$$

Din (12_3) deducem succesiv

$$\Delta_m(\lambda, s) - 1 = -\lambda \int a_m(s)\, b_m(t)\, dt$$

și, în baza lui (12_2),

$$\Delta_m(\lambda) - 1 = -\lambda.$$

Apoi

$$\underline{\Delta}(\lambda, s, t) = \sum_m \underline{\Delta}_m(\lambda, s, t)$$

$$\Delta(\lambda, s) - 1 = -\lambda \sum_m \int a_m(s)\, b_m(t)\, dt$$

$$\Delta(\lambda) - 1 = \sum (\Delta_m(\lambda) - 1) = -m\lambda.$$

Sîmburii componenți au valoarea caracteristică $\lambda = 1$, iar cel rezultant valoarea $\lambda = 1/m$. Aceasta din urmă este valoarea degenerată a produsului $\prod_m \Delta_m(\lambda)$ pentru un sîmbure de forma (9_3), ale cărui urme sînt egale cu n, din (5_3) obținem $\Delta(\lambda) = (1 - \lambda)^n$; iar $\sum \underline{\Delta}_m$ provine din $\underline{\Delta}^{(1)}_{\lambda m} = (1 - \lambda)^{n-1} \sum \underline{\Delta}'_{m\lambda}$, cum se constată din (5_3), (12_2), (11_4).

Soluția *unică* a lui (8_1) cu sîmburele $S_m(1, s, t)$ este

$$\varphi_m(s) = -(\Delta_m(\lambda, s)'_{\lambda_0} = a_m(s)\, b_m, \quad \left(b_m = \int b_m(t)\, dt\right)$$

și fără coeficient $\varphi_m(s) = a_m(s)$ și cu sîmburele rezultant din (11_5)

$$\varphi(s) = \sum_m \varphi_m(s),$$

iar pentru ecuația asociată

$$\psi_m(s) = b_m(s), \quad \psi(s) = \sum_m \psi_m(s). \qquad (12_5)$$

Soluția *unică* a ecuației

$$\varphi(s, u) - \int S(1, s, t)\, \varphi(t, u)\, dt = 0 \qquad (13_1)$$

care face obiectul lucrării [4] este

$$\varphi(s, u) = \sum_m a_m(s)\, b_m(u). \qquad (13_2)$$

Ecuația

$$\varphi(s) - \int S(1, s, t)\, \varphi(t) = f(s) \qquad (14_1)$$

cu sîmburele $S_m(1, s, t)$ are soluția

$$\varphi_m(S) = f(s) - \int \underline{\Delta}_m(\lambda, s, t)_\lambda^{(2)} f(t)\, dt = f(s),$$

cum se verifică, dacă se înlocuiește aceasta în (14_1), se ține seama de (12_2), de relația

$$\int \psi_m(t)\, f(t)\, dt = 0,$$

pe care trebuie să o satisfacă $f(s)$ și de (12_5). La aceasta se ajunge și cu formula (8_6).

Aceeași ecuație cu sîmburele $S(1, s, t)$ are soluția

$$\varphi(s) = f(s) - \frac{(1)^n}{n!} \int \underline{\Delta}(\lambda, s, t)_\lambda^{(n+1)} f(t)\, dt = f(s). \qquad (14_2)$$

Relația precedentă este identică cu (9_5), $\varphi(s) - f(s) = \sum_m (\varphi_m(s) - f(s))$.

Pentru demonstrarea relației (12_4) se pornește de la dezvoltarea

$$\Delta\left(\lambda, \begin{matrix} s, \dots r_\nu \\ r_1, \dots r_\nu \end{matrix}\right) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu = 1}^{\nu}{}' S(s, r_{\alpha_1})\, S(r_2, r_{\alpha_2}) \dots S(r_\nu, r_{\alpha_\nu})$$

$r_{\alpha_1}, \dots r_{\alpha_\nu}$ fiind toate permutările, în număr de $\nu!$ ale cantităților $r_1, r_2, \dots r_\nu$. Fiindcă apoi

$$S(r_i, r_{\alpha_i}) = \sum_{m_i} a_{m_i}(r_i)\, b_{m_i}(r_{\alpha_i}) \qquad (12_6)$$

avem

$$\int \Delta\left(\lambda, \begin{matrix} s, \dots r_\nu \\ r_1, \dots r_\nu \end{matrix}\right) dr_1, \dots dr_\nu = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_\nu} \int \sum_{m_1} a_{m_1}(s)\, b_{m_1}(r_{\alpha_1}) \dots \sum_{m_\nu} a_{m_\nu}(r_\nu)\, b_{m_\nu}(r_{\alpha_\nu})\, dr_1 \dots dr_\nu.$$

Dintr-o pereche de factori

$$\int \sum_{m_1} a_{m_1}(s)\, b_{m_1}(r_{\alpha_1}) \cdot \sum_{m_i} a_{m_i}(r_i)\, b_{m_i}(r_{\alpha_i})\, dr_i\,. \qquad (12_7)$$

unde $r_i = r_{\alpha_i}$, în baza lui (12_2), obținem

$$\sum_{m_1} a_{m_1}(s)\, b_{m_1}(r_{\alpha_i})$$

reducîndu-se astfel în (12_6) un factor și o integrală. Continuînd această operație, (12_6) se reduce la

$$a(s) = \int \sum_{m_1} a_{m_1}(s)\, b_{m_1}(r_1)\, dr_1 .$$

Dacă se repetă acestea pentru fiecare din cele $\nu!$ permutări $r_{\alpha_1},\ldots,r_{\alpha_\nu}$ se ajunge la $\nu!$ rezultate $a(s)$. Cum se știe, din factorii din (12_7), $\frac{\nu!}{2}$ sînt pozitivi și $\frac{\nu!}{2}$ negativi, așa că rezultatul acestei operații este zero.

Rezultatele de mai sus se mențin și cînd $n = \infty$, cu condiția ca seriile $\sum_m a_m(s)$, $\sum_m b_m(t)$ și $\sum_m a_m(s)\, b_m(t)$ să fie regulat convergente în (a, b). Determinantul $\Delta(1)$ tinde asimptotic la zero.

La acestea se ajunge și cu metoda ce am întrebuințat în lucrarea [4]*), unde am avut succesiv

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & & \ldots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$D_m(\lambda, s, t) = \begin{vmatrix} 0 & -a_1(s) & \ldots & -a_m(s) \\ b_1(t) & 1-\lambda & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ b_m(t) & 0 & \ldots & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^{n-1} \sum a_m(s)\, b_m(t).$$

Pentru $\lambda = 1$, $D_m(\lambda, s, t)$ se reduce la

$$D_m(1, s, t) = a_m(s)\, b_m(t),$$

deoarece singurii minori neidentic nuli sînt

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_m(s) \\ b_m(t) & 0 \end{vmatrix} \qquad (15)$$

și soluțiile lui (13_1) sînt (15).

Cele precedente se mențin și cînd $n = \infty$, dacă seriile de mai sus sînt regulat convergente.

Ecuația (8_1) cu membru al doilea $f(s)$ are soluția (14_2), deoarece minorul lui (15), care ar intra în constituirea soluției este identic nul.

*) p. 405.

19. — Metoda ce am expus sintetizează și generalizează metodele și rezultatele obținute anterior; ea este aplicabilă unei clase de ecuații mai generală, față de care ecuația Fredholm este un caz particular.

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА И НОВЫЙ СПОСОБ ЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ

РЕЗЮМЕ

Автор исследует уравнение (2_1), ядром которого является функция λ, используя новый метод, заключающийся в том, что функции-миноры строятся не при помощи добавления строк и столбцов к некоторым определителям, а при помощи производных по λ этих определителей.

Определяется резольвента (1_2) и устанавливается ее уравнение(3_1), и при помощи трансцендентной функции (4_1) строятся функции (4_2), (4_3) — характеристический определитель ядра, а затем функции (4_4), (4_5) и (5_1). Определяются миноры (4_6), (4_7) и соотношения (5_2), (5_3) и приводится схема производных определителя (5_4).

При помощи таким образом определенных функций дается выражение резольвенты (6_1) и ее уравнения (3_2), а также и уравнения (7_2) её производных при $\lambda = \lambda_0$ — нулю порядка i характеристического определителя; уравнение (7_2) есть уравнение миноров.

Приводится выражение решения (2_2) уравнения (2_1) при λ_0, отличной от нулей характеристического определителя.

Автор устанавливает затем уравнения (5_5) и (5_6) для характеристического определителя.

Даются выражения (8_2) и (8_3) решений уравнения (8_1) и союзного уравнения, а также и выражение ядра при помощи фундаментальных функций (9_1).

Устанавливается выражение (8_6) решений уравнения (8_8), когда λ_0 является нулем порядка i и в то же время необходимым и достаточным условием (8_7).

Полученные результаты применяются к исследованию ядер (9_3), (9_6) и (12_1).

UNE GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM ET UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR L'ÉTUDIER

RÉSUMÉ

L'auteur étudie l'équation (2_1) dont le noyau est une fonction de λ, par une nouvelle méthode qui consiste à construire les fonctions *mineures* non pas en ajoutant des lignes et des colonnes à certains déterminants, mais au moyen des dérivées par rapport à λ de ces déterminants.

Il définit la résolvante (1_2) et établit son équation (3_1), après quoi, à l'aide de la transcendante (4_1), il construit les fonctions (4_2), (4_3) — le déterminant caractéristique du noyau — et ensuite les fonctions (4_4), (4_5) et (5_1). Il définit les mineurs (4_6), (4_7), (4_8), ainsi que les relations (5_2), (5_3), et présente le schéma des dérivées d'un déterminant (5_4).

Au moyen des fonctions ainsi définies, il fournit l'expression de la résolvante (6_1) et de son équation (3_2), ainsi que l'équation (7_2) de ses dérivées pour $\lambda = \lambda_0$ — un zéro d'ordre i du déterminant caractéristique — ; l'équation (7_2) est l'équation des mineurs.

Il donne l'expression de la solution (2_2) de l'équation (2_1), lorsque λ_0 est différent des zéros du déterminant caractéristique.

Il établit ensuite les équations (5_5) et (5_6) pour le déterminant caractéristique.

Il fournit les expressions (8_2) et (8_3) des solutions de l'équation (8_1) et de l'associée de cette dernière, ainsi que l'expression du noyau au moyen des fonctions fondamentales (9_1).

Il établit l'expression (8_6) de la solution de l'équation (8_8), lorsque λ_0 est un zéro d'ordre i, ainsi que la condition nécessaire et suffisante (8_7).

Enfin, il applique les résultats obtenus à l'étude des noyaux (9_3), (9_6) et (12_1).

BIBLIOGRAFIE

1. PRAPORGESCU N., *Sur une classe d'équations intégrales et leurs applications à la statistique.* Bulletin de Mathématiques pures et appliquées et de Physique de l'Ecole polytechnique de Bucarest, Xème année, *1*, *2*, *3*. Fasc. 28, 29, 20 (1938—1939).
2. — *Asupra unei clase de ecuații integrale*, Academia R.P.R., secția de matematică și fizică, Buletin științific, **VIII**, *3* (1956).
3. — *Asupra probabilităților înlănțuite.* Studii și cercetări matematice, **IX**, *2* (1958).
4. — *О изменяющихся во времени и связанных в цепь вероятностях.* Revue de mathématiques pures et appliquées, **IV**, *3* (1959).
5. CIORĂNESCU N., *L'équation intégrale linéaire à limites variables et à un paramètre.* Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences, 37, *1* (1935).
6. GOURSAT ED., *Cours d'analyse*, **III**, ed. a II-a, Gauthier-Villars, Paris.

STABILITATEA INTEGRALĂ LA SISTEMELE DE ECUAȚII DIFERENȚIALE CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT

DE

A. HALANAY

Definiția 1. Soluția banală a sistemului

$$\dot{x}(t) = X\ [t,\ x\ (t),\ x\ (t-\tau)] \tag{1}$$

se numește integral stabilă dacă există $\delta_0 > 0$ și funcția $B(\delta)$ definită pentru $0 < \delta < \delta_0$, continuă, monoton crescătoare, $\lim_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$ astfel că dacă $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\substack{|u| \leqslant B(\delta) \\ |v| \leqslant B(\delta)}} |\eta\ (t,\ u,\ v)|\, dt < \infty$, atunci soluția $x(t; t_0, \varphi)$ a sistemului

$$\dot{x}(t) = X\ [t,\ x\ (t),\ x\ (t-\tau)] + \eta\ [t,\ x\ (t),\ x\ (t-\tau)] \tag{2}$$

cu $\|\varphi\| < \delta$ satisface inegalitatea $|x\ (t; t_0, \varphi)| < B(\delta)$ pentru $t \geqslant t_0$. Soluția banală a sistemului (1) se numește asimptotic integral stabilă dacă e integral stabilă și în plus există funcțiile $T(\delta, \varepsilon)$ și $\gamma(\delta, \varepsilon)$ definite pentru $0 < \delta < \delta_0$, $\varepsilon > 0$, pozitive și astfel că dacă $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\substack{|u| \leqslant B(\delta) \\ |v| \leqslant B(\delta)}} |\eta\ (t,\ u,\ v)|\, dt < \gamma(\delta, C)$ atunci soluția $x\ (t; t_0, \varphi)$ a sistemului (2) cu $\|\varphi\| < \delta$ verifică inegalitatea $|x\ (t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T(\delta, \varepsilon)$.

Lema 1. *Soluția banală a sistemului* (1) *este integral stabilă dacă și numai dacă există* $\delta_0 > 0$ *și funcția* $B(\delta)$ *definită pentru* $0 < \delta < \delta_0$, *continuă, monoton crescătoare,* $\lim_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$, *astfel ca pentru orice funcție continuă* $\eta\ (t)$ cu $\int_{t_0}^{\infty} |\eta\ (t)|\, dt < \delta$ soluția $x\ (t; t_0, \varphi)$ a sistemului

$$\dot{x}(t) = X\ [t,\ x\ (t),\ x\ (t-\tau)] + \eta\ (t) \tag{3}$$

cu $\|\varphi\| < \delta$ să verifice inegalitatea $x\ (t; t_0, \varphi) < B(\delta)$ pentru $t \geqslant t_0$.

Demonstrație. E suficient să arătăm că dacă are loc condiția din enunț soluția banală a sistemului (1) este integral stabilă. Fie $\eta(t, u, v)$ astfel ca $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\substack{|u| \leqslant B(\delta) \\ |v| \leqslant B(\delta)}} |\eta(t, u, v)| \, dt < \delta$ unde $B(\delta)$ este aleasă pe baza proprietății din enunț. Fie φ continuă pe $[t_0 - \tau, t_0]$, astfel ca $\|\varphi\| < \delta$ și $x(t; t_0, \varphi)$ soluția sistemului (3) definită pentru $t \geqslant t_0 - \tau$. Avem $|x(t; t_0, \varphi)| < B(\delta)$ pentru $t \geqslant t_0$. Dacă nu ar fi așa, ar exista un prim punct $t_1 > t_0$ astfel ca $|x(t_1; t_0, \varphi)| = B(\delta)$. Pentru $t \in [t_0, t_1]$ definim funcția $\eta(t)$ prin relația $\eta(t) = \eta[t, x(t; t_0, \varphi), x(t - \tau; t_0, \varphi)]$. Atunci $\eta(t)$ e continuă pe $[t_0, t_1]$ și

$$\int_{t_0}^{t_1} |\eta(t)| \, dt = \int_{t_0}^{t_1} |\eta[(t, x(t; t_0, \varphi), x(t - \tau; t_0, \varphi)]| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1} \sup_{\substack{|u| \leqslant B(\delta) \\ |v| \leqslant A(\delta)}} |\eta(t, u, v)| \, dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \sup_{\substack{|u| \leqslant B(\delta) \\ |v| \leqslant B(\delta)}} |\eta(t, u, v)| \, dt < \delta.$$

Funcția $\eta(t)$ poate fi prelungită continuu pe toată semiaxa $t \geqslant t_0$ cu păstrarea proprietății $\int_{t_0}^{\infty} |\eta(t)| \, dt < \delta$; într-adevăr alegem $t_2 > t_1$ astfel ca $t_2 - t_1 < \dfrac{2(\delta - \int_{t_0}^{t_1} |\eta(t)| \, dt)}{|\eta(t_1)| + 1}$, alegem pe $\eta(t)$ liniară pe $[t_1, t_2]$, $\eta(t_2) = 0$ și $\eta(t) \equiv 0$ pentru $t \geqslant t_2$. Fie $y(t)$ soluția sistemului (3) unde $\eta(t)$ este funcția construită mai sus și $y(t) = \varphi(t)$ pentru $t \in [t_0 - \tau, t_0]$. Atunci din $\|\varphi\| < \delta$ și $\int_{t_0}^{t} |\eta(t)| \, dt < \delta$ rezultă $|y(t)| < B(\delta)$ pentru $t \geqslant t_0$. Dar pentru $t \in [t_0, t_1]$ avem $y(t) \equiv x(t; t_0, \varphi)$ și $|x(t_1; t_0, \varphi) = B(\delta)$. Contradicția obținută demonstrează afirmația lemei.

Lema 2. *Soluția banală a sistemului* (1) *este asimptotic integral stabilă dacă și numai dacă este integral stabilă și în plus există funcțiile* $T(\delta, \varepsilon) > 0, \gamma(\delta, \varepsilon) > 0$ *definite pentru* $0 < \delta < \delta_0, \varepsilon > 0$ *astfel ca pentru orice* $\eta(t)$ *continuă cu* $\int_{t_0}^{\infty} |\eta(t)| \, dt < \gamma(\delta, \varepsilon)$ *soluția* $x(t; t_0, \varphi)$ *a sistemului* (3) *pentru care* $\|\varphi\| < \delta$ *verifică inegalitatea* $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$ *pentru* $t \geqslant t_0 + T(\delta, \varepsilon)$.

Demonstrație. Dacă soluția banală a sistemului (1) nu ar fi asimptotic integral stabilă ar exista $0 < \delta' < \delta_0$ și $\varepsilon' > 0$ astfel ca pentru orice $T > 0$ și $\gamma > 0$ să existe φ continuă pe $[t_0 - \tau, t_0]$ cu $\|\varphi\| < \delta'$, $\eta(t, u, v)$ cu $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\substack{|u| \leqslant B(\delta') \\ |v| \leqslant B(\delta')}} |\eta(t, u, v)| \, dt < \gamma$ și $t_1 > t_0 + T$ astfel ca soluția $x(t; t_0, \varphi)$ a sistemului (2) să verifice inegalitatea $|x(t_1; t_0, \varphi)| \geqslant \varepsilon$. Fie $T(\delta', \varepsilon'), \gamma(\delta', \varepsilon')$ alese pe baza proprietății formulate în lemă, φ,

$\eta(t, u, v)$ și t_1 ca mai sus. Fie $\eta(t) = \eta[t, x(t; t_0, \varphi), x(t-\tau; t_0, \varphi)]$ definită pe $[t_0, t_1]$.

Avem

$$\int_{t_0}^{t_1} |\eta(t)|\,dt = \int_{t_0}^{t_1} |\eta(t, x(t; t_0 \varphi), x(t-\tau; t_0, \varphi))|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1} \sup_{\substack{|u| \leqslant B(\delta) \\ |v| \leqslant B(\delta)}} |\eta(t, u, v)|\,dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \sup_{\substack{|u| \leqslant B(\delta) \\ |v| \leqslant B(\delta)}} |\eta(t, u, v)|\,dt < \gamma(\delta', \varepsilon').$$

Ca în lema precedentă prelungim pe $\eta(t)$ pe toată semiaxa $t \geqslant t_0$ și construim soluția $y(t)$ a sistemului (3) care coincide cu $\varphi(t)$ pe $[t_0-\tau, t_0]$. Din $\int_{t_0}^{\infty} |\eta(t)|\,dt < \gamma(\delta', \varepsilon')$ și $\|\varphi\| < \delta'$ rezultă $|y(t)| < \varepsilon'$ pentru $t \geqslant t_0 + T(\delta', \varepsilon')$ și în particular $|y(t_1)| < \varepsilon'$. Dar pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ avem $y(t) \equiv x(t; t_0, \varphi)$ și $|x(t_1; t_0, \varphi)| \geqslant \varepsilon'$. Contradicția obținută demonstrează afirmația lemei.

LEMA 3. *Soluția banală a sistemului* (1) *este integral stabilă dacă și numai dacă există* $B(\delta)$ *continuă și monoton crescătoare pe* $[0, \delta_0]$, $\lim_{\delta \to 0} B(\delta) = 0$, *astfel ca pentru orice funcție* $y(t)$ *continuă pe* $[t_0 - \tau, t_0]$, *cu derivată continuă pe* $(t_0, t_1]$ *și astfel ca* $\sup_{t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0} |y(t)| < \delta$, $\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(t) - X[t, y(t), y(t-\tau)]|\,dt < \delta$ *să avem* $|y(t)| < B(\delta)$ *pe* $[t_0, t_1]$.

Demonstrație. Fie soluția banală integral stabilă, $B(\delta)$ construită pe baza stabilității integrale și $y(t)$ continuă pe $[t_0 - \tau, t_0]$ cu derivata continuă pe $(t_0, t_1]$, $\sup |y(t)| < \delta$ pentru $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, $\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(t) - X[t, y(t), y(t-\tau)]|\,dt < \delta$. Fie $\eta(t)$ continuă pentru $t \geqslant t_0$, astfel ca

$$\eta(t) = \dot{y}(t) - X[t, y(t), y(t-\tau)] \text{ pe } [t_0, t_1],\ \eta(t) \equiv 0$$

pentru $t \geqslant t_2 > t_1$ și $\int_{t_0}^{\infty} |\eta(t)|\,dt < \delta$. Asemenea funcție se poate construi ca în demonstrația lemei 1. Considerăm sistemul (3) cu $\eta(t)$ astfel aleasă și soluția $x(t; t_0, \varphi)$ a acestui sistem cu $\varphi(s) = y(s)$ pentru $t_0 - \tau \leqslant s \leqslant t_0$. Atunci $x(t; t_0, \varphi) \equiv y(t)$ pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Pe baza lemei 1 avem $|x(t; t_0, \varphi)| < B(\delta)$ pentru $t \geqslant t_0$, deci $|y(t)| < B(\delta)$ pe $[t_0, t_1]$. Fie acum $B(\delta)$ ca în enunț, $\eta(t)$ continuă pentru $t \geqslant t_0$, $\int_{t_0}^{\infty} |\eta(t)|\,dt < \delta$. Soluția $x(t; t_0, \varphi)$ a sistemului (3) cu $\|\varphi\| < \delta$ verifică pentru orice $t_1 > t_0$ condiția din lemă și deci $|x(t; t_0, \varphi)| < B(\delta)$ pe $[t_0, t_1]$, deci pentru toți $t \geqslant t_0$. Pe baza lemei 1 rezultă stabilitatea integrală.

Din lema 3. rezultă că stabilitatea integrală coincide cu stabilitatea tare a lui Okamura [2].

LEMA 4. *Soluția banală a sistemului* (1) *este asimptotic integral stabilă dacă și numai dacă este integral stabilă și în plus există funcțiile* $T(\delta, \varepsilon) > 0$, $\gamma(\delta, \varepsilon) > 0$ *definite pentru* $0 < \delta < \delta_0$, $\varepsilon > 0$, *astfel ca pentru orice funcție* $y(t)$ *continuă pe* $[t_0 - \tau, t_1]$, *cu derivată continuă pe* $(t_0, t_1]$, $t_1 > t_0 + T$ *și* $\sup_{t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0} | y(t) | < \delta$,

$$\int_{t_0}^{t_1} | \dot{y}(t) - X[t, y(t), y(t-\tau)] | \, dt < \gamma(\delta, \varepsilon)$$

să avem $| y(t) | < \varepsilon$ *pe* $[t_0 + T(\delta, \varepsilon), t_1]$.

Demonstrație. Presupunem soluția banală a sistemului (1) asimptotic integral stabilă și $T(\delta, \varepsilon)$, $\gamma(\delta, \varepsilon)$ ca în lema 2, $y(t)$ ca în enunț. Definim pentru $t \geqslant t_0$ funcția $\eta(t)$ egală cu $\dot{y}(t) - X[t, y(t), y(t-\tau)]$ pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $\eta(t) \equiv 0$ pentru $t \geqslant t_2 > t_1$ și $\int_{t_0}^{\infty} | \eta(t) | \, dt < \gamma(\delta, \varepsilon)$. Considerăm soluția $x(t; t_0, \varphi)$ a sistemului (3) cu $\varphi(s) = y(s)$ pentru $s \in [t_0 - \tau, t_0]$. Pe baza lemei 2 rezultă $| x(t; t_0, \varphi) | < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T(\delta, \varepsilon)$ și deoarece $x(t; t_0, \varphi) = y(t)$ pe $[t_0, t_1]$ rezultă $| y(t) | < \varepsilon$ pentru $t_0 + T \leqslant t \leqslant t_1$. Fie acum $T(\delta, \varepsilon)$, $\gamma(\delta, \varepsilon)$ ca în enunț și $\eta(t)$ continuă pentru $t \geqslant t_0$ astfel ca $\int_{t_0}^{\infty} | \eta(t) | \, dt < \gamma(\delta, \varepsilon)$. Soluția $x(t; t_0, \varphi)$ cu $\| \varphi \| < \delta$ a sistemului (3) verifică pentru orice $t_1 > t_0$ condiția din enunț și deci $| x(t; t_0, \varphi) | < \varepsilon$ pentru $t \geqslant t_0 + T(\delta, \varepsilon)$.

LEMA 5. *Dacă* $V[t, \varphi]$ *este pentru* $t \geqslant 0$ *o funcțională continuă, definită pe o sferă din spațiul funcțiilor vectoriale continue pe* $[-\tau, 0]$ *și*

$$1^\circ. \; | V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2] | \leqslant K \| \varphi_1 - \varphi_2 \| \text{ pentru } \| \varphi_1 \| \leqslant \delta_0, \; \| \varphi_2 \| \leqslant \delta_0.$$

$$2^\circ. \; \limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \Phi[x(t+s; t_0, \varphi)]$$

unde $x(t; t_0, \varphi)$ *este soluția sistemului* (1) *iar* Φ *este o funcțională continuă, atunci pentru orice funcție* $y(t)$ *continuă pe* $[t_0 - \tau, t_1]$ *cu derivată continuă pe* $(t_0, t_1]$ *are loc inegalitatea*

$$V[t_1, y(t_1+s)] \leqslant V[t_0, y(t_0+s)] + K \int_{t_0}^{t_1} | \dot{y}(t) - X(t, y(t), y(t-\tau)) | \, dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Phi[y(t+s)] \, dt.$$

Demonstrație. Fie $u \in [t_0; t_1]$; considerăm soluția $x(t; u, \psi)$ a sistemului (1) cu $\psi(t) = y(t)$ pentru $u - \tau \leqslant t \leqslant u$. Avem

$$| V[u+h, y(u+h+s)] - V[u+h, x(u+h+s; u, \psi)] | \leqslant$$

$$\leqslant K \sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} | y(u+h+s) - x(u+h+s; u, \psi) | =$$

$$= K \sup_{-h \leqslant s \leqslant 0} | y(u+h+s) - x(u+h+s; u, \psi) | =$$

$$= K \sup_{u \leqslant v \leqslant u+h} | y(v) - x(v; u, \psi) | =$$

$$= K \sup_{u \leqslant v \leqslant u+h} | y(v) - y(u) - \int_u^v X[t, x(t, u, \psi), y(t-\tau)]\, dt | =$$

$$= K \sup_{u \leqslant v \leqslant u+h} | (v-u)\dot{y}(w) - \int_u^v X[t, x(t, u, \psi), y(t-\tau)]\, dt | \leqslant$$

$$\leqslant K h \sup_{u \leqslant v \leqslant u+h} | \dot{y}(w) - \frac{1}{v-u}\int_u^v X[t, x(t; u, \psi), y(t-\tau)]\, dt |$$

De aici rezultă

$$\frac{1}{h} | V[u+h, y(u+h+s)] - V[u+h, x(u+h+s; u, \psi)] | \leqslant$$

$$\leqslant K \sup_{u \leqslant v \leqslant u+h} | \dot{y}(w) - \frac{1}{v-u}\int_u^v X[t, x(t; u, \varphi), y(t-\tau)]\, dt |,$$

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[u+h, y(u+h+s)] - V[u+h, x(u+h+s; u, \psi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant K | \dot{y}(u) - X[u, y(u), y(u-\tau)] |,$$

deoarece $\lim_{v \to u} \frac{1}{v-u}\int_u^v X[t, x(t, u, \psi), y(t-\tau)]\, dt =$

$$= X[u, x(u; u, \psi), y(u-\tau)] = X[u, y(u), y(u-\tau)].$$

Mai departe

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[u+h, y(u+h+s)] - V[u, y(u+s)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{h \to 0+} \frac{V[u+h, y(u+h+s)] - V[u+h, x(u+h+s; u, \psi)]}{h} +$$

$$+ \limsup_{h \to 0+} \frac{V[u+h, x(u+h+s; u, \psi)] - V[u, y(u+s)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant K | \dot{y}(u) - X(u, y(u), y(u-\tau)) | + \Phi(y(u+s)).$$

Integrînd de la t_0 la t_1, obținem

$$V[t_1, y(t_1+s)] - V[t_0, y(t_0+s)] \leqslant K\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(u) - X[u, y(u), y(u-\tau)]|\,du +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \Phi(y(u+s))\,du.$$

Lema e demonstrată.

TEOREMA 1. *Dacă există o funcțională continuă $V[t, \varphi]$ definită pentru $t \geqslant t_0$ pe sfera $\|\varphi\| \leqslant \delta_0$ din spațiul funcțiilor vectoriale continue pe $[-\tau, 0]$ și avînd proprietățile*

1°. $V[t, \varphi] \geqslant a(\|\varphi\|)$, $V[t, 0] \equiv 0$; *$a(r)$ continuă și monoton crescătoare pentru $r > 0$, $a(0) = 0$.*

2°. $|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leqslant K\|\varphi_1 - \varphi_2\|$

$$3°.\ \limsup_{h\to 0+} \frac{V[t+h,\ x(t+h+s;\ t_0, \varphi)] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant g(t)\, V[t, x(t+s; t_0, \varphi)],\ \textit{unde} \int_{t_0}^{\infty} g(t)\,dt < \infty,\quad g(t) \geqslant 0,$$

atunci soluția banală a sistemului (1) *este integral stabilă.*

Demonstrație. Ca în demonstrația lemei 5 obținem

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{V[u+h, y(u+h+s)] - V[u, y(u+s)]}{h} \leqslant$$

$$\leqslant K|\dot{y}(u) - X(u, y(u), y(u-\tau))| + g(u)\, V[u, y(u+s)]$$

De aici căpătăm prin integrare

$$V[t, y(t+s)] \leqslant V[t_0, y(t_0+s)]\, e^{\int_{t_0}^{t} g(t)\,dt} +$$

$$+ K\, e^{\int_{t_0}^{t} g(t)\,dt} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{u} g(u)\,du} |\dot{y}(u) - X[u, y(u), y(u-\tau)]|\,du$$

Dacă $\|y(t_0+s)\| < \delta$ și $\int_{t_0}^{\infty} g(t)\,dt = M$ iar

$\int_{t_0}^{t_1} |\dot{y}(u) - X[u, y(u), y(u-\tau)]|\,du < \delta$, obținem

$$a(\|y(t+s)\|) \leqslant V[t, y(t+s)] < K\, e^M\, \delta + M\, K\, \delta = K(e^M + M)\,\delta$$

deci

$$\|y(t+s)\| < B(\delta) = a^{-1}[k(e^M + M)\,\delta].$$

Pe baza lemei 3 de aici rezultă stabilitatea integrală a soluției banale a sistemului (1).

Consecințe. 1. Un caz particular al teoremei demonstrate se capătă pentru $g(t) \equiv 0$. Atunci condiția 3° devine

3°'. $V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]$ este o funcție monoton descrescătoare de t.

2. Dacă soluția banală a sistemului

$$\dot{y}(t) = A(t)\, y(t) + B(t)\, y(t-\tau) \tag{4}$$

unde $A(t)$ și $B(t)$ sînt continue și mărginite pentru $t \geqslant 0$ este uniform stabilă iar $|f(t, u, v)| \leqslant g(t)(|u| + |v|)$ pentru $|u| + |v| < \delta_0$ și $\int^{\infty} g(t)\,dt < \infty$, atunci soluția banală a sistemului

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, x(t)(t-\tau) + f[t, x(t), x(t-\tau)] \tag{5}$$

este integral stabilă.

Într-adevăr într-o lucrare anterioară [3] s-a arătat că în condițiile de mai sus pentru sistemul (5) există o funcțională $V[t, \varphi]$ cu toate proprietățile cerute.

Teorema 2. *Dacă există o funcțională $V[t, \varphi]$ definită și continuă pentru $t \geqslant 0$ pe sfera $\|\varphi\| \leqslant \delta_0$ din spațiul funcțiilor vectoriale continue pe $[-\tau, 0]$ și cu proprietățile:*

1°. $V[t, \varphi] \geqslant a(\|\varphi\|)$, $V[t, 0] \equiv 0$, $a(r)$ *continuă și monoton crescătoare pentru* $r > 0$, $a(0) = 0$,

2°. $|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leqslant K\|\varphi_1 - \varphi_2\|$,

3°. $$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t_0, \varphi)] - V[t, x(t+s; t_0, \varphi)]}{h} \leqslant$$

$\leqslant -c[\|x(t+s; t_0, \varphi)\|]$, $c(r)$ *continuă și monoton crescătoare pentru* $r > 0$, $c(0) = 0$, *atunci soluția banală a sistemului (1) este asimptotic integral stabilă.*

Demonstrație. Pe baza teoremei precedente soluția banală a sistemului (1) este integral stabilă (vezi consecința, cazul $g(t) \equiv 0$). Pentru $\varepsilon > 0$ alegem pe $\gamma_1 > 0$ astfel ca dacă

$$\sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} |y(t_2 + s)| < \gamma_1 \text{ și } \int_{t_2}^{t_3} |\dot{y}(t) - X[t, y(t), y(t-\tau)]|\,dt < \gamma_1,$$

să rezulte $|y(t)| < \varepsilon$ pentru $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$; (asemenea γ_1 există pe baza lemei 3 și anume $\gamma_1 = B^{-1}(\varepsilon)$). Mai departe fie $\gamma = \min(\delta, \gamma_1)$, $l = \inf_{\gamma_1 \leqslant r \leqslant B(\delta)} c(r)$, $T(\delta, \varepsilon) = \dfrac{K[\delta + \gamma]}{l}$.

Fie $y(t)$ o funcție continuă pe $[t_0 - \tau, t_1]$, cu derivata continuă pe $(t_0, t_1]$, $t_1 > t_0 + T(\delta, \varepsilon)$, astfel ca $\sup_{t_0 - \tau \leqslant u \leqslant t_0} |y(u)| < \delta$

$\int_{t_0}^{t_1} | \dot{y}(t) - X[t, y(t), y(t-\tau)]| \, dt < \gamma$. Dacă am avea $| y(t) | \geqslant \gamma$ pe $[t_0, t_0 + T]$ atunci pe baza lemei 5 avem

$$V[t_0 + T, y(t_0 + T + s)] \leqslant \overline{V}[t_0, y(t_0 + s)] +$$

$$+ K \int_{t_0}^{t_0+T} | \dot{y}(t) - X[t, y(t), y(t-\tau)] | \, dt - \int_{t_0}^{t_0+T} c(\| y(t+s) \|) \, dt \leqslant$$

$$\leqslant K\delta + K\gamma - Tl = 0$$

Am obținut o contradicție, deoarece $V[t_0 + T, y(t_0 + T + s)] \geqslant a[\| y(t_0 + T + s) \|] > 0$.

De aici rezultă că există $u \in [t_0, t_0 + T]$ astfel ca $| y(u) | < \gamma \leqslant \gamma_1$. Din

$$\int_u^{t_1} | \dot{y}(t) - X[t, y(t), y(t-\tau)] | \, dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} | \dot{y}(t) - X[t, y(t), y(t-\tau)] | \, dt < \gamma \leqslant \gamma_1$$

rezultă $| y(t) | < \varepsilon$ pentru $u \leqslant t < t_1$, deci $| y(t) | < \varepsilon$ pentru $t \in [t_0 + T, t_1]$.

Din lema 4 rezultă stabilitatea integrală asimptotică a soluției banale a sistemului (1).

Consecința 1. Dacă $| X(t, u_1, v_1) - X(t, u_2, v_2) | \leqslant L(| u_1 - u_2 | + | v_1 - v_2 |)$ pentru $t \geqslant 0$, $| u_1 | \leqslant \delta_0$, $| u_2 | \leqslant \delta_0$, $| v_1 | \leqslant \delta_0$, $| v_2 | \leqslant \delta_0$ iar L nu depinde de t și dacă soluția banală este uniform asimptotic stabilă, atunci există o funcțională $V[t, \varphi]$ cu toate proprietățile din teorema 2. De aici rezultă că dacă $X(t, u, v)$ are proprietatea de mai sus, din stabilitatea asimptotică uniformă rezultă stabilitatea integrală asimptotică.

Consecința 2. Din observația precedentă rezultă în particular că dacă soluția banală a sistemului (4) este uniform asimptotic stabilă, atunci soluția banală a sistemului (5) este asimptotic integral stabilă.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

РЕЗЮМЕ

Понятие об интегральной устойчивости введено в [1]. Доказываются следующие теоремы:

1°. *Если существует непрерывный функционал* $V[t, \varphi]$, *определенный при* $t \geqslant t_0$ *на сфере* $\| \varphi \| < \delta_0$ *пространства непрерывных на* $[-\tau, 0]$ *вектор-функций, обладающий свойствами:*

a) $V[t, \varphi] \geqslant a(\|\varphi\|)$, $V[t, 0] \equiv 0$, $a(r)$ — *непрерывная и возрастающая при* $r > 0$, $a(0) = 0$;

b) $|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leqslant K\|\varphi_1 - \varphi_2\|$;

c) $$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t + h, x(t + h + s; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} \leqslant g(t)\, V(t, \varphi),$$

где $\int^{\infty} g(t)\, dt < \infty$, $g(t) \geqslant 0$, *то банальное решение* $\dot{x}(t) = X[t, x(t), x(t - \tau)]$ *интегрально устойчиво.*

2°. *Если в предыдущей теореме вместо* c) *выполняется*

c′) $$\lim_{h \to 0+} \frac{V[t + h, x(t + h + s; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} \leqslant -c(\|\varphi\|)$$

$c(r)$ — *непрерывная и возрастающая,* $c(0) = 0$, *то банальное решение асимптотически интегрально устойчиво.*

LA STABILITÉ INTÉGRALE POUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À ARGUMENT RETARDÉ

RÉSUMÉ

La notion de stabilité intégrale à été introduite dans [1].
On prouve les théorèmes suivants :

1° *S'il existe une fonctionnelle* $V[t, \varphi]$ *définie pour* $t \geqslant t_0$ *sur la sphère* $\|\varphi\| < \delta_0$ *de l'espace des fonctions vectorielles continues sur* $[-\tau, 0]$ *avec les propriétés :*

a) $V[t, \varphi] \geqslant a(\|\varphi\|)$, $V[t, 0] \equiv 0$, $a(r)$ *continue et croissante pour* $r > 0$, $a(0) = 0$,

b) $|V[t, \varphi_1] - V[t, \varphi_2]| \leqslant K\|\varphi_1 - \varphi_2\|$,

c) $$\limsup_{h \to 0+} \frac{V[t + h, x(t + h + s; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} \leqslant g(t)\, V[t, \varphi]$$

où $\int^{\infty} g(t)\, dt < \infty$, $g(t) \geqslant 0$

alors la solution banale du système $\dot{x}(t) = X[t, x(t), x(t - \tau)]$ admet la *stabilité intégrale.*

2° *Si dans le théorème précédent au lieu de c) on a*

$$c') \quad \limsup_{h \to 0+} \frac{V[t+h, x(t+h+s; t, \varphi)] - V[t, \varphi]}{h} \leqslant -c(\|\varphi\|)$$

c (r) *— continue et croissante,* $c(0) = 0$, *alors la solution banale du système admet la stabilité intégrale asymptotique.*

BIBLIOGRAFIE

1. И. Вркоч, *Чехословацкий математический журнал*, **9** (84), 71 — 129, (1959).
2. Hyaschi, Kyuzo, Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A, **XXXII**, Mathematics, *2* (1959).
3. А. Халанай, Revue de Mathématiques pures et appliquées, **V**, *2* (1960).
4. A. Halanay, Comunicările Acad. R.P.R. **X**, *7* (1960).

ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA TRANSPORTURILOR

I. PROBLEMA TRANSPORTURILOR CU CENTRE LEGATE

DE

E. BALAŞ şi L. P. HAMMER

§ 1. INTRODUCERE

Prin problema transporturilor se înțelege problema determinării valorilor x_{ij} $(i = 1,2,..., m;\ j = 1,2,..., n)$ pentru care suma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \tag{1}$$

își atinge minimul și pentru care sînt satisfăcute ecuațiile restrictive

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \qquad (i = 1,..., m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \qquad (j = 1,..., n) \\ x_{ij} &\geqq 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

a_i, b_j și c_{ij} fiind numere pozitive date care satisfac relația

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{3}$$

Interpretarea economică a problemei este următoarea : dacă $i = 1, 2,..., m$ reprezintă centrele de producție, iar $j = 1,2,..., n$ centrele de consum în care se produce, respectiv se consumă un anumit produs, în cantitățile a_i respectiv b_j și dacă c_{ij} reprezintă cheltuielile unitare de transport de la centrul i la centrul j, atunci valorile x_{ij} pentru care suma s este minimă reprezintă cantitățile de marfă, ce trebuie transportate de la centrul i la centrul j pentru ca cheltuielile totale de transport a mărfii date să fie minime.

§ 2. ENUNŢAREA PROBLEMEI

Un caz deosebit, frecvent întîlnit în practică, al problemei transporturilor se iveşte atunci cînd pentru o parte din centrele de consum se dă doar suma consumurilor lor, fără specificarea acestor consumuri pe centre. Acesta este cazul, de exemplu, la produsele pentru care cantitatea ce se exportă se dă fără specificarea staţiilor de frontieră. (Aceste staţii pot fi evident considerate drept centre de consum pentru care nu avem fixat decît consumul total). O situaţie analoagă se poate ivi la un produs care se importă.

Problema poate fi formulată astfel: să se găsească valorile x_{ij} $(i = 1,2,..., p\,;\ j = 1,2,..., q + r)$ pentru care suma

$$t(X) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q+r} c_{ij}\, x_{ij} \tag{4}$$

îşi atinge minimul şi pentru care sînt satisfăcute ecuaţiile restrictive

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{q+r} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1,2,..., p) \\ &\sum_{i=1}^{p} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1,2,..., q) \\ &\sum_{i=1}^{p} \sum_{\substack{j=q+1 \\ x_{ij} \geqq 0}}^{q+r} x_{ij} = b \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

a_i, b_j, b şi c_{ij} fiind numere pozitive date care satisfac relaţia

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{q} b_j + b \tag{6}$$

În interpretarea economică a problemei $i = 1,2,..., p$ reprezintă centrele de producţie, $j = 1,2,..., q$ sînt centrele de consum pentru care consumurile sînt specificate (şi pe care le vom numi *centre independente*) iar $j = q + 1,\ q + 2,...,\ q + r$ reprezintă centrele de consum pentru care se dă doar suma consumurilor (şi pe care le vom numi *centre legate*). Producţia centrelor i $(i = 1,2,..., p)$ este a_i, consumul centrelor independente j $(j = 1,2,..., q)$ este b_j iar suma consumurilor centrelor legate j $(j = q + 1,\ q + 2,...,\ q + r)$ este b. Interpretarea lui c_{ij} şi x_{ij} este aceeaşi ca la § 1, iar t reprezintă cheltuielile totale de transport.

Problema determinării valorilor x_{ij} $(i = 1,..., p\,;\ j = 1,...,\ q + r)$ pentru care suma (4) îşi atinge minimul şi pentru care sînt satisfăcute ecuaţiile restrictive (5) o vom numi *problema de transporturi cu centre legate*.

§ 3. METODA DE REZOLVARE

După cum se vede avem de a face cu o problemă de programare liniară care poate fi rezolvată cu metoda simplex (vezi de exemplu [2]). Se știe însă că pentru rezolvarea problemei transporturilor există metode mult mai simple, cum ar fi cele date în [1], [3], [4]. Scopul prezentului articol este găsirea unei asemenea metode simple pentru rezolvarea problemei de mai sus. Aceasta se realizează prin reducerea problemei date la o problemă obișnuită de transporturi după cum se va arăta.

a) Sistemul (5) este totdeauna compatibil. Într-adevăr, luînd $b_{q+1} = b$, $b_{q+2} = \ldots = b_{q+r} = 0$, obținem o problemă obișnuită de transporturi care, după cum se știe, are totdeauna soluție.

b) Fie $X = (x_{ij})$ $(i = 1,\ldots, p;\ j = 1,\ldots, q+r)$ o soluție oarecare a sistemului (5). Fie $c_{ij_i} = \min(c_{i,q+1},\ldots, c_{i,q+r})$. În caz că acest minim se realizează de mai multe ori, luăm drept c_{ij_i} oricare din elementele care realizează minimul.

Să considerăm matricea $X' = (x'_{ij})$ $(i = 1,\ldots, p;\ j = 1,\ldots, q+r)$ definită astfel:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & (j \leqq q, \quad i = 1,\ldots, p) \\ \sum\limits_{j=q+1}^{q+r} x_{ij} & (j = j_i, \quad i = 1,\ldots, p) \\ 0 & (q < j \neq j_i, \quad i = 1,\ldots, p) \end{cases} \tag{7}$$

După cum se vede pentru fiecare i și pentru $q < j$ există un singur x'_{ij} pozitiv.

c) X' este o soluție a sistemului (5). Într-adevăr

$$\sum_{j=1}^{q+r} x'_{ij} = \sum_{j=1}^{q} x'_{ij} + \sum_{j=q+1}^{q+r} x'_{ij} = \sum_{j=1}^{q} x_{ij} + x'_{ij_i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} x_{ij} + \sum_{j=q+1}^{q+r} x_{ij} = \sum_{j=1}^{q+r} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,\ldots, p)$$

$$\sum_{i=1}^{p} x'_{ij} = \sum_{i=1}^{p} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,\ldots, q)$$

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=q+1}^{q+r} x'_{ij} = \sum_{i=1}^{p} x'_{ij} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=q+1}^{q+r} x_{ij} = b$$

și evident $x'_{ij} \geqq 0$.

d) Să notăm cu M mulțimea soluțiilor sistemului (5) și cu M' submulțimea lui M formată din soluțiile definite prin (6).

Între soluțiile sistemului (5) introducem o relație de ordine definind $X \leqq Y$ („X este preferabil lui Y") dacă și numai dacă $t(X) \leqq t(Y)$. Problema este de a găsi $X^\circ = \min\limits_{X \in M} X$.

Oricare ar fi $X \in M$, există $X' \in M'$ astfel încît $X' \leqq X$. Într-adevăr

$$t(X') = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q+r} c_{ij} x'_{ij} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} c_{ij} x'_{ij} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=q+1}^{q+r} c_{ij} x'_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{p} c_{ij_i} x'_{ij_i} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=q+1}^{q+r} c_{ij_i} x_{ij}.$$

Prin urmare din definiția lui c_{ij_i} rezultă că

$$t(X') \leqq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q+r} c_{ij} x_{ij} = t(X)$$

Aşadar pentru oricare soluție X a sistemului (5) există o soluție preferabilă $X' \in M'$. Avem deci :

LEMA 1.

$$\min_{X \in M} X = \min_{X' \in M'} X'$$

Observăm că determinarea soluției optime $X^\circ = \min_{X \in M} X$ se reduce la problema mult mai simplă a determinării soluției care realizează $\min_{X' \in M'} X'$

e) Să considerăm problema de transporturi ale cărei date se definesc astfel :

$$\begin{cases} \bar{a}_i = a_i & (i = 1,..., p) \\ \bar{b}_j = \begin{cases} b_j & (j = 1,..., q) \\ b & (j = q+1) \end{cases} \\ \bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & (i = 1,..., p\,;\ j = 1,..., q) \\ c_{ij_i} & (i = 1,..., p\,;\ j = q+1) \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

unde c_{ij_i} este definit ca la pct. b.

Fie $\bar{X}^0 = (\bar{x}^0_{ij})$ $(i = 1,..., p\,;\ j = 1,..., q+1)$ soluția optimă a acestei probleme de transporturi.

Definind $X^0 = (x^0_{ij})$ $(i = 1,..., p\,;\ j = 1,..., q+r)$ prin

$$x^0_{ij} = \begin{cases} \bar{x}^0_{ij} & (i = 1,..., p\,;\ j = 1,..., q) \\ \bar{x}^0_{i,\,q+1} & (i = 1,..., p\,;\ j = j_i) \\ 0 & (i = 1,..., p\,;\ q < j \neq j_i) \end{cases} \tag{9}$$

observăm că X° face parte din M'. Avem

LEMA 2.

$$X^0 = \min_{X' \in M'} X'$$

Într-adevăr, fie X' un element oarecare din M'. Atunci luînd $\bar{X}' = (\bar{x}'_{ij})$ $(i = 1,..., p\,;\ j = 1,..., q+1)$ definit prin

$$\bar{x}'_{ij} = \begin{cases} x'_{ij} & (i = 1,..., p\,;\ j \neq q+1) \\ x'_{ij_i} & (i = 1,..., p\,;\ j = q+1) \end{cases}$$

observăm că, întrucît $\overline{X}^0$ este prin definiție preferabil lui $\overline{X}'$,

$$t(X') = t(\overline{X}') \geqq t(\overline{X}^0) = t(X^0),$$

ceea ce confirmă justețea afirmației noastre.

f) Din lemele 1 și 2 avem

TEOREMA I. *Soluția X^0 a sistemului* (5) *care minimizează valoarea lui* (4) *se obține rezolvînd problema de transporturi cu datele definite prin* (8) *și construind apoi (x_{ij}) prin formulele* (9).

g) *Observații.* Vedem că soluția optimă a unei probleme de transporturi cu centre legate se obține transformînd problema cu ajutorul formulelor (8) într-o problemă obișnuită de transporturi și efectuînd asupra soluției optime a acesteia din urmă operațiile definite prin formulele (9).

Prin aceasta rezolvarea unei probleme de transporturi cu centre legate, care are p centre de producție și $q + r$ centre de consum (q centre independente și r centre legate), se reduce la rezolvarea unei probleme obișnuite de transporturi cu p centre de producție și $q + 1$ centre de consum. În consecință [4] problema noastră are totdeauna o soluție optimă cu cel mult $p + q$ elemente pozitive.

§ 4. PROBLEMA DE TRANSPORTURI CU GRUPURI DE CENTRE LEGATE ȘI REZOLVAREA EI

În cele de pînă acum am examinat problema de transporturi în care toate centrele legate formau un singur grup consumator. Se ivesc însă cazuri cînd există mai multe grupe de centre de consum legate între ele în cadrul fiecărei grupe. Acesta este cazul de exemplu atunci cînd e vorba de transportul unei mărfi ce se exportă în mai multe țări, pentru fiecare țară existînd mai multe stații de export, și cînd cantitățile ce se exportă se dau numai pe țări, fără specificarea cantităților pentru fiecare stație.

Această problemă, pe care o vom numi *problemă de transporturi cu grupe de centre legate*, poate fi formulată astfel:

Să se determine valorile x_{ij} $(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q_0 + \ldots + q_k)$ care satisfac sistemul

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{q_k} x_{ij} = a_i & (i = 1, \ldots, p) \\ \sum_{i=1}^{p} x_{ij} = b_j & (j = 1, \ldots, q_0) \\ \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=q_{\alpha-1}+1}^{q_\alpha} x_{ij} = b^\alpha & (\alpha = 1, \ldots, k) \\ x_{ij} \geqq 0 \end{cases} \tag{10}$$

şi pentru care

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{Q_k} c_{ij} x_{ij} \tag{11}$$

îşi atinge minimul (unde a_i, b_j, b^α şi c_{ij} sînt numere pozitive date care satisfac relaţia

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{q_0} b_j + \sum_{\alpha=1}^{k} b^\alpha \tag{12}$$

şi unde $Q_\alpha = q_0 + q_1 + \ldots + q_\alpha$).

Din punct de vedere economic a_i, b_j şi c_{ij} au aceleaşi semnificaţii ca mai înainte, iar b^α reprezintă consumul grupei de centre legate α.

Fie $\bar{X}^0 = (\bar{x}_{ij}^0)$ $(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots q_0 + k)$ soluţia optimă a problemei de transporturi cu datele

$$\begin{cases} \bar{a}_i = a_i & (i = 1, \ldots, p) \\ \bar{b}_j = \begin{cases} b_j & (j = 1, \ldots, q_0) \\ b^\alpha & (j = q_0 + \alpha;\ \alpha = 1, \ldots, k) \end{cases} \\ \bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & (i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q_0) \\ c_{ij_{\alpha i}} & (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = 1, \ldots, k) \end{cases} \end{cases} \tag{13}$$

unde $c_{ij_{\alpha i}} = \min (c_{i,Q_{\alpha-1}} + 1, \ldots, c_{i,Q_\alpha})$. În caz că acest minim se realizează de mai multe ori, luăm drept $c_{ij_{\alpha i}}$ oricare din elementele care realizează minimul.

Fie $X^0 = (x_{ij}^0)$ $(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots Q_k)$ definit astfel:

$$x_{ij}^0 = \begin{cases} \bar{x}_{ij}^0 & (i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q_0) \\ \bar{x}_{i,q_0+\alpha}^0 & (i = 1, \ldots, p;\ j = j_{\alpha i};\ \alpha = 1, \ldots, k) \\ 0 & (i = 1, \ldots, p;\ q_0 < j \neq j_{\alpha i}) \end{cases} \tag{14}$$

unde $j_{\alpha i}$ este coloana definită mai sus.

În mod cu totul analog cu teorema I se poate demonstra

TEOREMA II. *Soluţia X^0 a sistemului (10) care minimizează valoarea lui (11) se obţine rezolvînd problema de transporturi cu datele definite prin (13) şi construind apoi (x_{ij}^0) prin formulele (14).*

§ 5. GENERALIZARE

Se impune în mod natural generalizarea problemelor de la §§ 3 şi 4. Se ajunge la următoarea problemă.

Să se determine $X = (x_{ij})$ $(i = 1, \ldots, P_h;\ j = 1, \ldots, Q_k)$ care satisface sistemul

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{Q_k} x_{ij} = a_i & (i = 1, \ldots, p_0) \\ \sum_{i=1}^{P_h} x_{ij} = b_j & (j = 1, \ldots, q_0) \\ \sum_{i=P_{\alpha-1}+1}^{P_\alpha} \sum_{j=1}^{q_0} x_{ij} = a^\alpha & (\alpha = 1, \ldots, h) \\ \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{j=Q_{\beta-1}+1}^{Q_\beta} x_{ij} = b^\beta & (\beta = 1, \ldots, k) \\ \sum_{i=P_{\alpha-1}+1}^{P_\alpha} \sum_{j=Q_{\beta-1}+1}^{Q_\beta} x_{ij} = d_{\alpha\beta} & (\alpha = 1, \ldots h;\ \beta = 1, \ldots, k) \\ x_{ij} \geqq 0 \end{cases} \tag{15}$$

și care minimizează expresia

$$t(X) = \sum_{i=1}^{P_h} \sum_{j=1}^{Q_k} c_{ij}\, x_{ij} \tag{16}$$

Aici a_i, b_j, a^α, b^β, $d_{\alpha\beta}$, c_{ij} sînt numere pozitive date care satisfac relația

$$\sum_{i=1}^{p_0} a_i + \sum_{\alpha=1}^{h} a^\alpha = \sum_{j=1}^{q_0} b_j + \sum_{\beta=1}^{k} b^\beta, \tag{17}$$

iar $P_\alpha = p_0 + p_1 + \ldots + p_\alpha$, $Q_\beta = q_0 + q_1 + \ldots + q_\beta$.

Să punem $\overline{X}^0 = (\bar{x}_{ij}^0)$ $(i = 1, \ldots, p_0 + h;\ j = 1, \ldots, q_0 + k)$ soluția optimă a problemei de transporturi cu datele

$$\begin{cases} \bar{a}_i = \begin{cases} a_i & (i \leqq p_0) \\ a^\alpha & (i = p_0 + \alpha,\ \alpha = 1, \ldots, h) \end{cases} \\ \bar{b}_j = \begin{cases} b_j & (j \leqq q_0) \\ b^\beta & (j = q_0 + \beta,\ \beta = 1, \ldots, k) \end{cases} \\ \bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & (i \leqq p_0,\ j \leqq q_0) \\ c_{ij_{\beta i}} & (i \leqq p_0,\ j = j_{\beta i}) \\ c_{i_{\alpha j} j} & (i = i_{\alpha j},\ j \leqq q_0) \\ c_{i_\alpha j_\beta} & (i = i_\alpha,\ j = j_\beta) \end{cases} \end{cases} \tag{18}$$

unde

$$c_{ij_{\beta i}} = \min\,(c_{i,Q_{\beta-1}+1}, \ldots, c_{i,Q_\beta})$$

$$c_{i_{\alpha j}j} = \min\,(c_{P_{\alpha-1}+1,j}, \ldots, c_{P_\alpha,j})$$

$$c_{i_\alpha i_\beta} = \min\, c_{ij}\ (P_{\alpha-1} < i \leqq P_\alpha,\ Q_{\beta-1} < j \leqq Q_\beta).$$

Dacă vreunul din aceste minime se realizează de mai multe ori alegem oricare din elementele care realizează minimul drept $c_{ij_{\beta i}}$, $c_{i_{\alpha j}j}$ respectiv $c_{i_\alpha i_\beta}$.

Fie $X^0 = (x^0_{ij})$ $(i = 1, \ldots, P_h;\ j = 1, \ldots, Q_k)$ definit astfel:

$$x^0_{ij} = \begin{cases} \bar{x}_{ij} & (i \leqq p_0;\ j \leqq q_0) \\ \bar{x}_{i,q_0+\beta} & (i \leqq p_0;\ j = j_{\beta i};\quad \beta = 1, \ldots, k) \\ \bar{x}_{p_0+\alpha,j} & (j \leqq q_0;\ i = i_{\alpha j};\quad \alpha = 1, \ldots, h) \\ \bar{x}_{p_0+\alpha,\,q_0+\beta} & (i = i_\alpha;\ j = j_\beta;\quad \alpha = 1, \ldots, h;\ \beta = 1, \ldots, k) \\ 0 & (\text{în celelalte cazuri}). \end{cases} \tag{19}$$

Printr-un raţionament analog celor de la §§ 3 şi 4 găsim

TEOREMA III. *Soluţia X^0 a sistemului* (15) *care minimizează valoarea lui* (16) *se obţine rezolvînd problema de transporturi cu datele definite prin* (18) *şi construind apoi* (x^0_{ij}) *prin formulele* (19).

§ 6. EXEMPLE

Exemplul I. Să considerăm problema de transporturi cu centrele de producţie P_1, P_2, P_3, P_4 şi centrele de consum C_1, C_2, C_3 C_4, C_5, C_6, C_7, dintre care C_1, C_2, C_3, C_4 sînt centre independente iar C_5, C_6, C_7 sînt legate. Producţia centrelor P_1, P_2, P_3, P_4 este respectiv de 30, 18, 36, 16 unităţi, consumul centrelor independente C_1, C_2, C_3, C_4 este respectiv de 16, 12, 25, 9 unităţi, iar consumul centrelor legate este de 38 unităţi. Matricea D a cheltuielilor unitare de transport (sau a distanţelor) dintre centre este

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	Producţie
P_1	16	13	18	9	6	12	5	30
P_2	11	4	7	15	17	8	10	18
P_3	9	8	5	10	7	14	11	36
P_4	20	13	9	11	12	9	10	16
Consum	16	12	25	9	38			100 (total)

Conform metodei date în § 3, formăm matricea redusă D' cu patru linii și cinci coloane lăsînd neschimbată partea stîngă a vechii matrice (primele patru coloane) și formînd coloana a cincea cu cel mai mic element din fiecare linie a părții drepte a matricii D. Obținem matricea D'

					Producție
	16	13	18	9	5_7	30
	11	4	7	15	8_6	18
	9	8	5	10	7_5	36
	20	13	19	11	9_6	16
Consum	16	12	25	9	38	100 (total)

unde prin indicii elementelor ultimei coloane se înțelege coloana matricii D din care provin elementele respective.

Rezolvăm problema obișnuită de transporturi a cărei matrice a cheltuielilor unitare este D', producția și consumul centrelor respective fiind cele din tabel. Soluția optimă a acestei probleme este

$$\overline{X}^0 = \begin{array}{|cccc|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 30_7 \\ 0 & 12 & 5 & 0 & 1_6 \\ 16 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 7_5 \\ \hline \end{array}$$

Din $\overline{X}^0$ obținem, pe baza formulelor (9), soluția optimă a problemei noastre :

$$X^0 = \begin{array}{|cccc|ccc|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 12 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ \hline \end{array}$$

După cum se vede, cheltuielile totale de transport reprezintă în această soluție $30 \times 5 + 12 \times 4 + 5 \times 7 + 1 \times 8 + 16 \times 9 + 20 \times 5 + 9 \times 11 + 7 \times 9 = 647$ lei.

Soluția este preferabilă aceleia la care am fi ajuns considerînd centrele legate drept independente, cu o repartizare arbitrară a consumului lor.

Exemplul II. Să considerăm problema de transporturi cu centrele de producție P_1, P_2, P_3, P_4 și centrele de consum C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8. Producția centrelor P_i fiind aceeași ca în exemplul precedent, consumul centrelor independente C_1, C_2, C_5 este respectiv de 16, 12 și

9 unităţi; centrele legate C_3 şi C_4 consumă la un loc 25 unităţi, iar centrele legate C_6, C_7, C_8, 38 unităţi. Matricea D a cheltuielilor unitare de transport (sau a distanţelor) dintre centre este:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	Producţie
P_1	16	13	18	25	9	6	12	5	30
P_2	11	4	11	7	15	17	8	10	18
P_3	9	8	5	7	10	7	14	11	36
P_4	20	13	9	12	11	12	9	10	16
Consum	16	12	25		9	38			100 (total)

Formăm matricea redusă D' cu patru linii şi cinci coloane şi vedem că ea este aceeaşi ca la exemplul precedent; soluţia $\bar{X}^0$ va fi deci şi ea aceeaşi. Din aceasta obţinem soluţia optimă a problemei noastre:

$$X^0 = \begin{array}{|cc|cc|cc|cc|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 12 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Exemplul III. Să considerăm problema de transporturi cu centrele de producţie P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 şi centrele de consum C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8. Producţia centrelor independente P_1 şi P_2 este de 30, respectiv 18 unităţi; centrele legate P_3 şi P_4 produc la un loc 36 unităţi; centrele legate P_5 şi P_6 produc la un loc 16 unităţi. Consumurile sînt aceleaşi ca în exemplul II. Matricea cheltuielilor unitare de transport este

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	Producţie
P_1	16	13	18	25	9	6	12	5	30
P_2	11	4	11	7	15	17	8	10	18
P_3	9	11	5	7	10	7	20	11	36
P_4	14	8	13	8	10	9	14	13	
P_5	20	17	11	13	11	12	10	10	16
P_6	22	13	9	12	17	16	9	14	
Consum	16	12	25		9	38			100 (total)

Formînd matricea redusă D' vedem că ea este aceeaşi ca la exemplul I; soluţia $\bar{X}^0$ va fi deci şi ea aceeaşi. Obţinem astfel soluţia optimă a problemei noastre :

0	0	0	0	0	0	0	30
0	12	0	5	0	0	1	0
16	0	20	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	9	0	0	0
0	0	0	0	0	0	7	0

ЗАДАЧА ПЕРЕВОЗОК СО СВЯЗАННЫМИ ЦЕНТРАМИ

РЕЗЮМЕ

В отличие от обычной задачи о перевозках, на практике встречаются часто случаи, когда для части центров потребления (называемых здесь „связанными центрами") указывается лишь сумма их потреблений, без указания распределения этих потреблений по центрам. Это имеет место, например, для экспортируемой продукции, количество которой дано без указания граничных станций. Задача состоит в нахождении величин x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots p,\ j = 1, 2, \ldots, q + r)$, для которых выражение (4) достигает минимума при условиях (5) и (6). Доказана

Теорема I. *Решение* X° *системы* (5), *минимизирующее* (4), *получается путем решения задачи о перевозках с данными, определяемыми* (8), *и затем — построения* (x_{ij}^0) *по формулам* (9).

Таким образом, оптимальное решение задачи о перевозках со связанными центрами получается путем преобразования задачи при помощи формул (8) в обычную задачу о перевозках с меньшим числом центров и путем осуществления над оптимальным решением последней задачи действий, определяемых формулами (9).

Часто встречаются случаи, когда существует несколько групп центров потребления, связанных между собой в каждой группе. Это имеет место, например, когда речь идет о перевозке продукции, экспортируемой в несколько стран, причем для каждой страны существует несколько граничных станций, и когда указаны только количества, экспортируемые в каждую страну, без указания количеств по станциям. В этом случае задача сводится к минимизации выражения (11) при условиях (10) и (12). Доказана

Теорема II. *Решение* X° *системы* (10), *минимизирующее* (11), *получается путем решения задачи о перевозках с данными, определяемыми* (13), *и затем — построения* (x_{ij}^0) *по формулам* (14).

Задача обобщается для случая, когда часть производственных центров также связаны, причем приводится способ минимизации выражения (16) при условиях (15) и (17) (Теорема III).

THE TRANSPORTATION PROBLEM WITH INTERCHANGEABLE CENTRES

ABSTRACT

Apart from the common transportation problem in practice it often happens that for a part of the consumption centres (which we call "interchangeable" centres) only the sum of consumptions is given, the consumption of each of them not being specified. Such is, for instance, the case of products for which we are given the quantity to be exported without its distribution among the various border-stations. The question is to find the x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, p\,;\ j = 1, 2, \ldots, q + r)$ minimizing expression (4), given the conditions (5) and (6). It is proved that

THEOREM I. *The solution* X^0 *of the system* (5), *minimizing expression* (4) *can be obtained by solving the transportation problem defined by* (8) *and then forming* (x_{ij}^0) *by means of* (9).

Thus, the optimal solution of a transportation problem with interchangeable centres can be obtained as follows : we transform the above problem into a usual transportation problem with a smaller number of centres by means of formulas (8) and we submit the optimal solution thus obtained to the operations given by formulas (9).

Further, it often happens that there are several groups of interchangeable centres. This is the case for instance when a product is to be exported in several countries, each of them having several border-stations ; but the quantities to be exported are given only per country, without their distribution among the various border-stations. Then the problem is to minimize expression (11), given the conditions (10) and (12). It is proved that

THEOREM II. *The solution* X° *of the system* (10) *minimizing expression* (11) *can be obtained by solving the transportation problem defined by* (13) *and then forming* (x_{ij}^0) *by means of* (14).

The problem is then generalized for the case when part of the production centres is also interchangeable, and a method is given for minimizing expression (16), given the conditions (15) and (17) (THEOREM III).

BIBLIOGRAFIE

1. КАНТОРОВИЧ Л. В., *О перемещении масс.* Докл. АН СССР, **37**, 7—8, 212—215 (1942).
2. CHARNES, COOPER, HENDERSON, *Introduction to linear programming.* New York, J. Wiley, 195?.
3. NOZICKA F., *O jednom minimalnim problemu v teorii linearniho planovani.* Praha, 1956.
4. KREKO B., *A szállitási problémáról.* A Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Évkönyve, Budapest, 1959.

ASUPRA DEFINIRII ALGEBRELOR BOOLEENE PRIN OPERAȚII BINARE

DE

SERGIU RUDEANU

§ 1

Axiomatica structurilor algebrice mai importante — grup, inel, corp, latice, algebră booleană — constituie un domeniu ce cercetare mult studiat. Pentru a obține sisteme de axiome mai simple decît cele clasice, mulți autori definesc aceste structuri cu ajutorul unor operații noi, astfel încît vechile operații se obțin prin suprapunerea celor noi și reciproc. Astfel au procedat M. Ward [27] și J. Certaine [5] pentru grupuri, Iu. I. Sorkin [22] pentru inele, N. Wiener [29], D. G. Rabinow [19] și R. J. Levit [16] pentru corpurile comutative, J. Hashimoto [10] pentru laticile modulare cu prim și ultim element, S. A. Kiss și G. Birkhoff [13] pentru laticile distributive cu prim și ultim element, E. V. Huntington [11], [12], E. Stamn [23], H. M. Sheffer [21] M. H. Stone [24], A. Whitemam [28], A. A. Grau [8] și L. P. Hammer [9] pentru algebrele booleene. Ulterior au fost date numeroase variante ale unora dintre sistemele de axiome din lucrările de mai sus. Este justificată deci introducerea noțiunii de *echivalență a două algebre* (v. definițiile 3, 4), dat fiind că în fiecare din lucrările de mai sus se studiază algebre echivalente cu o anumită algebră inițială.

În lucrarea de față ne fixăm atenția asupra structurilor echivalente cu o algebră booleană. Dintre acestea, cele mai importante ni se par structura de inel introdusă de M. H. Stone [24]*) și algebrele definite de cîte o singură funcție binară, introduse de H. M. Sheffer [21].

---

*) M. H. Stone este primul care a stabilit corespondența biunivocă între algebrele booleene și inelele idempotente cu element unitate (v. [4], cap. X, nota de subsol :).

În § 2 *determinăm toate aceste algebre* (definite de o funcție binară și echivalente cu algebra booleană B) (teorema 2). Deducem de aici că *dificultățile legate de neasociativitatea funcțiilor lui Sheffer* *) *sînt inevitabile*, în sensul că nici o algebră booleană nu poate fi echivalentă cu o algebră definită de o operație binară asociativă (corolarul teoremei 2). În § 3 arătăm că *orice structură de inel echivalentă cu o structură de algebră booleană este izomorfă cu structura de inel introdusă de M. H. Stone* (teorema 6). O consecință a acestui fapt este că *într-o algebră booleană cu mai mult de două elemente nu se poate defini o structură de corp echivalentă cu structura de algebră booleană* (scolia teoremei 6). În § 4 arătăm că unele propoziții din §§ 2—3 redemonstrează sau generalizează anumite rezultate cunoscute.

Vom începe prin a da cîteva definiții.

Definiția 1. Fie M o mulțime, D o parte a produsului cartezian M^n și $f(x_1, \ldots, x_n)$ o funcție definită pe D, cu valori în M. Vom spune că $f(x_1, \ldots, x_n)$ este *o funcție de n variabile definită în M*. Dacă $D = M^n$, vom spune că este *definită pe M*. Funcția f *depinde efectiv de toate variabilele*, dacă există a_{ij}, $b_i \in M$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, astfel încît pentru orice $i = 1, \ldots, n$ să avem

1° $(a_{i1}, \ldots, a_{i.\,i-1}, a_{ij}, a_{i.\,i+1}, \ldots, a_{in}), (a_{i1}, \ldots, a_{i.\,i-1}, b_i, a_{i.\,i+1}, \ldots, a_{in}) \in D$

2° $f(a_{i1}, \ldots, a_{i.\,i-1}, a_{ii}, a_{i.\,i+1}, \ldots, a_{in}) \neq f(a_{i1}, \ldots, a_{i.\,i-1}, b_i, a_{i.\,i+1}, \ldots, a_{in})$.

Definiția 2. Fie M o mulțime și I o familie de indici, astfel încît fiecărui $\alpha \in I$ îi corespunde un număr natural n_α și o funcție f_α de n_α variabile, definită în M, depinzînd efectiv de toate cele n_α variabile. Fie $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familia acestor funcții. Definim *funcțiile obținute prin suprapuneri* de funcții din $\mathcal{F}$ după cum urmează:

(i) Aplicația identică $\varepsilon(x) = x$ a lui M pe M se obține prin zero suprapuneri de funcții din $\mathcal{F}$.

(ii) orice constantă $a \in M$ se obține prin zero suprapuneri de funcții din $\mathcal{F}$.

(iii) Dacă există $\alpha \in I$ și n_α funcții φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n_\alpha)$ definite în M, astfel încît φ_i se obține prin p_i suprapuneri de funcții din $\mathcal{F}$ (pentru $i = 1, 2, \ldots, n_\alpha$) și dacă funcția $\varphi = f_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_\alpha})$ are sens, atunci φ se obține prin $\sum_{i=1}^{n_\alpha} p_i + 1$ suprapuneri de funcții din $\mathcal{F}$.

(iv) Singurele funcții care se obțin prin suprapuneri de funcții din $\mathcal{F}$ sînt funcțiile definite prin (i)—(iii). Dintre acestea, aplicația identică și constantele sînt singurele care se obțin prin zero suprapuneri de funcții din $\mathcal{F}$.

De exemplu, pentru $\alpha \in I$, funcția $f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha}) = f_\alpha(\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_{n_\alpha}))$ se obține printr-o singură suprapunere de funcții din $\mathcal{F}$ etc.

Definiția 3 [3]**). Fie M o mulțime, $\mathcal{F}$ o familie de operații

*) V. lucrările [18], [9], unde se arată cum aceste dificultăți pot fi parțial înlăturate.

**) În [9] se întrebuințează termenul „algebre legate" în loc de „algebre echivalente". Nu trebuie confundat cu definiția 11 din [25].

(funcții) definite în M și satisfăcînd anumite proprietăți. Vom spune că familia $\mathfrak{F}$ *definește* (*generează*) *o structură algebrică* (sau, mai scurt, *o algebră*) peste M.

Definiția 4 [9]. Fie M o mulțime și $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ două algebre peste M, definite de familiile de operații $\mathfrak{F}$, respectiv $\mathfrak{G}$. Vom spune că *algebrele* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *sînt echivalente*, dacă fiecare funcție din $\mathfrak{F}$ se obține prin suprapuneri de funcții din $\mathfrak{G}$ și invers.

§ 2

În cele ce urmează, *vom nota operațiile unei algebre booleene B cu "$\cup$", "$.$" sau juxtapunere și "$^-$", iar cu 1 și 0 primul, respectiv ultimul element din B.*

Definiția 5. O funcție definită *pe* o algebră booleană B se numește *funcție booleană*, dacă se obține prin suprapuneri (în sensul definiției 2) ale funcțiilor "$\cup$", "$.$", "$^-$".

În cele ce urmează vom nota cu B_2 *algebra booleană cu două elemente.*

Teorema 1. *Fie B o algebră booleană. Condiția necesară și suficientă ca orice funcție definită pe B să fie booleană este ca B să fie algebra booleană B_2 cu două elemente.*

Dacă $B = B_2$, există 4 funcții de o variabilă definite în B, toate fiind booleene; suficiența condiției rezultă prin inducție în raport cu numărul variabilelor.

Dacă $B \neq B_2$, există $\varepsilon \in B$, cu $0 \neq \varepsilon \neq 1$, Funcția

$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{dacă } x = \varepsilon \\ 0, & \text{dacă } x \neq \varepsilon \end{cases}$$

nu este booleană, altfel am avea

$$f(x) = \lambda x \cup \mu\bar{x};$$

dînd lui x valorile 0 și 1 ar rezulta $\mu = f(0) = 0$ și $\lambda = f(1) = 0$, deci $f(x) = 0$, ceea ce este contradictoriu.

Definiția 6. O funcție definită pe o algebră booleană B se numește *funcție Sheffer*, dacă ea generează o algebră echivalentă cu structura de algebră booleană a lui B.

Este evidentă

Lema 1. O funcție f definită pe o algebră booleană B este funcție Sheffer, dacă și numai dacă următoarele condiții sînt îndeplinite:

(i) f este funcție booleană

(ii) funcțiile "$\cup$", "$.$", "$^-$" se obțin prin suprapuneri ale funcției f.

Vom demonstra acum

TEOREMA 2. *În orice algebră booleană B, funcțiile*

$$x \mathbf{T}_1 y = \bar{x}\bar{y} \tag{1.1}$$

$$x \mathbf{T}_2 y = \bar{x} \cup \bar{y} \tag{1.2}$$

$$x \mathbf{T}_3 y = x\bar{y} \tag{1.3}$$

$$x \mathbf{T}_4 y = \bar{x} \cup y \tag{1.4}$$

$$x \mathbf{T}_5 y = \bar{x}y \tag{1.5}$$

$$x \mathbf{T}_6 y = x \cup \bar{y} \tag{1.6}$$

sînt singurele funcții Sheffer binare.

Faptul că $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$ sînt funcții Sheffer rezultă din lema 1 și din identitățile evidente

$$x = x \mathbf{T}_1 x = x \mathbf{T}_2 x = 1 \mathbf{T}_3 x = x \mathbf{T}_4 0 = x \mathbf{T}_5 1 = 0 \mathbf{T}_6 x,$$

$$x \cup y = (x \mathbf{T}_1 y) \mathbf{T}_1 (x \mathbf{T}_1 y) = (x \mathbf{T}_2 x) \mathbf{T}_2 (y \mathbf{T}_2 y) = 1 \mathbf{T}_3 [(1 \mathbf{T}_3 y) \mathbf{T}_3 x] =$$
$$= (x \mathbf{T}_4 y) \mathbf{T}_4 y = [x \mathbf{T}_5 (y \mathbf{T}_5 1)] \mathbf{T}_5 1 = x \mathbf{T}_6 (x \mathbf{T}_6 y),$$

$$xy = (x \mathbf{T}_1 x) \mathbf{T}_1 (y \mathbf{T}_1 y) = (x \mathbf{T}_2 y) \mathbf{T}_2 (x \mathbf{T}_2 y) = x \mathbf{T}_3 (x \mathbf{T}_3 y) =$$
$$= [x \mathbf{T}_4 (y \mathbf{T}_4 0)] \mathbf{T}_4 0 = (x \mathbf{T}_5 y) \mathbf{T}_5 y = 0 \mathbf{T}_6 [(0 \mathbf{T}_6 x) \mathbf{T}_6 y].$$

Inexistența altor funcții Sheffer binare va rezulta dintr-un șir de propoziții ajutătoare.

Din lema 1 și teorema 2 se deduce imediat

LEMA 2. O funcție f definită pe o algebră booleană B este funcție booleană dacă și numai dacă f se obține prin suprapuneri ale funcției $\mathbf{T}_1$. O funcție booleană f este funcție Sheffer dacă și numai dacă $\mathbf{T}_1$ se obține prin suprapuneri ale funcției f (Este evident că în acest enunț putem înlocui $\mathbf{T}_1$ cu oricare din funcțiile $\mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_6$).

În cele ce urmează, vom nota cu "$+$" *diferența simetrică* $x + y = x\bar{y} \cup \bar{x}y$.

LEMA 3. În algebra booleană B_2, singurele funcții Sheffer binare sînt $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$.

Pentru demonstrație, vom folosi calculul cu operațiile de inel "$+$", "$\cdot$" [24], [4, cap. X, § 3]. Din cele precedente și din [24] rezultă că orice funcție Sheffer binară se scrie

$$x \circ y = axy + bx + cy + d,$$

unde a, b, c, d sînt 0 sau 1.

Vom arăta mai întîi că nu putem avea $a = 0$. Într-adevăr, cum este evident că $x \circ y$ trebuie să depindă efectiv de ambele variabile, ar rezulta $b = c = 1$. Ar urma că

$$x \circ y = x + y + d$$

deci că $x \circ y$ este comutativă, asociativă, și că

$$x \circ x = d, \quad x \circ x \circ x = x, \quad x \circ x \circ x \circ x = d, \ldots$$

deci în particular funcția xy ar admite o reprezentare de forma

$$xy = x \circ y \circ \alpha = x + y + \alpha.$$

Făcînd $x = y = 0$, ar rezulta $\alpha = 0$, iar pentru $x = y = 1$, obținem $\alpha = 1$, ceea ce este contradictoriu. Rămîne deci să cercetăm funcțiile $x \circ y$ pentru care $a = 1$. Pentru $b = c = 1$, $d = 0$ și $b = c = d = 0$, obținem respectiv funcțiile $x \cup y$, xy care nu sînt funcții Sheffer. În celelalte cazuri obținem tocmai funcțiile $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$.

LEMA 4. Fie B_0 o algebră booleană oarecare, $\aleph$ un număr cardinal, finit sau nu, și să considerăm produsul cartezian $B = B_0^{\aleph}$. Elementele $x \in B$ sînt de forma $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, unde $x_\alpha \in B_0$ și A este o familie de indici de cardinal $\aleph$. Mulțimea B se organizează ca algebră booleană [25, Cap. II, § 6] *). În aceste condiții, o funcție binară $x \circ y$, definită pe B, depinzînd efectiv de ambele variabile, este funcție booleană dacă și numai dacă există o funcție booleană binară $\triangledown$, definită pe B_0, astfel încît

$$x \circ y = (x_\alpha \triangledown y_\alpha)_{\alpha \in A}. \tag{2}$$

Suficiența condiției este evidentă; rămîne să demonstrăm necesitatea.

Să presupunem că $x \circ y$ este o funcție booleană. Conform lemei 2, ea se obține prin n suprapuneri ale funcției $\mathbf{T}_1$; vom demonstra prin inducție existența unei funcții booleene binare $\triangledown$ satisfăcînd relația (2).

Din ipoteză și din condiția (iv) a definiției 2 se deduce că $n > 0$. Rezultă că

$$x \circ y = f(x, y)\, \mathbf{T}_1\, g(x, y) \tag{3}$$

unde $f(x, y)$, $g(x, y)$ se obțin prin m_1, respectiv m_2 suprapuneri ale funcției $\mathbf{T}_1$ și unde $m_1 + m_2 = n - 1$, deci

$$m_1, m_2 \leqslant n - 1. \tag{4}$$

Mai întîi, este evident că *singura funcție binară, depinzînd efectiv de ambele variabile, care se obține printr-o singură suprapunere a funcției $x \circ y$, este chiar funcția $x \circ y$.* În cele ce urmează vom aplica deseori în mod tacit această observație.

Astfel, din relația (3) se deduce că dacă $n = 1$, atunci

$$x \circ y = x\, \mathbf{T}_1\, y = (x_\alpha\, \mathbf{T}_1\, y_\alpha)_{\alpha \in A}$$

și lema 4 este demonstrată. Vom presupune acum că lema este adevărată pînă la $n - 1$ și o vom demonstra pentru n. În virtutea ipotezei inductive și a inegalității (4), relația (3) se mai scrie

$$x \circ y = (\varphi(x_\alpha, y_\alpha))_{\alpha \in A}\, \mathbf{T}_1\, (\psi(x_\alpha, y_\alpha))_{\alpha \in A} = (\varphi(x_\alpha, y_\alpha)\, \mathbf{T}_1\, \psi(x_\alpha, y_\alpha))_{\alpha \in A},$$

*) În lucrarea [25] se întrebuințează termenul „sumă directă" în loc de „produs cartezian".

funcțiile φ, ψ fiind booleene. Rezultă că funcția

$$x_\alpha \bigtriangledown y_\alpha = \varphi(x_\alpha, y_\alpha)\, \mathbf{T}_1\, \psi(x_\alpha, y_\alpha)$$

satisface relația (2) și lema 4 este demonstrată.

LEMA 5. Într-un produs cartezian $B = B_2^{\aleph}$ finit sau nu, de algebre booleene B_2, singurele funcții Sheffer binare sînt $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$.

Într-adevăr, fie $x \circ y$ o funcție Sheffer binară. Conform lemelor 1 și 4, există o funcție booleană binară $\bigtriangledown$, definită pe B_2 (deci definită și pe oricare altă algebră booleană), astfel încît

$$x \circ y = (x_\alpha \bigtriangledown y_\alpha)_{\alpha \in A} \tag{2}$$

(unde $x_\alpha, y_\alpha \in B_2$, iar A este o mulțime de cardinal $\aleph$).

Să observăm acum că orice funcție care se obține prin n suprapuneri ale funcției $x \circ y$ este de forma

$$x * y = (x_\alpha \,\Delta\, y_\alpha)_{\alpha \in A},$$

unde Δ este o funcție obținută prin n suprapuneri ale funcției $\bigtriangledown$ (demonstrația se face prin inducție în raport cu n). Aplicînd această observație funcției $x\, \mathbf{T}_1\, y$ (vezi lema 2), rezultă că funcția $x\, \mathbf{T}_1\, y$ este de forma

$$x\, \mathbf{T}_1\, y = (x_\alpha \,\Delta\, y_\alpha)_{\alpha \in A}. \tag{5}$$

Pe de altă parte, avem prin definiție

$$x\, \mathbf{T}_1\, y = (x_\alpha\, \mathbf{T}_1\, y_\alpha)_{\alpha \in A};$$

comparînd cu (5), se deduce că funcțiile Δ și $\mathbf{T}_1$ sînt identice. Cu alte cuvinte, am demonstrat că funcția $\mathbf{T}_1$ se obține prin n suprapuneri ale funcției $\bigtriangledown$. Funcția $\bigtriangledown$ fiind booleană, am demonstrat astfel (vezi lemele 1, 2) că $\bigtriangledown$ este o funcție Sheffer binară, definită pe B_2. Aplicînd lema 3, rezultă că $\bigtriangledown$ este una din funcțiile $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$. Putem scrie $\bigtriangledown = \mathbf{T}_i$, unde $1 \leqslant i \leqslant 6$ și relația (2) devine

$$x \circ y = (x_\alpha\, \mathbf{T}_i\, y_\alpha)_{\alpha \in A},$$

adică

$$x \circ y = x\, \mathbf{T}_i\, y$$

și lema 5 este demonstrată.

Sîntem acum în măsură să completăm demonstrația teoremei 2, arătînd că nu există alte funcții Sheffer binare decît $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$. Pentru aceasta vom presupune că există o algebră booleană oarecare B și o funcție Sheffer $x \circ y$, definită pe B, diferită de $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$.

Funcția $x \circ y$ poate fi scrisă

$$x \circ y = \alpha xy \cup \beta x\bar{y} \cup \gamma \bar{x} y \cup \delta \bar{x}\bar{y}, \tag{6}$$

cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in B$, iar funcția $\bar{x}\bar{y}$ se obține prin suprapuneri ale funcției $x \circ y$,

$$\bar{x}\bar{y} = f(x, y; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \tag{7}$$

în expresia $f(x, y; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ a acestor suprapuneri intervenind un număr finit de constante $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ (eventual $n = 0$). Pe de altă parte, există $\xi_i, \eta_i \in B$ $(i = 1, \ldots, 6)$ astfel încît

$$\xi_i \circ \eta_i \neq \xi_i \mathbf{T}_i \eta_i \quad (i = 1, \ldots, 6). \tag{8}$$

Fie B_0 subalgebra booleană a lui B generată de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_1, \ldots \ldots \varepsilon_n, \xi_1, \ldots, \xi_6, \ldots, \eta_1, \ldots, \eta_6$ *). Ținînd seama că algebra booleană liberă cu $n + 16$ generatori este finită [4, cap. X, teorema 11], rezultă că B_0 însăși este finită și prin urmare [25, teoremele 12,53] se poate scrie ca un produs cartezian $B_0 = B_2^m$ de algebre booleene B_2.

Relația (6) arată că restricția $x \bigtriangledown y$ a lui $x \circ y$ la B_0 există și este o funcție booleană definită pe B_0. Ținînd seama de (7), se deduce că $x \bigtriangledown y$ este chiar o funcție Sheffer definită pe B_0, iar egalitățile (8) arată că $\bigtriangledown \neq \mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$, ceea ce contrazice lema 5.

COROLAR. *Oricare ar fi algebra booleană B, nu există o funcție Sheffer $x \circ y$ asociativă* **).

Într-adevăr, se constată imediat că funcțiile $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$ sînt neasociative.

§ 3

Scopul acestui paragraf este determinarea tuturor structurilor de inel echivalente cu o algebră booleană. Vom demonstra mai întîi un șir de propoziții pregătitoare, dar care prezintă și un interes în sine.

TEOREMA 3. *Într-o algebră booleană oarecare B, o funcție booleană $x \circ y$ este asociativă dacă și numai dacă este de forma*

$$x \circ y = (a\bar{b} \cup \bar{a}b \cup c)\, xy \cup ax\bar{y} \cup b\bar{x}y \cup (ab \cup \bar{a}\bar{b})\, cd\bar{x}\bar{y}, \tag{9}$$

cu $a, b, c, d \in B$.

Într-adevăr, $x \circ y$ se poate scrie în forma (6).

Calculînd $(x \circ y) \circ z$, $x \circ (y \circ z)$ și egalînd expresiile astfel obținute, rezultă că funcția $x \circ y$ este asociativă dacă și numai dacă următoarele relații sînt satisfăcute

$$\alpha \cup \gamma = \alpha \cup \beta \tag{10.1}$$
$$\alpha\gamma = \alpha\gamma \cup \bar{\alpha}\delta \tag{10.2}$$
$$\alpha\beta \cup \bar{\beta}\gamma = \alpha\gamma \cup \beta\bar{\gamma} \tag{10.3}$$
$$\alpha\beta \cup \bar{\alpha}\delta = \alpha\beta \tag{10.4}$$
$$\beta \cup \delta = \alpha\delta \cup \beta\bar{\delta} \tag{10.5}$$
$$\beta\gamma \cup \gamma\delta = \beta\gamma \cup \beta\delta \tag{10.6}$$
$$\alpha\delta \cup \gamma\delta = \gamma \cup \delta \tag{10.7}$$
$$\beta\delta = \gamma\delta. \tag{10.8}$$

*) B_0 este cea mai mică parte a lui B, conținînd pe $\alpha, \ldots, \gamma_6$ și închisă față de operațiile din B.

**) Vezi teorema 1 din lucrarea lui I u. I. S o r k i n [22] unde se consideră o problemă asemănătoare.

Cu alte cuvinte, pentru a afla condiția necesară și suficientă de asociativitate, rămîne numai să aflăm soluția generală a sistemului (10.1) — (10.8). În acest scop vom aplica metodele date în lucrările [17], [20].

Ecuația (10.2) este echivalentă cu $\bar{\alpha}\delta \leqslant \alpha\gamma$, deci cu

$$\bar{\alpha}\delta = 0. \tag{10.2'}$$

Ținînd seama de (10.2'), se deduce că relațiile (10.4), (10.5) și (10.7) sînt o consecință a relației (10.2). Este suficient să observăm, de exemplu, că

$$\alpha\delta \cup \beta\bar{\delta} = \alpha\delta \cup \bar{\alpha}\delta \cup \beta\bar{\delta} = \delta \cup \beta\bar{\delta} = \delta \cup \beta;$$

analog pentru (10.7).

Din ecuația (10.6) și din relația evidentă

$$\beta\gamma \cdot \bar{\gamma}\delta = \beta\gamma \cdot \bar{\beta}\delta$$

se deduce [4, cap. II, § 10, lema 1] că

$$\bar{\gamma}\delta = \bar{\beta}\delta \tag{10.6'}$$

și reciproc, din (10.6') urmează (10.6).

Ecuația (10.1) este echivalentă [20, lema 1.1] cu

$$(\alpha \cup \gamma)\,\bar{\alpha}\bar{\beta} \cup \bar{\alpha}\bar{\gamma}\,(\alpha \cup \beta) = 0$$

deci cu

$$\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma \cup \bar{\alpha}\beta\bar{\gamma} = 0, \tag{10.1'}$$

de unde se deduce $\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma = \bar{\alpha}\beta\bar{\gamma} = 0$, deci $\bar{\beta}\gamma = \alpha\bar{\beta}\gamma \cup \bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma = \alpha\bar{\beta}\gamma$ și $\beta\bar{\gamma} = \alpha\beta\bar{\gamma}$, deci

$$\alpha\beta \cup \bar{\beta}\gamma = \alpha(\beta \cup \bar{\beta}\gamma) = \alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha(\beta\bar{\gamma} \cup \gamma) = \alpha\beta\bar{\gamma} \cup \alpha\gamma = \alpha\gamma \cup \beta\bar{\gamma},$$

deci relația (10.3) este o consecință a relației (10.1).

Ecuația (10.8) este echivalentă cu

$$\beta\delta\,(\bar{\gamma} \cup \bar{\delta}) \cup (\bar{\beta} \cup \bar{\delta})\,\gamma\delta = 0,$$

adică cu

$$\beta\bar{\gamma}\delta \cup \bar{\beta}\gamma\delta = 0 \tag{10.8'}$$

La fel se arată că ecuația (10.6') este echivalentă cu (10.8').

În definitiv, sistemul de ecuații (10.1) — (10.8) este echivalent cu sistemul (10.2'), (10.1'), (10.8'). Însă ecuațiile (10.2'), (10.8') sînt echivalente [20, lema 1.2] cu relația

$$(\bar{\alpha} \cup \beta\bar{\gamma} \cup \bar{\beta}\gamma)\delta = 0$$

care este echivalentă [17, exercițiul 22.X] cu inecuația

$$\delta \leqslant \alpha(\beta\gamma \cup \bar{\beta}\bar{\gamma}) \tag{11}$$

iar ecuația (10.1′) este echivalentă cu inecuația

$$\bar{\beta}\gamma \cup \beta\bar{\gamma} \leqslant \alpha, \tag{12}$$

deci rămîne să aflăm soluția generală a sistemului (11), (12).

Soluția generală a inecuației (12) este

$$\alpha = \beta\bar{\gamma} \cup \bar{\beta}\gamma \cup c, \tag{13.1}$$

cu c arbitrar. Introducînd această expresie în relația (11), obținem inegalitatea

$$\delta \leqslant (\beta\gamma \cup \bar{\beta}\bar{\gamma})\, c,$$

a cărei soluție generală este

$$\delta = (\beta\gamma \cup \bar{\beta}\bar{\gamma})\, cd \tag{13.2}$$

cu d arbitrar.

Teorema rezultă acum introducînd expresiile (13.1), (13.2) în formula (6) și făcînd schimbarea de notație $\beta = a$, $\gamma = b$.

COROLAR. *O funcție booleană $x \circ y$ asociativă este comutativă dacă și numai dacă este de forma*

$$x \circ y = cxy \cup ax\bar{y} \cup a\bar{x}y \cup cd\bar{x}\bar{y}. \tag{14}$$

Într-adevăr, conform relației (9), condiția necesară și suficientă de comutativitate este $a = b$.

TEOREMA 4. *Într-o algebră booleană B, operația booleană $x \oplus y$ generează o structură de grup abelian dacă și numai dacă este definită de formula*

$$x \oplus y = axy \cup \bar{a}x\bar{y} \cup \bar{a}\bar{x}y \cup a\bar{x}\bar{y} = x + y + a, \tag{15}$$

unde a este o constantă din B, iar "$+$" este diferența simetrică $x + y = x\bar{y} \cup \bar{x}y$.

Să demonstrăm mai întîi necesitatea. Funcția $x \oplus y$ fiind booleană, corolarul teoremei 3 arată că ea este de forma

$$x \oplus y = axy \cup bx\bar{y} \cup b\bar{x}y \cup ac\bar{x}\bar{y}, \tag{14′}$$

cu a, b, c constante din B.

Fie ω elementul zero al inelului, deci

$$x \oplus \omega = (a\omega \cup b\bar{\omega})\, x \cup (b\omega \cup ac\bar{\omega})\, \bar{x} = x$$

pentru orice $x \in B$. Identificînd, obținem

$$b\omega \cup ac\bar{\omega} = 0$$
$$a\omega \cup b\bar{\omega} = 1,$$

deci

$$\bar{a}\omega \cup \bar{b}\bar{\omega} = 0.$$

Rezultă în particular $b\omega = \bar{b}\bar{\omega} = 0$, deci $b \leqslant \bar{\omega}$, $\bar{\omega} \leqslant b$, deci $b = \bar{\omega}$.

Am demonstrat astfel că elementul zero din inel este $\bar{b}$; să notăm cu x' inversul față de adunare al unui element $x \in B$.

Aceasta înseamnă că pentru orice $x \in B$ avem

$$x \oplus x' = \bar{b}$$

sau încă, ținînd seama de (14′),

$$(ax \cup b\bar{x})\, x' \cup (bx \cup ac\bar{x})\, \bar{x}' = \bar{b}.$$

Rezultă succesiv [20, lema 1.1], [17, exercițiul 21.V]

$$b\,[(ax \cup b\bar{x})\, x' \cup (bx \cup ac\bar{x})\, \bar{x}'] \cup$$
$$\cup\, \bar{b}\,\{(\bar{a}x \cup \bar{b}\bar{x})\, x' \cup [\bar{b}x \cup (\bar{a} \cup \bar{c})\, \bar{x}]\, \bar{x}'\} = 0,$$
$$[(ab \cup \bar{a}\bar{b})\, x \cup \bar{x}]\, x' \cup [x \cup (abc \cup \bar{a}\bar{b} \cup \bar{b}\bar{c})\, \bar{x}]\, \bar{x}' = 0,$$
$$[(ab \cup \bar{a}\bar{b})\, x \cup \bar{x}]\, [x \cup (abc \cup \bar{a}\bar{b} \cup \bar{b}\bar{c})\, \bar{x}] = 0$$
$$(ab \cup \bar{a}\bar{b})\, x \cup (abc \cup \bar{a}\bar{b} \cup \bar{b}\bar{c})\, \bar{x} = 0. \tag{16}$$

Relația (16) are loc pentru orice $x \in B$, deci

$$ab \cup \bar{a}\bar{b} = 0 \tag{17.1}$$

$$abc \cup \bar{a}\bar{b} \cup \bar{b}\bar{c} = 0. \tag{17.2}$$

Din (17.1) urmează că $b = \bar{a}$, iar relația (17.2) se reduce la $\bar{b}\bar{c} = 0$, adică la $a\bar{c} = 0$, de unde rezultă $ac = ac \cup a\bar{c} = a$. Efectuînd în relația (14′) înlocuirile $b = \bar{a}$, $ac = a$, obținem formula (15).

Condiția (15) este deci necesară. Suficiența se verifică imediat; elementul neutru față de adunarea $x \oplus y$ este a, iar inversul unui element x este chiar x.

Teorema 5. *Într-o algebră booleană B, operațiile booleene $x \oplus y$, $x \bullet y$ definesc o structură de inel dacă și numai dacă sînt definite de formulele*

$$x \oplus y = axy \cup \bar{a}x\bar{y} \cup \bar{a}\bar{x}y \cup a\bar{x}\bar{y} = x + y + a \tag{15}$$

$$x \bullet y = (a \cup b)\, xy \cup ax\bar{y} \cup a\bar{x}y \cup ac\bar{x}\bar{y} \tag{18}$$

unde a, b, c sînt constante din B, iar "$+$" este diferența simetrică $x + y = x\bar{y} \cup \bar{x}y$ *).

Să demonstrăm mai întîi necesitatea. Conform teoremei 4, adunarea $x \oplus y$ este dată de formula (15), iar teorema 3 arată că $x \bullet y$ este de forma

$$x \bullet y = (\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\gamma}\beta \cup \gamma)xy \cup \alpha x\bar{y} \cup \beta\bar{x}y \cup (\alpha\beta \cup \bar{\alpha}\bar{\beta})\gamma\delta\bar{x}\bar{y} \tag{9′}$$

cu α, β, γ, δ constante din B.

Elementul zero din inel este a, deci pentru orice $x \in B$, avem $x \bullet a = a$, $a \bullet x = a$, adică

$$[(\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\alpha}\beta \cup \gamma)\, x \cup \beta\bar{x}]\, a \cup [\alpha x \cup (\alpha\beta \cup \bar{\gamma}\bar{\beta})\gamma\delta\bar{x}]\, \bar{a} = a$$
$$[(\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\gamma}\beta \cup \gamma)\, x \cup \alpha\bar{x}]\, a \cup [\beta x \cup (\alpha\beta \cup \bar{\alpha}\bar{\beta})\, \gamma\delta\bar{x}]\, \bar{a} = a.$$

*) Necesitatea condițiilor (15), (18) se poate deduce și din lucrarea [7], unde este tratată o problemă asemănătoare.

Aplicînd acestor relații teorema lui P o r e ț k i [17, exercițiul 22.IX], obținem

$$\alpha x \cup (\alpha\beta \cup \bar{\alpha}\bar{\beta})\,\gamma\delta\bar{x} \leqslant a \leqslant (\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\alpha}\beta \cup \gamma)\,x \cup \beta\bar{x} \tag{19.1}$$

$$\beta x \cup (\alpha\beta \cup \bar{\alpha}\bar{\beta})\,\gamma\delta\bar{x} \leqslant a \leqslant (\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\alpha}\beta \cup \gamma)\,x \cup \alpha\bar{x}\,. \tag{19.2}$$

Luînd $x = 0$, deducem $a \leqslant \beta$, $a \leqslant \alpha$, iar pentru $x = 1$, rezultă $\alpha \leqslant a$, $\beta \leqslant a$, deci

$$\alpha = \beta = a \tag{20}$$

și inegalitățile (19.1), (19.2) se reduc la

$$ax \cup \gamma\delta\bar{x} \leqslant a \leqslant \gamma x \cup a\bar{x}.$$

Dînd lui x valorile $x = 1$, $x = 0$, obținem respectiv

$$a \leqslant \gamma \tag{21.1}$$

$$\gamma\delta \leqslant a. \tag{21.2}$$

Inegalitatea (21.1) arată că γ este de forma

$$\gamma = a \cup b. \tag{22}$$

Din (21.2) și (22) se deduce succesiv $\bar{a}\gamma\delta = 0$, $\bar{a}b\delta = 0$, deci δ este de forma

$$\delta = (a \cup \bar{b})\,c. \tag{23}$$

Introducînd expresiile (20), (22), (23) în relația (9′), rezultă formula (18).

Am demonstrat astfel că este necesar ca operațiile $x \oplus y$, $x \bullet y$ să fie date de formulele (15), (18); să demonstrăm suficiența acestor condiții. Într-adevăr, teorema 4 arată că operația $x \oplus y$ determină o structură de grup abelian. Pe de altă parte, formula (18) se obține din (9′) luînd $\alpha = \beta = a$, $\gamma = a \cup b$, $\delta = (a \cup \bar{b})\,c$. Conform teoremei 3, rezultă că operația $x \bullet y$ este asociativă; ea fiind evident comutativă, rămîne să verificăm numai una din cele două legi distributive, ceea ce se poate face printr-un calcul direct.

Teorema 6. *Fie B o algebră booleană oarecare.*

(i) *Operațiile $x \oplus y$, $x \bullet y$ definesc o structură de inel echivalentă cu structura de algebră booleană, dacă și numai dacă sînt definite de formulele*

$$x \oplus y = axy \cup \bar{a}x\bar{y} \cup \bar{a}\bar{x}y \cup a\bar{x}\bar{y} = x + y + a \tag{15}$$

$$x \bar{\bullet} y = xy \cup a\,(x \cup y) = xy + a\,(x + y) \tag{24}$$

unde a este o constantă din B, iar "$+$" este diferența simetrică $x + y = x\bar{y} \cup \bar{x}y$.

(ii) *Toate aceste inele sînt izomorfe.*

Să demonstrăm mai întîi că este necesar ca $x \oplus y$, $x \bullet y$ să fie date de formulele (15), (24). Din condiția de echivalență a celor două structuri

algebrice, rezultă că operațiile $x \oplus y$, $x \bullet y$ sînt funcții booleene; conform teoremei 5, ele sînt definite de formulele (15), (18).

Pe de altă parte, funcțiile care se obțin prin suprapuneri ale funcțiilor $x \oplus y$, $x \bullet y$ sînt tocmai polinoamele de oricîte variabile peste inelul B (demonstrația prin inducție). Din condiția de echivalență mai rezultă în particular că funcția $\bar{x}$ este un polinom, care depinde efectiv de variabila x, peste inelul B. Însă din (18) rezultă succesiv

$$x \bullet x = (a \cup b)\, x \cup ac\bar{x} \tag{25}$$

$$x \bullet x \bullet x = x \bullet x$$

deci $\bar{x}$ este un polinom de grad cel mult 2, adică

$$\bar{x} = \alpha \bullet x^{(2)} \oplus \beta \bullet x \oplus \gamma = \alpha \bullet x^{(2)} + \beta \bullet x + \gamma, \tag{26}$$

unde am pus $x^{(1)} = x$, $x^{(n)} = x^{(n-1)} \bullet x$ $(n = 2, 3, \ldots)$, iar α, β, γ sînt constante din B.

Din relațiile (18), (25) se deduce, printr-un calcul elementar,

$$\alpha \bullet x^{(2)} + \beta \bullet x = \bar{a}b\,(\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\alpha}\beta)\, x \cup a\bar{c}\,(\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\alpha}\beta)\, x. \tag{27}$$

Pe de altă parte, din (26) rezultă

$$\alpha \bullet x^{(2)} + \beta \bullet x = \bar{x} + \gamma = \gamma x \cup \bar{\gamma}\bar{x},$$

de unde, prin comparare cu relația (27), urmează

$$\bar{a}b\,(\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\alpha}\beta) = \gamma$$

$$a\bar{c}\,(\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\alpha}\beta) = \bar{\gamma}.$$

Adunînd aceste relații, obținem succesiv

$$(\bar{a}b \cup a\bar{c})\,(\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\alpha}\beta) = 1$$

$$\bar{a}\bar{b} \cup ac \cup \alpha\beta \cup \bar{\alpha}\bar{\beta} = 0$$

$$\bar{a}\bar{b} = ac = 0 \tag{28.1}$$

$$a \cup b = 1. \tag{28.2}$$

Ținînd seama de (28.1) și (28.2), se vede că formula (18) se reduce la (24). Am demonstrat deci că este necesar ca operațiile $x \oplus y$, $x \bullet y$ să fie date de formulele (15), (24); să demonstrăm suficiența. Într-adevăr, funcția $x \bullet y$ este dată de formula (24), care se obține din (18) luînd $b = 1$, $c = 0$, iar $x \oplus y$ este dată de relația (15). Conform teoremei 5, rezultă că operațiile $x \oplus y$, $x \bullet y$ determină o structură de inel, despre care urmează să demonstrăm că este echivalentă cu structura de algebră booleană. Cum operațiile $x \oplus y$, $x \bullet y$ sînt booleene, rămîne să arătăm că $x \cup y$, xy și $\bar{x}$ sînt polinoame peste inelul B. Aceasta rezultă din identitatea

$$\bar{x}\bar{y} = x \bullet y \oplus 1 \bullet x \oplus 1 \bullet y \oplus \bar{a}$$

și din faptul că $\bar{x}\bar{y}$ este funcție Sheffer.

Am demonstrat astfel proprietatea (i). Pentru a demonstra (ii), vom observa că funcția $\varphi(x) = x + a$ stabilește un izomorfism între structurile de inel determinat de operațiile $x + y$, xy, respectiv $x \oplus y$, $x \bullet y$.

Cu alte cuvinte, teorema 6 afirmă că, abstracție făcînd de un izomorfism, există un singur inel echivalent cu algebra booleană B. Cum $x(x + 1) = 0$, rezultă că dacă $B \neq B_2$, inelul are divizori ai lui zero. De aici și din teorema 6 se deduce imediat următoarea :

SCOLIE. *În algebra booleană B_2 se pot introduce două structuri de inel, echivalente cu structura de algebră booleană, definite de operațiile $x + y$, xy, respectiv $x \oplus y = x + y + 1$, $x \bullet y = xy + x + y$. Acestea sînt chiar structuri de corp, izomorfe între ele. Într-o algebră booleană B cu mai mult de două elemente nu se poate defini o structură de corp echivalentă cu structura de algebră booleană.*

§ 4

În încheiere vom arăta că unele propoziții din §§ 2 — 3 redemonstrează sau generalizează anumite rezultate cunoscute.

Astfel, condiția necesară și suficientă pentru ca o funcție booleană binară să fie asociativă, a fost dată pentru prima oară de B. A. Bernstein [1] în 1924, sub forma unor relații între coeficienți. Teorema 3 are avantajul să determine explicit coeficienții. În aceeași lucrare, B. A. Bernstein găsește condiția necesară și suficientă ca o funcție booleană binară să determine o structură de grup abelian. Această condiție, regăsită de J. C. Elliot [6] în 1953 este dată în teorema 6 din prezenta lucrare.

Scolia teoremei 6, asupra structurilor de corp echivalente cu o algebră booleană, constituie obiectul lucrării [2], datorite tot lui B. A. Bernstein.

Vom observa acum că definiția 2 a suprapunerilor de funcții este foarte generală, datorită și faptului că în expresia acestor funcții suprapuse pot apărea și constantele mulțimii M. Dacă renunțăm la acest grad de generalitate, obținem

Definiția 2′. Cu aceleași notații din definiția 2, vom construi *suprapunerile în sens restrîns* de funcții din $\mathcal{F}$, prin cererile (j), (jj), (jjj), definite după cum urmează. Condițiile (j), (jj) se obțin din condițiile (i), respectiv (iii) ale definiției 2, prin înlocuirea termenului „suprapunere" cu „suprapunere în sens restrîns". Cererea (jjj) este : „singurele funcții care se obțin prin suprapuneri în sens restrîns de funcții din $\mathcal{F}$ sînt aplicația identică și funcțiile φ, avînd proprietatea (jj); dintre acestea, aplicația identică este singura care se obține prin zero suprapuneri în sens restrîns".

Noțiunile de *echivalență în sens restrîns a două algebre, funcție booleană în sens restrîns, funcție Sheffer în sens restrîns, sînt date de definițiile 4′, 5′, 6′* respectiv, care se obțin din definițiile 4, 5, 6, înlocuind cuvîntul „suprapunere" cu „suprapunere în sens restrîns" etc. Dacă lucrăm

cu aceste noțiuni „în sens restrîns", teoremele 1—6 vor fi înlocuite cu alte teoreme, analoage, 1′—6′.

Pentru a obține aceste teoreme, vom arăta mai întîi că funcția $\bar{x}$ nu poate fi obținută prin suprapuneri în sens restrîns al funcției $\mathbf{T}_3$. Într-adevăr, în cazul contrar putem presupune că în aceste suprapuneri nu intervine decît variabila x; dar singurele suprapuneri de acest fel sînt 0 și x. Rezultă că $\mathbf{T}_3$ nu este funcție Sheffer în sens restrîns; demonstrații analoage se pot face pentru $\mathbf{T}_4$, $\mathbf{T}_5$, $\mathbf{T}_6$. Ținînd seama de această observație și de cele demonstrate în §§ 2 – 3, obținem imediat teoremele 1′, 2′. Vom transcrie aici

TEOREMA 2′. În orice algebră booleană B, singurele funcții Sheffer în sens restrîns, binare, sînt $\mathbf{T}_1$ și $\mathbf{T}_2$.

Din teorema 6 se deduce imediat.

TEOREMA 6′. Fie B o algebră booleană oarecare.

(i) Singurele structuri de inel echivalente în sens restrîns cu structura de algebră booleană sînt cele definite de operațiile $x + y$, xy respectiv $x \oplus y = xy \cup \bar{x}\bar{y}$, $x \bullet y = x \cup y$.

(ii) Aceste structuri de inel sînt izomorfe.

Nu vom mai transcrie celelalte teoreme „în sens restrîns" care pot fi de altfel considerate, într-o anumită măsură, drept particularizări ale teoremelor 1—6.

În 1925, E. Zylinski consacră o lucrare [30] determinării tuturor funcțiilor Sheffer (binare) în sens restrîns, în algebra booleană B_2. Rezultatul lui Zylinski a fost redemonstrat, pe o cale mai simplă de către V. Lalan [15] în 1950, și este generalizat prin teorema 2′ de mai sus.

În 1946, V. Lalan publică o notă [14] avînd drept scop să arate că algebrele definite de operațiile $x\bar{y} \cup \bar{x}y$, xy, respectiv $xy \cup \bar{x}\bar{y}$, $x \cup y$ sînt inele echivalente cu structura de algebră booleană. În 1950, el arată [15] că nu există alte structuri de inel cu această proprietate, demonstrînd astfel proprietatea (i) din teorema 6′.

În încheiere, vom menționa faptul că noțiunea de funcție obținută prin suprapuneri în sensul general adoptat în lucrarea de față (definiția 2), pare a fi utilă în teoria schemelor cu inele magnetice și tranzistori [26].

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР ПРИ ПОМОЩИ БИНАРНЫХ ОПЕРАЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор определяет все строения кольца эквивалентные (в смысле определения 4) булевой алгебре (см. теор. 6), а также и все функции Шеффера (см. определение 6 и теор. 2).

Определение 4 [9]. Пусть M — некоторое множество и $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ две алгебры (в смысле определения 3) на M, определяемые соответственно

семействами операций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Скажем, *что алгебры* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *эквивалентны*, если каждая функция из $\mathcal{F}$ получается при помощи суперпозиций (в смысле определения 2) функций из $\mathcal{G}$ и обратно.

Это определение оправдано существованием многочисленных работ, в которых изучаются эквивалентные алгебры (см. цитированную литературу).

Теорема 1. *Для того, чтобы любая функция, определенная на* B, *была булевой, необходимо и достаточно, чтобы* $B = B_2 = \{0,1\}$.

Определение 6. Булевая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *функцией Шеффера* если она порождает (см. определение 3) алгебру, эквивалентную строению булевой алгебры.

Теорема 2. *В любой булевой алгебре* B, *функции* $\mathbf{T}_1, \ldots \mathbf{T}_6$, *определяемые формулами* (1.1), ..., (1.6), *являются единственными бинарными функциями Шеффера.*

Далее приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы бинарная булевая функция была: (*i*) ассоциативной, (*ii*) ассоциативной и коммутативной, (*iii*) пораждала строение абелевой группы. Эти условия выражаются, соответственно, формулами (9), (14), (15). Булевы операции $x \oplus y$, $x \bullet y$ тогда и только тогда определяют строение кольца, когда они даны формулами (15), (18).

Теорема 6. *Операции* $x \oplus y$, $x \bullet y$ *тогда и только тогда определяют строение кольца, эквивалетное строению булевой алгебры, когда они даны формулами* (15), (24). *Все эти кольца изоморфны.*

В § 4 работы показывается, что некоторые из предыдущих предложений дают новые доказательства некоторых известных теорем Б. А. Бернштейна или обобщают результаты работ [30], [15, раздел A], принадлежащих Е. Зилинскому и В. Лалану.

SUR LA DÉFINITION DES ALGÈBRES BOOLÉENNES PAR DES OPÉRATIONS BINAIRES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur détermine toutes les structures d'anneau équivalentes (dans le sens de la définition 4) à une algèbre booléenne (v. théorème 6), ainsi que toutes les fonctions de Sheffer (v. définition 6, théorème 2).

Définition 4 [9]. Soit M un ensemble et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ deux algèbres (dans le sens de la définition 3) sur M, définies par les familles d'opérations $\mathcal{F}$, respectivement $\mathcal{G}$. On dit que *les algèbres* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *sont équivalentes* si chaque fonction de $\mathcal{F}$ peut être obtenue par des superpositions (dans le sens de la définition 2) de fonctions prises de $\mathcal{G}$ et réciproquement.

Cette définition est justifiée par l'existence d'un grand nombre de travaux où l'on étudie des algèbres équivalentes (v. la bibliographie).

Théorème 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction définie sur* B *soit booléenne est* $B = B_2 = \{0,1\}$.

Définition 6. Une fonction booléenne $f(x_1, \ldots, x_n)$ s'appelle une *fonction de Sheffer* si elle engendre (v. définition 3) une algèbre équivalente à la structure d'algèbre booléenne.

THÉORÈME 2. *Dans toute algèbre booléenne B, les fonctions* $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_6$ *définies par les formules* (1.1) — (1.6), *sont les seules fonctions de Sheffer binaires.*

En continuant, l'auteur indique les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction booléenne binaire soit : (*i*) associative, (*ii*) associative et commutative, (*iii*) génératrice d'une structure de groupe abélien. Ces conditions sont exprimées, respectivement, par les formules (9), (14), (15). Les opérations booléennes $x \oplus y$, $x \bullet y$ définissent une structure d'anneau si et seulement si elles sont définies par les formules (15), (18).

THÉORÈME 6. *Les opérations* $x \oplus y$, $x \bullet y$ *définissent une structure d'anneau équivalente à la structure d'algèbre booléenne si et seulement si elles sont définies par les formules* (15), (24). *Tous ces anneaux sont isomorphes.*

Dans le § 4 du travail, l'auteur montre que quelques-unes des propositions précédentes constituent de nouvelles démonstrations de certains théorèmes connus de B. A. Bernstein ou généralisent les résultats des travaux [30], [15, section A], dus à E. Zylinski et V. Lalan.

BIBLIOGRAFIE

1. BERNSTEIN B. A., *Operations with respect to which the elements of a Boolean algebra form a group.* Trans. Amer. Math. Soc., **26**, *171—175* (1924).
2. — *On the existence of fields in Boolean algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., **28**, *654—657* (1926).
3. BIRKHOFF G., *On the structure of abstract algebras.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **31**, *433—454* (1935).
4. — *Lattice theory.* Amer. Math. Coll. Publ., XXV, New York, 1948.
5. CERTAINE J., *The ternary operation* (abc) $= ab^{-1}c$ *of a group.* Bull. Amer. Math. Soc., **49**, *869—877* (1943).
6. ELLIOT J. C., *Autometrization and the symmetric difference.* Canad. J. Math., **5**, *324—331* (1953).
7. FRINK JR. O., *On the existence of linear algebras in Boolean algebras.* Bull. Amer. Math. Soc., **34**, *329—333* (1933).
8. GRAU A.A., *Ternary Boolean algebra.* Bull. Amer. Math. Soc., **53**, *567—572* (1947).
9. HAMMER L. P., *Shefferian algebras.* Bull. Math., **3** (**51**), *3* (1959).
10. HASHIMOTO J., *A ternary operation in lattices.* Math. Jap., *2*, *49—52* (1951).
11. HUNTINGTON E. V., *Sets of independent postulates for the algebra of logic.* Trans. Amer. Math. Soc., **5**, *288—309* (1904).
12. — *A new set of independent postulates for the algebra of logic with special reference to Whitehead and Russel's Principia Mathematica.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **18**, *179 — 180* (1932).
13. KISS S. A., BIRKHOFF G., *A ternary operation in distributive lattices.* Bull. Amer. Math. Soc., **53**, *749—753* (1947).
14. LALAN V., *Définition de deux structures d'anneau dans une algèbre de Boole.* Comptes Rendus, **223**, *1086—1087* (1946).
15. — *Equations fonctionnelles dans un anneau booléen.* Comptes Rendus, **230**, *603 — 605* (1950).
16. LEVIT R.J., *Fields in terms of a single operation.* Trans. Amer. Math., **57**, *426—440* (1946).

17. MOISIL GR. C., *Scheme cu comandă directă cu contacte și relee* (litografiat). Edit. Acad. R.P.R., București, 1959.
18. — *Asupra simplificării circuitelor cu tuburi electronice și a celor cu criiotroane.* Studii și cerc. mat., **10**, *7—67* (1959).
19 RABINOW D. G., *Independent sets of postulates for Abelian groups and fields in terms of the inverse operations.* Amer. J. Math., **59**, *211—224* (1937).
20. RUDEANU S., *Boolean equations and their applications to the study of bridge circuits.* Bull. Math., **3** (**51**), *3*, 1959.
21. SHEFFER H. M., *A set of five independent postulates for Boolean algebras with application to logical constants.* Trans. Amer. Math. Soc., **14**, *481—488* (1913).
22. СОРКИН Ю. И., *Кольца как множества с одной операцией, подчиненной единственному тождеству.* Успехи Мат. Наук, **12**, 357—362 (1957).
23. STAMM E., *Beitrag zur Algebra der Logik.* Monatshefte f. Math. u. Phys., **22**, *137—149* (1911).
24. STONE M. H., *Subsumption of the theory of Boolean algebras under the theory of rings.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **21**, *103—105* (1935).
25. — *The theory of representation for Boolean algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., **40**, *37 — 111* (1936).
26. ЦЕТЛИН М. Л., ШЕХТМАН Л. М., *Двухтактные ферротранзисторные схемы и алгебраический метод их синтеза.* Проблемы кибернетики, **2**, Москва, 139—179 (1959).
27. WARD M., *Postulates for the inverse operations in a group.* Trans. Amer. Math. Soc., **32**, *520—526* (1930).
28. WHITEMAN A., *Postulates for Boolean algebras involving the operations of complete disjunction.* Bull. Amer. Math. Soc. **43**, *293—298* (1937).
29. WIENER N., *A set of postulates for fields.* Trans. Amer. Math. Soc., **21**, *237—246* (1920).
30. ZYLINSKI E., *Some remarks concerning the theory of deduction.* Fund. Math., **7**, *203—209* (1925).

CONTRIBUȚII LA STUDIUL ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP PARABOLIC. II

ECUAȚII ITERATE

DE

MARCEL N. RCȘCULEȚ

În [2] am făcut un studiu amănunțit al ecuației

$$E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} - Y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} - Y_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} - \ldots - Y_m \frac{\partial u}{\partial y_m} = 0 \qquad (\alpha)$$

cu

$$Y_k \equiv Y_k(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

rezolvînd problemele ce se pun în mod obișnuit pentru această clasă de ecuații.

Problema lui Cauchy se rezolvă determinîndu-se în prealabil o soluție elementară convenabilă. Rezolvarea cere însă o restricție asupra funcțiilor Y_k și anume

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial Y_m}{\partial y_m} = 0 \qquad (\beta)$$

restricție care are izvorul în soluția elementară și nu în metoda folosită.

Se pun în continuare și se rezolvă diverse probleme la limita pentru ecuația (α) fără restricția (β).

Toate problemele privesc ecuația (α) cu o singură variabilă x și cu două sau trei variabile y, însă se arată că nu se ivește nici o dificultate dacă numărul variabilelor x este oarecare, în schimb apar dificultăți geometrice cînd numărul variabilelor y crește.

În lucrarea de față ne ocupăm de ecuația (α), iterată. A fost necesar la început (cap. I) să se studieze ecuațiile liniare de ordinul întîi, iterate, deoarece rezultatele găsite servesc pentru ecuația (α) iterată. În acest scop s-a determinat forma generală a soluției care admite tot o desfășurare de tip Almansi, s-au discutat diferite teoreme de unicitate și la urmă s-a rezolvat problema lui Cauchy.

Cap. II se ocupă de ecuația (α) iterată. La baza acestui capitol a stat memoriul prof. M. Nicolescu, *Ecuația iterată a căldurii* [1].

Pentru problema la limită (cap. III) s-a adoptat un punct de vedere deosebit, anume s-a studiat o clasă de funcții reprezentate prin integrale de tipul potențialului caloric, studiu care a permis întîi să generalizăm formulele lui Holmgren [4] și la urmă să rezolvăm problema generală la limită pentru ecuația $E(u) = 0$ reducînd-o la rezolvarea unui sistem de $2p$ ecuații integrale cu $2p$ funcții necunoscute.

CAPITOLUL I

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI, ITERATE

1. — *Forma generală a soluțiilor.* Fie ecuația cu derivate parțiale, de ordinul întîi, liniară.

$$L(u) \equiv X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_p \frac{\partial u}{\partial x_p} = 0 \tag{1}$$

$$X_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

cît și iteratele sale

$$L^2(u) = L(L(u)) = 0$$

$$L^n(u) = L[L^{n-1}(u)] = 0.$$

Să arătăm că dacă $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ este o soluție a ecuației $L = 0$, iar ψ o soluție a ecuației $L^2 = 0$, atunci funcția

$$u = \varphi \cdot \psi$$

este de asemenea o soluție a ecuației $L^2 = 0$. În adevăr

$$L^2(\varphi \cdot \psi) = L[\varphi L(\psi) + \psi L(\varphi)] = L[\varphi L(\psi)] = \varphi L^2(\psi) = 0.$$

Ne propunem acum să găsim forma generală a soluțiilor ecuației $L^2(u) = 0$. Este evident că dacă ψ este o soluție *oarecare* a ecuației $L^2(u) = 0$, atunci avem

$$L(\psi) = \Phi \tag{2}$$

unde Φ de astă dată este o soluție a ecuației $L(u) = 0$. Invers, funcția ψ care verifică ecuația

$$L(\psi) = \Phi$$

unde Φ este o soluție *oarecare* a ecuației $L(u)=0$, este o soluție a ecuației $L^2(u)=0$.

Ținînd seama de (1) avem

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p}=\frac{d\psi}{\Phi}.$$

Funcția Φ este de forma

$$\Phi=\Phi(C_1, C_2, \ldots, C_{p-1})$$

cu

$$C_i=\Phi^i(x_1, x_2,\ldots,x_p),\ i=1,2,\ldots,\ p-1$$

Φ^i fiind $p-1$ integrale prime ale ecuației (1).

Prin urmare, dacă notăm cu

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_p)=\int_{M_0}^{M}\frac{\lambda_1 dx_1+\lambda_2 dx_2+\ldots+\lambda_p dx_p}{\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2+\ldots+\lambda_p X_p} \tag{3}$$

unde $\lambda_k=\lambda_k(x_1, x_2,\ldots, x_p)$ sînt p funcții alese în așa fel încît expresia de sub semnul integral să fie o diferențială totală exactă,iar integrala (3) să aibă sens într-un domeniu stelat care conține punctul M_0, putem scrie

$$\frac{d\psi}{\Phi}=d\rho$$

de unde rezultă că

$$\psi=\rho\Phi+C_p$$

iar integrala generală a ecuației (2) are forma

$$\psi=\rho\Phi+\varphi \tag{4}$$

cu

$$L(\Phi)=L(\varphi)=0.$$

Pentru determinarea lui ρ este necesară, cum rezultă din (3) o combinație integrabilă, prin funcțiile λ_k, arbitrare, deci trebuie să avem

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_k}=\frac{\lambda_k}{\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2+\ldots+\lambda_p X_p}. \tag{5}$$

Eliminînd pe λ_k obținem pentru ρ următoarea ecuație cu derivate parțiale, neomogenă,

$$X_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\rho}{\partial x_2}+\ldots.+X_p\frac{\partial\rho}{\partial x_p}=1. \tag{6}$$

Invers, dacă ρ este o soluție oarecare a ecuației (6), atunci funcția

$$\Psi=\rho\varphi,\quad E(\varphi)=0$$

este o soluție a ecuației

$$E^2(\Psi) = 0$$

cum se poate verifica imediat. Avem prin urmare următorul rezultat general :

Dacă $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *sînt* $n+1$ *soluții oarecare ale ecuației* $L = 0$, *deci*

$$L(\varphi_k) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

atunci funcția

$$\Psi = \varphi_0 + \rho\varphi_1 + \ldots + \rho^n \varphi_n \tag{7}$$

cu

$$L(\rho) = 1$$

este o soluție a ecuației

$$L^{n+1}(\Psi) = 0,$$

funcțiile $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fiind derivabile în domeniul stelat în care este definit ρ.

Exemplu. Fie ecuația

$$L(u) = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_p \frac{\partial u}{\partial x_p} = 0, \tag{8}$$

cît și iterata sa de ordinul n + 1

$$L^{n+1}(u) = 0. \tag{9}$$

Soluțiile ecuației $L(u) = 0$ sînt de forma

$$u = \varphi\left(\frac{x_1}{x_p}, \frac{x_2}{x_p}, \ldots, \frac{x_{p-1}}{x_p}\right)$$

iar o soluție a ecuației $L(\rho) = 1$ este

$$\rho = \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2} = \ln r.$$

Prin urmare funcția Φ dată de

$$\Phi = \varphi_0 + \varphi_1 \ln r + \varphi_2 \ln^2 r + \ldots + \varphi_n \ln^n r \tag{10}$$

cu

$$\varphi_k = \varphi_k\left(\frac{x_1}{x_p}, \frac{x_2}{x_p}, \ldots, \frac{x_{p-1}}{x_p}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

este soluție a ecuației (9).

Se înțelege că în desfășurarea (10) funcția $\ln r$ poate fi înlocuită cu oricare altă soluție a ecuației $L(\rho) = 1$, iar puterea $\ln^k r$ poate fi înlocuită cu produsele a k soluții ale aceleiași ecuații $L(\rho) = 1$.

Teorema de unicitate pe care o vom da imediat va lămuri complet această problemă.

2. — *Unicitatea desfășurării.* Să arătăm că fiind dată soluția Φ a ecuației

$$L^{n+1}(\Phi) = 0$$

derivabilă de $n + 1$ ori într-un domeniu stelat (D) ce conține punctul M_0, ρ o soluție determinată a ecuației

$$L(\rho) = 1$$

definită și derivabilă în același domeniu (D), atunci există un sistem unic de funcții

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n,$$

cu

$$L(\varphi_k) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

încît să avem identic

$$\Phi = \varphi_0 + \rho\varphi_1 + \rho^2\varphi_2 + \ldots. + \rho^n\varphi_n. \tag{11}$$

Demonstrația folosită va fi aceiași cu aceea dată de prof. M. N i c o l e s c u [1]*) adică revine totul la a arăta că nu putem avea identic

$$v_0 + \rho v_1 + \ldots + \rho^n v_n \equiv 0, \; L(v_k) = 0 \tag{12}$$

fără să fim conduși nemijlocit la

$$v_k \equiv 0.$$

Aplicînd operatorul L^n identității (12) trebuie să avem și

$$L^n(\rho^n v_n) = n!\, v_n \equiv 0$$

de unde rezultă că

$$v_n \equiv 0.$$

Obținem astfel din aproape în aproape că toate componentele desfășurării (11) trebuie să fie identic nule.

Spunem că funcția Φ dată, se obține ca un polinom de gradul n în funcția ρ cu componentele φ_k unic determinate. Se înțelege că atunci cînd ρ se schimbă, componentele φ_k se schimbă de asemenea, deoarece expresiile lor depind și de ρ, nu numai de Φ.

*) p. 249.

Aplicînd în (11) operatorii L^n, L^{n-1}, ..., L^1, L^0, succesiv avem

$$L^n(\Phi) = n!\,\varphi_n$$
$$L^{n-1}(\Phi) = (n-1)!\,\varphi_{n-1} + \frac{n!}{1!}\rho\varphi_n \tag{13}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L^{n-k}(\Phi) = (n-k)!\,\varphi_{n-k} + \frac{(n-k+1)!}{1!}\rho\varphi_{n-k+1} + \cdots + \frac{n!}{k!}\rho^k\varphi_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L^0(\Phi) = \varphi_0 + \rho\varphi_1 + \cdots + \rho^n\varphi_n$$

din care obținem imediat, ρ și Φ fiind cunoscuți, deci și $L^k(\Phi)$,

$$\varphi_n = \frac{1}{n!}L^n(\Phi)$$
$$\varphi_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left[L^{n-1}(\Phi) - \frac{1}{1!}\rho\,L^n(\Phi)\right]$$
$$\varphi_{n-2} = \frac{1}{(n-2)!}\left[L^{n-2}(\Phi) - \frac{1}{1!}\rho\,L^{n-1}(\Phi) + \frac{1}{2!}\rho^2 L^n(\Phi)\right] \tag{14}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{n-k} = \frac{1}{(n-k)!}\left[L^{n-k}(\Phi) - \frac{1}{1!}\rho\cdot L^{n-k+1}(\Phi) + \cdots + (-1)^k\frac{1}{k!}\rho^k L^n(\Phi)\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_0 = L^0(\Phi) - \frac{1}{1!}\rho\,L^1(\Phi) + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\rho^n L^n(\Phi).$$

Putem pune și o altă problemă.

Fie Φ o soluție cunoscută a ecuației $L^{n+1}(\Phi) = 0$, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, n soluții date ale ecuației $L(\varphi) = 0$. Să arătăm că putem găsi totdeauna n funcții $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ soluții ale ecuației

$$L(\rho) = 1$$

încît să avem identic

$$\Phi \equiv \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n}\rho_i\varphi_1 + \sum_{i<j=1}^{n}\rho_i\rho_j\varphi_2 + \cdots + \rho_1\rho_2\rho_3\cdots\rho_n\varphi_n \tag{15}$$

cu φ_n dat de

$$\varphi_n = \frac{1}{n!}L^n(\Phi). \tag{16}$$

Aplicînd în (15) operatorul $L^0, L^1, \ldots, L^{n-1}, L^n$, avem, pe lîngă (15) și

$$L(\Phi) = \frac{n!}{(n-1)!}\varphi_1 + \frac{(n-1)!}{(n-2)!}\sum_{i=1}^{n}\rho_i\varphi_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n}\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}\rho_{i+1}\ldots\rho_n\varphi_n$$

$$L^2(\Phi) = \frac{n!}{(n-2)!}\varphi_2 + \frac{(n-1)!}{(n-3)!}\sum_{i=1}^{n}\rho_i\varphi_3 + \ldots +$$

$$+ 2!\sum_{i<j=1}^{n}\frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}{\rho_i\rho_j}\varphi_n \qquad (17)$$

. . . . . .

$$L^k(\Phi) = \frac{n!}{(n-k)!}\varphi_k + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\sum_{i=1}^{n}\rho_i\varphi_{k+1} + \ldots$$

$$+ k!\sum_{i}\frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}{\rho_{i_1}\rho_{i_2}\ldots\rho_{i_k}}\varphi_n$$

. . . . . .

$$L^{(n-1)}(\Phi) = \frac{n!}{1!}\varphi_{n-1} + (n-1)!\sum_{i=1}^{n}\rho_i\rho_n$$

$$L^n(\Phi) = n!\,\varphi_n.$$

Am obținut astfel un sistem liniar în $\sum\rho_i, \sum\rho_i\rho_j, \ldots, \rho_1\rho_2\ldots\rho_n$ cu determinantul sistemului

$$\frac{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}{(n!)^n}\cdot[L^n(\Phi)]^n \neq 0$$

care permite determinarea expresiilor omogene în ρ_i

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_i, \sum_{j>i=1}^{n}\rho_i\rho_j, \ldots, \rho_1\rho_2\ldots\rho_n.$$

Problema determinării funcțiilor ρ_i se reduce la problema rezolvării unei ecuații algebrice de gradul n. De menționat faptul că pentru a obține pe (15), nu este necesar să rezolvăm această ecuație ci numai sistemul (17).

Soluțiile $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ găsite pe această cale sînt unice. În adevăr acest fapt se reduce la a arăta că nu putem avea identic

$$(\sum\rho_i - \sum\rho_i')\varphi_1 + \ldots + (\rho_1\rho_2\ldots\rho_n - \rho_1'\rho_2'\ldots\rho_n')\varphi_n \equiv 0 \qquad (18)$$

fără să avem $\rho_i = \rho_i'$, funcțiile φ_i' fiind date.

Aplicînd lui (18) operatorul $L^{n-1}, L^{n-2}, \ldots, L^1, L^0$, obținem succesiv

$$\sum\rho_i = \sum\rho_i', \sum\rho_i\rho_j = \sum\rho_i'\rho_j', \ldots$$

de unde rezultă că $\rho_i = \rho_i'$.

3. — *Determinarea componentelor φ_k în condiţii iniţiale date.* Ne propunem să determinăm o soluţie Φ a ecuaţiei

$$L^{n+1}(\Phi) = 0.$$

soluţie care împreună cu

$$L(\Phi),\ L^2(\Phi),\ \ldots, L^n(\Phi)$$

să se reducă pentru $x_p = x_p^0$ la $n+1$ funcţii date

$$L^k(\Phi) = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}),\ k = 0,1,\ldots, n. \tag{19}$$

funcţiile f_k fiind derivabile de $n+1$ ori într-un domeniu stelat D ce conţine punctul $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$.

Vom căuta pe Φ sub forma

$$\Phi = \varphi_0 + \rho\,\varphi_1 + \ldots + \rho^n \varphi_n \tag{20}$$

cu ρ derivabil în acelaş domeniu (D). Avem

$$L^n(\Phi) = n!\,\varphi_n$$

deci problema determinării lui φ_n se reduce la problema lui Cauchy pentru ecuaţia

$$L(\varphi_n) = 0$$

cu condiţia iniţială

$$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^0) = \frac{1}{n!} f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}). \tag{21}$$

O dată determinat φ_n, aplicăm acum operatorul L^{n-1} lui (20) unde în prealabil am înlocuit pe φ_r cu funcţia determinată. Avem

$$L^{n-1}(\Phi) = \frac{n!}{1!}\rho\varphi_n + (n-1)!\,\varphi_{n-1}$$

şi cum ρ este dat, rezultă că determinarea componentei φ_{n-1} este echivalentă cu rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuaţia

$$L(\varphi_{n-1}) = 0$$

cu condiţia

$$\varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p^0) = \frac{1}{(n-1)!}\left[f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{p-1}) - \right.$$

$$\left. - \frac{n!}{1!}\rho\,\varphi_n\right]_{x_p = x_p^0}$$

φ_n fiind determinat anterior.

Pentru determinarea componentei φ_{n-k}, problema este asemănătoare și anume se reduce la rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuația

$$L(\varphi_{n-k}) = 0$$

cu condiția inițială

$$\varphi_{n-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^0) = \frac{1}{(n-k)!}\left[f_{n-k}(x_1, \ldots, x_{n-1}) - \frac{n!}{k!}\rho^k \varphi_n - \right.$$

$$\left. - \frac{(n-1)}{(k-1)!}\rho^{k-1}\varphi_{n-1} - \ldots - (n-k+1)!\,\varphi_{n-k+1}\right]_{x_p = x_p^0} \qquad (22)$$

unde $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \ldots, \varphi_{n-k+1}$ sînt determinate prin rezolvări de probleme Cauchy corespunzătoare.

Observație. Problema se simplifică mult dacă funcția ρ este determinată de condiția inițială

$$\rho(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^0) = 0.$$

În această situație, cu aceleași condiții din enunț, condițiile (22) devin

$$\varphi_{n-k}(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^0) = \frac{1}{(n-k)!} f_{n-k}(x_1, \ldots, x_{p-1})$$

adică determinarea componentei φ_k, oricare ar fi k, se reduce la rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuația

$$L(\varphi_k) = 0 \qquad (23)$$

cu condiția inițială

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p^0) = \frac{1}{k!} f_k(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) \qquad (23')$$

și soluția căutată este

$$\Phi = \varphi_0 + \rho\varphi_1 + \ldots + \rho^n \varphi_n$$

cu φ_k deduse în mod unic din (23) și (23').

CAPITOLUL II

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE, LINIARE, DE TIP PARABOLIC, ITERATE

1. — *Generalități.* Fie X și Y doi operatori diferențiali liniari, disjuncți

$$X = \sum_{\alpha \neq 0} a_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} \qquad (1)$$

cu

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_p} = a_{i_1, i_2, \ldots, i_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

și

$$Y = \sum_{\beta \neq 0} b_{j_1, i_2, \ldots, i_m} \frac{\partial^\beta}{\partial y_1^{\beta_1} \partial y_2^{\beta_2} \ldots \partial y_m^{\beta_m}} \tag{2}$$

cu

$$b_{j_1, i_2 \ldots i_m} = b_{j_1 i_2 \ldots i_m}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

de ordinul r și s respectiv și cu ajutorul lor să formăm ecuația cu derivatele parțiale

$$E(u) \equiv X(u) + Y(u) = 0 \tag{3}$$

cît și iteratele sale

$$E^2(u) = (X + Y)^2(u) = XX(u) + 2XY(u) + YY(u)$$

$$E^{(n)}(u) = (X + Y)^{(n)}(u) = (X + Y)^{n-1}[X(u) + Y(u)]. \tag{4}$$

Să arătăm acum că dacă φ este o soluție a ecuației $E(u) = 0$ atunci funcția

$$u = \xi \cdot \varphi \tag{5}$$

unde

$$X(\xi) = 0, \quad \xi = \xi(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

este de asemenea o soluție a ecuației $E(u) = 0$. În adevăr

$$E(u) = (X + Y)(\xi \cdot \varphi) = X(\xi \cdot \varphi) + Y(\xi \cdot \varphi)$$

sau

$$E(u) = \varphi X(\xi) + \xi X(\varphi) + \xi Y(\varphi) + \varphi Y(\xi) = \xi[X(\varphi) + Y(\varphi)] = 0$$

deoarece, operatorii X, Y fiind disjuncți, $Y(\xi) = 0$. Rezultat asemănător se obține dacă în (5) se înlocuiește ξ cu $\eta = \eta(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ și $Y(\eta) = 0$.

Fie acum $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ o soluție a ecuației $X^2 = 0$. Funcția

$$u = \rho\varphi$$

cu

$$E(\varphi) = 0, \quad X^2(\rho) = 0$$

este soluție a ecuației

$$E^2(u) = 0.$$

În adevăr avem

$$E(\rho\varphi) = (X + Y)(\rho\varphi) = \varphi X(\rho) + \rho X(\varphi) + \rho Y(\varphi) + \varphi Y(\rho)$$

deci

$$E(\rho\cdot\varphi)=\varphi X(\rho)+\rho E(\varphi)=\varphi X(\rho)$$

și

$$E^2(\rho\cdot\varphi)=(X+Y)[\varphi X(\rho)]=\varphi X^2(\rho)+X(\varphi)X(\rho)+ \\ +Y(\varphi)X(\rho)+\varphi Y[X(\rho)]$$

sau

$$E^2(\varphi\cdot\rho)=\varphi X^2(\rho)+(X+Y)(\varphi)X(\rho)+\varphi Y[X(\rho)]=0$$

deoarece fiecare termen, conform ipotezelor făcute, este nul.

În cele ce urmează este necesară următoarea relație. Fie $\varphi=\varphi(x_1,\ldots,x_p,y_1,\ldots,y_m)$ și $\rho=\rho(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ două funcții oarecare derivabile de $(n+1)$ r ori. Să arătăm că avem

$$E^n(\rho\cdot\varphi)\equiv\rho E^n(\varphi)+C_n^1E^{n-1}(\varphi)X(\rho)+C_n^2E^{n-2}(\varphi)X^2(\rho)+\ldots \\ +C_n^hE^{n-h}(\varphi)X^h(\rho)+\ldots+C_n^n\varphi\cdot X^n(\rho). \tag{6}$$

Vom demonstra prin inducție completă. Presupunem că (6) este adevărată pînă la n și să verificăm că este adevărată și pentru $n+1$. Avem

$$E^{n+1}(\varphi\cdot\rho)\equiv\sum_{h=0}^{n}[C_n^hE^{n-h+1}(\varphi)X^h(\rho)+C_n^{h-1}E^{n-h}(\varphi)X^{h+1}(\rho)]$$

deci

$$E^{n+1}(\rho\cdot\varphi)\equiv\sum_{h=0}^{n+1}C_{n+1}^hE^{n+1-h}(\varphi)X^h(\rho)$$

și egalitatea (6) este astfel demonstrată.

În (6) dacă $E(\varphi)=0$ și $X^n(\rho)=0$, urmează că

$$E(\varphi\cdot\rho)=0$$

deci avem următorul rezultat general:

Dacă $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n,\rho_k=\rho_k(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ sînt n funcții, soluții ale ecuațiilor $X=0$, $X^2=0,\ldots,X^n=0$, respectiv, deci

$$X^k(\rho_k)=0\qquad k=1,2,\ldots,n$$

iar $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\varphi_k=\varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_p,y_1,y_2,\ldots,y_m)$ sînt n funcții soluții ale ecuației $E=0$, deci

$$E(\varphi_k)=0,\quad k=1,2,\ldots,n$$

atunci funcția

$$u=\rho_1\varphi_1+\rho_2\varphi_2+\ldots+\rho_n\varphi_n \tag{7}$$

este soluție a ecuației

$$E^n(u)=0.$$

Mai mult chiar, u și ρ_k fiind date, desfășurarea (7) este unică în regiunea spațiului cu $p + m$ dimensiuni $(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ pentru care

$$X^h(\rho_k) \not\equiv 0, \quad h < k, \quad k = h + 1, h + 2, \ldots, n.$$

În adevăr, să presupunem că putem avea și

$$u = \rho_1 \psi_1 + \rho_2 \psi_2 + \ldots + \rho_n \psi_n, \quad E(\psi_k) = 0,$$

ținînd seama de (7), trebuie să avem identic

$$\rho_1 \theta_1 + \rho_2 \theta_2 + \ldots + \rho_n \theta_n \equiv 0 \tag{8}$$

cu $\theta_k \equiv \varphi_k - \psi_k$ deci $E(\theta_k) = 0$. Aplicînd operatorul E^{n-1} lui (8) trebuie să avem, ținînd seamă de (6)

$$\theta_n X^{n-1}(\rho_n) \equiv 0$$

și cum

$$X^{n-1}(\rho_n) \not\equiv 0$$

urmează că

$$\theta_n \equiv 0.$$

În modul acesta se poate arăta că toate componentele desfășurării (8) sînt identic nule de unde rezultă că

$$\varphi_k \equiv \psi_k.$$

Putem obține ușor componentele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, din

$$u = \rho_1 \varphi_1 + \rho_2 \varphi_2 + \ldots + \rho_n \varphi_n$$

dacă u și ρ_k sînt date. Aplicînd operatorul $E^{n-1}, E^{n-2}, \ldots, \ldots, E^0$, și ținînd seamă de (6), sîntem conduși la sistemul

$$\begin{aligned}
E^{n-1}(u) &= \varphi_n X^{n-1}(\rho_n) \\
E^{n-1}(u) &= \varphi_{n-1} X^{n-2}(\rho_{n-1}) + \varphi_n X^{n-2}(\rho_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
E^{n-k}(u) &= \varphi_{n-k+1} X^{n-k}(\rho_{n-k+1}) + \varphi_{n-k+2} X^{n-k}(\rho_{n-k+2}) + \ldots + \varphi_n X^{n-k}(\rho_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
E^0(u) &= \varphi_1 \rho_1 + \varphi_2 \rho_2 + \ldots + \varphi_n \cdot \rho_n
\end{aligned} \tag{9}$$

și, în ipoteza că determinantul sistemului, care are valoarea

$$X^0(\rho_1) \cdot X^1(\rho_2) \ldots X^{n-1}(\rho_n)$$

nu este identic nul, avem

$$\varphi_{n-k+1} = \frac{A_k}{X^0(\rho_1) X^1(\rho_2) \ldots X^{n-1}(\rho_n)} \tag{10}$$

unde A_k este un determinant ce se obține din

$$D = \begin{vmatrix} X^{n-1}(\rho_n) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ X^{n-2}(\rho_n) & X^{n-2}(\rho_{n-1}) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X(\rho_n) & X(\rho_{n-1}) & X(\rho_{n-2}) & \dots & X(\rho_2) & 0 \\ \rho_n & \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \dots & \rho_2 & \rho_1 \end{vmatrix}$$

prin înlocuirea coloanei k cu $E^{n-1}(u), E^{n-2}(u), \dots, E(u), E^0(u)$ [5]*).

2. — *Forma desfășurată a soluțiilor* ecuației

$$E^{n+1}(u) \equiv \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2} - Y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} - Y_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} - \dots \right.$$
$$\left. \dots - Y_m \frac{\partial u}{\partial y_m}\right]^{n+1} = 0 \tag{11}$$

cu $Y_k = Y_k(y_1, y_2, \dots y_m)$.

Conform rezultatului (7) al aliniatului precedent, dacă $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ sînt $n+1$ soluții ale ecuației

$$E(u) = 0$$

iar $r_0, r_1, \dots, r_n$ sînt $n+1$ soluții ale ecuațiilor $L^1 = 0$, $L^2 = 0, \dots$ $\dots, L^{n+1} = 0$, respectiv, unde am notat cu L^k operatorul

$$L = Y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + Y_m \frac{\partial}{\partial y_m}, (Y_h = Y_h(y_1, y_2, \dots, y_m)) \tag{12}$$

iterat de k ori, atunci funcția

$$u = r_0 \varphi_0 + r_1 \varphi_1 + \dots + r_n \varphi_n \tag{13}$$

este soluție a ecuației

$$E^{n+1}(u) = 0$$

iar dacă u și $r_0, r_1, \dots, r_n$ sînt date, $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ sînt unic determinate în regiunea spațiului cu $p+m$ dimensiuni $(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_m)$ pentru care nu avem identic

$$L^k(r_s) \not\equiv 0, k < s. \tag{14}$$

Folosind rezultatele cap. I, § 7, putem obține o desfășurare mai avantajoasă decît (13) pentru care restricția (14) cade.

În adevăr conform (cap. II, 7), avem

$$r_0 = \theta_{00}$$
$$r_1 = \theta_{10} + \rho\, \theta_{11}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$r_n = \theta_{n0} + \rho\, \theta_{n1} + \dots + \rho^n\, \theta_{nn}$$

*) p. 95.

unde

$$L(\theta_{ij}) = 0, \quad \theta_{ij} = \theta_{ij}(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

și

$$L(\rho) = 1, \quad \rho = \rho(y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Dacă înlocuim acum pe r_i în (13), obținem

$$\begin{aligned} u = {} & \varphi_0\,\theta_{00} + \varphi_1\,\theta_{10} + \varphi_2\,\theta_{20} + \ldots + \varphi_n\,\theta_{n0} + \\ & + \rho\,[\varphi_1\,\theta_{11} + \varphi_2\,\theta_{21} + \varphi_3\,\theta_{31} + \ldots + \varphi_n\,\theta_{n1}] + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \rho^{n-1}\,[\varphi_{n-1}\,\theta_{n-1,\,n-1} + \varphi_n\,\theta_{n,\,n-1}] + \rho^n\,\varphi_n\,\theta_{n,\,n}. \end{aligned}$$

Însă conform primului rezultat din acest capitol, avem

$$E\left(\sum_{k=j}^{n} \varphi_k\,\theta_{kj}\right) = 0$$

deoarece

$$L(\theta_{kj}) = 0\ ,\ E(\varphi_k) = 0$$

și ecuația $E(u)$ este liniară. Din acest fapt razultă imediat că o soluție a ecuației $E(u) = 0$ iterată de $n + 1$— ori admite desfășurarea următoare

$$u = \varphi_0 + \rho\varphi_1 + \ldots + \rho^n\varphi_n \tag{15}$$

cu

$$\begin{aligned} E(\varphi_k) &= 0 \\ L(\rho) &= 1 \end{aligned}$$

ρ și φ_k fiind definite în același domeniu stelat (D) din spațiul cu $p + m$ dimensiuni $(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Deoarece avem

$$L^k(\rho^k) = k\,!$$

urmează că dacă u și ρ sînt date, desfășurarea este unică, fără nici o restricție asupra domeniului unde sînt definite funcțiile φ_k și ρ. Din

$$\begin{aligned} (-1)^n E^n(u) &= n\,!\,\varphi_n \\ (-1)^{n-1} E^{n-1}(u) &= (n-1)\,!\,\varphi_{n-1} + \frac{n\,!}{1\,!}\,\rho\varphi_n \qquad (16) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{n-k} E^{n-k}(u) &= (n-k)\,!\,\varphi_{n-k} + \frac{(n-k+1)\,!}{1\,!}\,\rho\,\varphi_{n-k+1} + \\ &+ \ldots + \frac{n\,!}{k\,!}\,\rho^k\,\varphi_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E^0(u) &= \varphi_0 + \rho\varphi_1 + \ldots + \rho^n\varphi_n \end{aligned}$$

rezultă imediat componentele φ_k

$$\varphi_n = \frac{(-1)^n}{n!} E^n(u)$$

$$\varphi_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left[E^{n-1}(u) - \frac{\rho}{1!} E^n(u)\right] \tag{16'}$$

. . . . . .

$$\varphi_{n-k} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)}\left[E^{n-k}(u) - \frac{\rho}{1!} E^{n-k+1}(u) + \ldots + (-1)^k \frac{\rho^k}{k!} E^n(u)\right]$$

. . . . . .

$$\varphi_0 = E^0(u) - \frac{\rho}{1!} E^1(u) + \ldots + (-1)^n \frac{\rho^n}{n!} E^n(u).$$

Problema lui Cauchy. Rezultate anterioare. În lucrarea [2] ne-am ocupat de rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuația

$$E(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(y, z)\frac{\partial u}{\partial y} - Q(y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{17}$$

cu legătura

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \tag{18}$$

obținînd următorul rezultat :

Dacă condițiile următoare sînt îndeplinite

a) Funcțiile $P(y, z)$ și $Q(y, z)$ sînt mărginite într-o vecinătate (D) a punctului η, ζ

$$(D) \qquad \begin{aligned} &|y - \eta| < r \\ &|z - \zeta| < r, \; r > 0 \end{aligned} \tag{19}$$

și nenule în punctul η, ζ

$$P(\eta, \zeta) \neq 0, \quad Q(\eta, \zeta) \neq 0$$

b) Soluția ecuației diferențiale

$$\frac{dz}{dy} P(y, z) - Q(y, z) = 0 \tag{20}$$

care trece prin punctul (η, ζ), taie axa oz într-un punct $\alpha(\eta, \zeta)$ în așa fel încît arcul cuprins între aceste două puncte se găsește în întregime în (D).

c) În domeniul $D' \subset D$ funcția continuă $w = G(\eta, \zeta) - G(y, z)$ soluție a ecuației diferențiale

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} P(\eta, \zeta) + \frac{\partial w}{\partial \zeta} Q(\eta, \zeta) = 1 \tag{21}$$

cît și a ecuației diferențiale

$$\frac{\partial w}{\partial y} P(y, z) + \frac{\partial w}{\partial z} Q(y, z) = -1 \tag{22}$$

verifică neegalitatea

$$G(\eta, \zeta) - G(y, z) > 0 \quad (y, z) \in (D') \tag{23}$$

și care pentru $z = \zeta$ se reduce la $\eta - y$, atunci există o soluție în (D') a ecuației (17) cu legătura (18) care să satisfacă condiția inițială

$$u(x, y, z)|_{y=0} = \varphi(x, z) \tag{24}$$

funcția $\varphi(x, z)$ fiind mărginită în (D) în raport cu variabila z iar în raport cu x, verificînd pentru orice x neegalitatea

$$|\varphi(x, z)| < Me^{k \cdot x^2} \tag{25}$$

pentru $k < \frac{1}{4r}$, soluție dată de

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{Q(\eta, \zeta)} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha) \varphi(x, \alpha) \left[G(\eta, \zeta) - \right.$$

$$\left. - G(0, \alpha) \right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(\xi - x)^2}{G(\eta, \zeta) - G(0, \alpha)} \right] dx \tag{26}$$

3. — *Rezolvarea problemei lui Cauchy* pentru ecuația

$$E^{n+1}(u) = 0 \tag{27}$$

cu $E(u) = 0$ dat de (17) și (18).

Vom căuta soluții $u(x, y, z)$ de forma

$$u = u_0 + \rho u_1 + \ldots + \rho^n u_n \tag{28}$$

cu

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} - P(y, z) \frac{\partial u_k}{\partial y} - Q(y, z) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial z} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

și $\rho(y, z)$ soluție a ecuației

$$P(y, z) \frac{\partial \rho}{\partial y} + Q(y, z) \frac{\partial \rho}{\partial z} = -1$$

care satisface condiția

$$\lim_{y \to 0} \rho(y, z) = 0 \tag{29}$$

condiție care determină pe ρ.

Soluția $u(x, y, z)$ cerută trebuie să satisfacă condițiile inițiale

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial^k u}{\partial y^k} = \omega_k(x, z), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

cu $\omega_k(x, z)$ funcții continue, satisfăcînd în plus în raport cu x neegalitatea

$$| \omega_k(x, z) | < M \exp(k. x^2)$$

M și k două numere pozitive convenabil alese.

Avem, ținînd seamă de (28) și (29)

$$\lim_{y \to 0} u = \lim_{y \to 0} u_0 = \omega_0(x, z)$$

deci u_0, conform lui (26), este dat de

$$u_0(x, y, z) = -\frac{1}{Q(y, z)} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, \omega_0(\xi, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\, d\xi \tag{31}$$

unde am notat

$$v(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{G(y, z) - G(\eta, \zeta)}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(\xi - x)^2}{G(y, z) - G(\eta, \zeta)}\right].$$

Să presupunem că putem determina în continuare pe $u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$ și să arătăm că u_s rezultă în mod unic în funcție de componentele u_k, de indici inferiori ($k < s$).

Deoarece funcția $u(x, y, z)$ căutată, prin ipoteză este soluție a ecuației

$$E^{n+1}(u) = 0 \tag{27}$$

atunci și

$$\frac{\partial^s u}{\partial y^s}$$

va fi soluție a aceleiași ecuații (27) și conform desfășurării (28) putem scrie

$$\frac{\partial^s u}{\partial y^s} = w_0 + \rho w_1 + \ldots + \rho^n w_n. \tag{32}$$

Însă cum avem

$$u = u_0 + \rho u_1 + \ldots + \rho^n u_n \tag{28}$$

iar din (32) ne interesează numai w_0 deoarece

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial^s u}{\partial y^s} = \lim_{y \to 0} w_0 = \omega_s(x, z) \tag{33}$$

conform lui (32) urmează că w_0 se obține derivînd de s ori pe (28) și anume luînd din acest rezultat numai termenul care nu conține pe ρ factor. Avem

$$w_0 = \frac{\partial^s u_0}{\partial y^s} + C_s^1 \frac{\partial^{s-1} u_1}{\partial y^{s-1}} \frac{\partial \rho}{\partial y} + C_s^2 \frac{\partial^{s-2} u_1}{\partial y^{s-2}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \ldots + C_s^s u_1 \frac{\partial^s \rho}{\partial y^s} + \ldots$$

$$\ldots + s!\, u_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^s . \qquad (34)$$

Combinînd acum (33) cu (26) obținem

$$w_0(x, y, z) = -\frac{1}{Q(y, z)} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, \omega_s(\xi, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\, d\xi \qquad (35)$$

și care introdusă în (34) ne determină pe u_s în funcție de $u_0, u_1, \ldots, u_{s-1}$ și derivatele lor.

Rezultă de aici o dată determinat u_0 dat de (31), putem determina din (34) pe u_1, apoi pe u_2, ș.a.m.d., pe u_s pentru orice s.

Pentru $s = 1$, avem dacă $\alpha = \alpha(y, z)$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} u_1 = -\frac{1}{Q(y, z)} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\, \omega_1(\xi, \alpha)\, d\xi +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{Q(y, z)} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\, \omega_0(\xi, \alpha)\, d\xi\right] \qquad (36)$$

și dacă $\frac{\partial \rho}{\partial y} \neq 0$ obținem din (36) pe $u_1(x, y, z)$.

Dacă adoptăm notația [1, p. 259]

$$u(\omega_k) = -\frac{1}{Q(y, z)} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\, \omega_k(\xi, \alpha)\, d\xi$$

atunci componentele $u_1, u_2, \ldots$ se scriu, în ipoteza permanentă ca $\rho'_y \not\equiv 0$,

$$u_1 = \frac{1}{\rho'_y}\left[u(\omega_1) - \frac{\partial u(\omega_0)}{\partial y}\right]$$

$$u_2 = \frac{1}{2!}\frac{1}{\rho'^2_y}\left[\frac{\partial^2 u(\omega_0)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u(\omega_1)}{\partial y} + u(\omega_2)\right] - \frac{1}{2!}\frac{\rho''_{yy}}{\rho'^3_y}\left[\frac{\partial u(\omega_0)}{\partial y} - u(\omega_1)\right]$$

$$u_3 = \frac{1}{3!}\frac{1}{\rho'^3_y}\left[u(\omega_3) - 3\frac{\partial u(\omega_2)}{\partial y} + 3\frac{\partial^2 u(\omega_1)}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 u(\omega_0)}{\partial y^3}\right] -$$

$$- \frac{3}{3!}\frac{\rho''_{yy}}{\rho'^4_y}\left[u(\omega_2) - 2\frac{\partial u(\omega_1)}{\partial y} + \frac{\partial^2 u(\omega_0)}{\partial y^2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{3!}\frac{\rho'''_{yyy}\rho'_y - 3\rho''^2_{yy}}{\rho'^5_y}\left[u(\omega_1) - \frac{\partial u(\omega_0)}{\partial y}\right].$$

În general, dacă notăm

$$u(\omega_k) - C_k^1 \frac{\partial u(\omega_{k-1})}{\partial y} + \ldots + (-1)^p C_k^p \frac{\partial u(\omega_{k-p})}{\partial y^p} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k \frac{\partial_u^k(\omega_0)}{\partial y^k} = \left[u(\omega) - \frac{\partial u(\omega)}{\partial y}\right]^{(k)}$$

atunci

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} A_{n-k} \left[u(\omega) - \frac{\partial u(\omega)}{\partial y}\right]^{(k)} \tag{37}$$

cu A_{n-k} coeficienți ce depind de derivatele în raport cu y ale funcției ρ și care pot fi determinați din aproape în aproape.

Soluția astfel găsită verifică condițiile inițiale date. Vom arăta acest fapt pe soluția ecuației

$$E^2(u) = 0$$

și anume

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{Q(y, z)} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\, \omega_0(\xi, \alpha)\, d\xi -$$

$$- \frac{\rho}{\rho'_y} \frac{1}{Q(y, z)} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\, \omega_1(\xi, \alpha)\, d\xi + \tag{38}$$

$$+ \frac{\rho}{\rho'_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{Q(y, z)} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\, \omega_0(\xi, \alpha)\, d\xi\right].$$

Va trebui să avem

$$\lim_{y \to 0} u(x, y, z) = \omega_0(x, z)$$

și

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial y} = \omega_1(x, z)$$

Deoarece prin ipoteza

$$\lim_{y \to 0} \rho(y, z) = 0$$

prima condiție se verifică imediat. Pentru a verifica și condiția a doua, observăm că dacă scriem

$$u = u(\omega_0) + \frac{\rho}{\rho'_y} u(\omega_1) - \frac{\rho}{\rho'_y} \frac{\partial u(\omega_0)}{\partial y}$$

atunci

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u(\omega_0)}{\partial y} + u(\omega_1) - \frac{\partial u(\omega_0)}{\partial y} + \rho . A$$

și la limită

$$\lim_{\nu \to 0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\nu \to 0} u(\omega_1) = \omega_1(x, z).$$

Unicitatea soluției găsite (38) rezultă din însăși expresia ei. Se poate însă folosi aceeași cale ca în (I, p. 260).

4. — *Altă formulare a problemei lui Cauchy.* Pentru ecuațiile iterate, în speță pentru ecuația de la aliniatul precedent, (17), mai comodă este următoarea enunțare a problemei la Cauchy.

Fiind date funcțiile

$$\gamma_0(x, z), \gamma_1(x, z), \ldots, \gamma_n(x, z)$$

continue iar în raport cu x satisfăcînd în plus neegalitățile

$$|\gamma_h(x, z)| < M \exp(kx^2), \quad h = 1, 2, \ldots, n \tag{39}$$

într-un domeniu (D) pentru care avem

$$0 < G(y, z) - G(\eta, \zeta) < \frac{1}{4k}.$$

să se găsească soluția ecuației

$$E^{n+1}(u) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - P(y, z)\frac{\partial}{\partial y} - Q(y, z)\frac{\partial}{\partial z}\right]^{n+1} u = 0$$

cu

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

care satisface condițiile inițiale

$$\lim E^h(u) = \gamma_h(x, z), \; h = 0, 1, \ldots, n \tag{40}$$

Vom căuta pe u de forma

$$u = u_0 + \rho u_1 + \ldots + \rho^n u_n \tag{28}$$

cu

$$L(\rho) = 1 \; ; \; E(u_h) = 0, \; h = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{41}$$

și

$$\lim_{\nu \to 0} \rho(y, z) = 0 \tag{42}$$

Aplicînd operatorul E^n lui (28) avem

$$E^n(u) = (-1)^n\, n!\, u_n$$

deci

$$\lim_{v\to 0} u_n = \frac{(-1)^n}{n!}\,\gamma_n(x, z)$$

și folosind pe (26) urmează că

$$u_n(x, y, z) = \frac{1}{n!}\,\frac{(-1)^{n+1}}{Q(y, z)}\,\frac{\partial \alpha}{\partial y}\int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\,\gamma_n(\xi, \alpha)\,d\xi. \quad (43)$$

Să aplicăm acum operatorul E^{n-1} lui (28); avem

$$E^{n-1}(u) = (-1)^{n-1}\left[(n-1)!\, u_{n-1} + \frac{n!}{1!}\,\rho\, u_n\right]$$

și cum ρ satisface condiția (42), avem la limită

$$\lim_{v\to 0} E^{n-1}(u) = (-1)^{n-1}(n-1)!\lim_{v\to 0} u_{n-1} = \gamma_{n-1}(x, z)$$

$$u_{n-1}(x, y, z) = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{(-1)^n}{Q(y, z)}\,\frac{\partial \alpha}{\partial y}\int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\,\gamma_{n-1}(\xi, \alpha)\,d\xi \quad (44)$$

În general, dacă aplicăm operatorul E^{n-k} lui (28), avem conform lui (16)

$$E^{n-k}(u) = (-1)^{n-k}\left[(n-k)!\, u_{n-k} + \frac{(n-k+1)!}{1!}\,\rho\, u_{n-k+1} + \ldots + \frac{n!}{k!}\,\rho^k u_n\right]$$

deci

$$\lim_{v\to 0} u_{n-k} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\,\gamma_{n-k}(x, z)$$

și

$$u_{n-k}(x, y, z) = \frac{1}{(n-k)!}\,\frac{(-1)^{n-k+1}}{Q(y, z)}\,\frac{\partial \alpha}{\partial y}\int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\,\gamma_{n-k}(\xi, \alpha)\,d\xi \quad (45)$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, n$.

Soluția căutată este deci următoarea

$$u(x, y, z) = -\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{\rho^{n-k}}{Q(y, z)}\cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y}\int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\,\gamma_{n-k}(\xi, \alpha)\,d\xi \quad (46)$$

Se verifică ușor, ținînd seamă de condiția (29) că soluția (46) satisface atît ecuația dată cît și condițiile inițiale (40).

5.—*Analiticitate E.* Problema precedentă conduce în mod natural la următoarea :

Să se găsească funcția $u\,(x, y, z)$ care satisface condițiile următoare

$$\lim_{y\to 0} E^h\,(u) = \gamma_h\,(x, z),\quad h = 0, 1, 2, \ldots \tag{47}$$

funcțiile $\gamma_h\,(x, z)$ fiind continui într-un domeniu (D) pentru care

$$0 < G\,(y, z) - G\,(\eta, \zeta) < \frac{1}{4k}$$

iar în raport cu x satisfăcînd neegalitățile

$$|\,\gamma_h\,(x, z)\,| < M \exp\,(k.\,x^2)$$

pentru orice h.

Rezultatul (46) ne arată că $u\,(x, y, z)$ are expresia

$$u\,(x, y, z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h\,!}\,\frac{\rho^h}{Q\,(y, z)}\,\frac{\partial \alpha}{\partial y}\int_{-\infty}^{+\infty} P\,(0, \alpha)\,v\,(x, y, z\,;\,\xi, 0, \alpha)\,\gamma_h\,(\xi, \alpha)\,d\xi \tag{48}$$

$$L\,(\rho) = 1,\quad \lim_{y\to 0} \rho\,(y, z) = 0.$$

În adevăr, în regiunea de convergență uniformă a lui u și a *tuturor* derivatelor sale, avem

$$E^n(u) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h\,!}\cdot\frac{\rho^h}{Q\,(y, z)}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}\int_{-\infty}^{+\infty} P\,(0,\,\alpha)\,v\,(x, y, z\,;\,\xi, 0,\,\alpha)\,\gamma_{n+h}\,(\xi,\,\alpha)\,d\xi$$

deci

$$\lim_{y\to 0} E^n\,(u) = \gamma_n\,(x, z)$$

Seria (48) definește într-o anumită regiune a spațiului (x, y, z), funcția $u\,(x, y, z)$ continuă și indefinit derivabilă. Clasa funcțiilor $u\,(x, y, z)$ care admit o astfel de desfășurare, într-o regiune (Δ) poate fi numită *clasa funcțiilor E-analitic* și constituie o generalizare a funcțiilor parabolic analitice, introduse de prof. *M.* Nicolescu [1] *).

De fapt și analiticitatea E este tot o analiticitate parabolică care se reduce la cea amintită [1] în cazul cînd $Q\,(y, z) \equiv 0$ și $P\,(y, z) \equiv 1$.

O analiză aprofundată a formulei (48) se poate face în mod asemănător celei făcute [1]**) pentru ecuația căldurii iterate.

---

*) p. 268.
**) *Ibidem*, p. 274.

CAPITOLUL III

PROBLEMA LA LIMITĂ

Rezolvarea problemei la limită ce o vom enunța în aliniatul următor pentru ecuația $E^{p)}(u) = 0$, o vom face prin intermediul ecuațiilor integrale și anume vom reduce problema la rezolvarea unui sistem de $2p$ ecuații integrale cu $2p$ funcții necunoscute.

Se poate folosi formule și funcții Green corespunzătoare [1] *).

Noi vom urma calea aceasta deoarece ne permite să studiem o clasă de integrale ce intervin în mod natural, studiu ce ne va permite în același timp să generalizăm formulele lui H o l m g r e n [3].

1. — *Rezultate preliminare.* a) Să considerăm integrala

$$H_{m,n} = \int_C \varphi(\eta, \zeta) \frac{(x-\xi)^m}{[G(y,z) - G(\eta,\zeta)]^n} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(x-\xi)^2}{G(y,z) - G(\eta,\zeta)}\right] \cdot [Q(\eta,\zeta)\,d\eta - P(\eta,\zeta)\,d\zeta] \quad (1)$$

unde $\varphi(\eta, \zeta)$ este o funcție continuă, $G(y, z) - G(\eta, \zeta)$ este o soluție a ecuației

$$P(y,z)\frac{\partial w}{\partial y} + Q(y,z)\frac{\partial w}{\partial z} = 1 \quad (2)$$

cît și a ecuației

$$P(\eta,\zeta)\frac{\partial w}{\partial \eta} + Q(\eta,\zeta)\frac{\partial w}{\partial \zeta} = -1 \quad (3)$$

care pentru $z = \zeta$ se reduce la $y - \eta$, iar C este o curbă închisă (fig. 1) unde M_0S este arcul de curbă, soluție a ecuației,

$$P(\eta,\zeta)\,d\zeta - Q(\eta,\zeta)\,d\eta = 0$$

ce trece prin punctul $M_0(y, z)$. Curba (C)se găsește în domeniul (D) unde

$$G(y,z) - G(\eta,\zeta) \geqslant 0$$

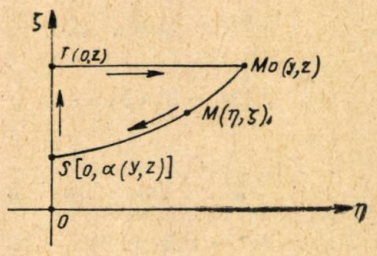


Fig. 1

Să cercetăm pentru ce valori ale lui m și n, $H_{m,n}$ este soluție a ecuației

$$E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(y,z)\frac{\partial u}{\partial y} - Q(y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

iterată de p ori.

Avem

$$\frac{\partial H_{m,n}}{\partial x} = m\,H_{m-1,n} - \frac{1}{2}H_{m+1,n+1}$$

*) p. 281.

deci

$$\frac{\partial^2 H_{m,n}}{\partial x^2} = m(m-1) H_{m-2,n} - \frac{2m+1}{2} H_{m,n+1} + \frac{1}{4} H_{m+2,n+2}.$$

Avem şi

$$\frac{\partial H_{m,n}}{\partial y} = -n \frac{\partial G}{\partial y} H_{m,n+1} + \frac{1}{4} \frac{\partial G}{\partial y} H_{m+2,n+2}$$

$$\frac{\partial H_{m,n}}{\partial z} = -n \frac{\partial G}{\partial z} H_{m,n+1} + \frac{1}{4} \frac{\partial G}{\partial z} H_{m+2,n+2}$$

Dacă formăm acum $E(H_{m,n})$, obţinem

$$E(H_{m,n}) = m(m-1) H_{m-2,n} + \frac{2n-2m-1}{2} H_{m,n+1} \tag{5}$$

Relaţia (5) obţinută mai sus ne permite să calculăm pe $E^2, E^3, \ldots, E^p$. Avem

$$E^2(H_{m,n}) = m(m-1)\ldots(m-2)(m-3) H_{m-4,n} +$$

$$+ m(m-1)(2n-2m+1) H_{m-2,n+1} + \frac{1}{2^2}(2n-2m-1)(2n-2m+1) H_{m,n+2}$$

şi în general

$$\begin{aligned} E^p(H_{m,n}) = {} & \frac{m!}{(m-2p)!} H_{m-2p,n} + \frac{1}{2} C_p^1 \frac{m!}{(m-2p+2)!}(2n-2m+ \\ & + 2p-3) H_{m-2p+2,n+1} + \frac{1}{2^2} C_p^2 \frac{m!}{(m-2p+4)!}(2n-2m+ \\ & + 2p-3)(2n-m+2p-5) H_{m-2p+4,n+2} + \ldots \\ & \ldots + \frac{1}{2^k} C_p^k \frac{m!}{(m-2p+2k)!}(2n-2m+2p-3)(2n-2m+2p-5)\ldots \\ & \ldots (2n-2m+2p-2k-1) H_{m-2p+2k,n+k} + \ldots + \\ & + \frac{1}{2^p}(2n-2m+2p-3)(2n-2m+2p-5)\ldots(2n-2m-1) H_{m,n+p} \end{aligned} \tag{6}$$

care se demonstrează prin recurenţă. Trebuie să ţinem seama că toate funcţiile $H_{m-2p+2k,n+k}$, $(m, p, k > 0)$ pentru $m - 2p + 2k < 0$ în desfăşurarea (6) sînt nule.

Relaţia (6) permite să găsim toate integralele $H_{m,n}$ care verifică ecuaţia

$$E^p = 0.$$

Pentru $p = 1$, găsim

$$m = 0, \quad n = \frac{1}{2}$$

$$m = 1, \quad n = \frac{3}{2}$$

Pentru $p = 2$, avem

$$m = 0, \quad n = \frac{1}{2}, \quad n = -\frac{1}{2}$$

$$m = 1, \quad n = \frac{1}{2}, \quad n = -\frac{3}{2}$$

$$m = 2, \quad n = \frac{3}{2}$$

$$m = 3, \quad n = \frac{3}{2}$$

soluții care intervin în rezolvarea problemelor la limită, pentru ecuația căldurii [3], [4], sau în ecuația căldurii iterată [1].

b) Să arătăm că

$$H_{m,n}(x, y, z; \varphi, \gamma) = \int_C \varphi(\eta, \zeta) \frac{[x - \gamma(\eta, \zeta)]^m}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^n} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{[x - \gamma(\eta, \zeta)]^2}{G(y, z) - G(\eta, \zeta)}\right] [Q(\eta, \zeta)\, d\eta - P(\eta, \zeta)\, d\zeta] \tag{7}$$

este continuă cînd punctul $M(x, y, z)$ traversează suprafața $x = \gamma(y,z)$ pentru $n < \frac{m+2}{2}$ și este discontinuă dacă $n \geqslant \frac{m+2}{2}$ iar m este un întreg oarecare.

În acest scop să considerăm integralele

$$F(x, y) = \int_0^y \frac{(x - \gamma(\eta))^m}{(y - \eta)^{\frac{m+2}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(x - \gamma(\eta))^2}{y - \eta}\right] d\eta \tag{8}$$

și

$$K(x, y) = -2 \int_0^y \left[\frac{x - \gamma(\eta)}{\sqrt{y - \eta}}\right]^{m-1} \cdot \frac{\gamma'(\eta)}{\sqrt{y - \eta}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{(x - \gamma(\eta))^2}{y - \eta}\right] d\eta \tag{9}$$

Dacă punem

$$\frac{x - \gamma(\eta)}{2\sqrt{y - \eta}} = u; \quad \frac{du}{d\eta} = -\frac{\gamma'(\eta)}{2\sqrt{y - \eta}} + \frac{x - \gamma(\eta)}{4(y - \eta)^{3/2}}$$

atunci

$$F(x, y) + K(x, y) = 4.2^{m-1} \int_{\frac{x - \gamma(0)}{\sqrt{y}}}^{\pm\infty} u^{m-1} e^{-u^2} \, du \tag{10}$$

unde avem $\pm\infty$ după cum $M(x, y)$ tinde către un punct $M'(X, Y)$ al curbei $x = \gamma(y)$ de la dreapta la stînga sau de la stînga la dreapta.

Funcția $K_1(x, y)$ este continuă pe arcul $x = \gamma(y)$, dacă $\gamma'(y)$ este mărginită și integrabilă și în plus

$$|\gamma(y) - \gamma(\eta)| < |y - \eta|^{\alpha}, \qquad \alpha > \frac{1}{2}$$

încît avem pentru un punct $M'(X, Y)$ de pe curba γ

$$K(X, Y) = -2 \int_0^Y \left[\frac{\gamma(Y) - \gamma(\eta)}{\sqrt{Y - \eta}}\right]^{m-1} \frac{\gamma'(\eta)}{\sqrt{Y - \eta}} \exp\left[-\frac{1}{4} \frac{[\gamma(Y) - \gamma(\eta)]^2}{Y - \eta}\right] d\eta. \tag{11}$$

Funcția $K(x, y)$ este continuă și pentru orice x, deoarece pentru $\eta \to y$ și $x \neq \gamma(y)$ exponențiala este nulă, ceea ce asigură convergența uniformă a integralei (9).

Prin urmare cînd $M(x, y)$ tinde către $M'(X, Y)$ avem în (10)

$$\lim_{(x, y) \to (X, Y)} [F(x, y) + K(x, y)] = 2^{m+1} \int_{\frac{X - \gamma(0)}{\sqrt{Y}}}^{\pm\infty} u^{m-1} e^{-u^2} \, du \tag{12}$$

iar în punctul (X, Y), avem

$$F(X, Y) + K(X, Y) = 2^{m+1} \int_{\frac{X - \gamma(0)}{\sqrt{Y}}}^{0} u^{m-1} e^{-u^2} \, du \tag{13}$$

dacă scădem pe (13) din (12), obținem, ținînd seama că $K(x, y)$ este continuă

$$\lim_{(x, y) \to (X, Y)} F(x, y) = F(X, Y) \pm 2^{\frac{m+1}{2}} \cdot (m-2)!! \sqrt{\pi} \qquad (m, \text{impar})$$

Dacă m este par, atunci

$$\lim_{(x, y) \to (X, Y)} F(x, y) = F(X, Y) + 2^m \left(\frac{m - 2}{2}\right)!$$

deci și în acest caz $F(x, y)$ este tot discontinuă însă cele două limite sînt egale.

Integrala

$$\int_0^y \frac{(x-\gamma(\eta))^m}{(y-\eta)^n} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(x-\gamma(\eta))^2}{y-\eta}\right] d\eta \tag{14}$$

pentru $n < \frac{m+2}{2}$ este continuă. Dacă $x \neq \gamma(\eta)$ exponențiala este nulă pentru $y \to \eta + 0$ și singularitatea dispare. Dacă sîntem însă pe arcul (γ), avem două situații. Dacă

$$x - \gamma(\eta) \equiv \gamma(y) - \gamma(\eta) \equiv (y-\eta)^\alpha \varphi(\eta)$$

cu $\alpha < \frac{1}{2}$ și $\varphi(y) \neq 0$, atunci exponențiala este nulă și integrala este continuă.

Dacă $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ și $\varphi(y) \neq 0$ atunci exponențiala este finită însă din cauza condiției impuse lui $n < \frac{m+2}{2}$, rezultă că integrala (14) este nulă pentru $y = \eta$ și are prin urmare sens. Deci pentru $n < \frac{m+2}{2}$, integrala (14) reprezintă o funcție continuă.

În fine dacă $n \geqslant \frac{m+2}{2}$, discuția de mai sus arată că integrala (14) este discontinuă, valoarea sa depinzînd de modul cum punctul $M(x, y)$ tinde către $M'(X, Y)$ situat pe curba (γ).

Dacă considerăm acum funcția

$$\Phi(x, y; \Phi) = \int_0^y \varphi(\eta) \frac{(x-\gamma(\eta))^m}{(y-\eta)^{\frac{m+2}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{(x-\gamma(\eta))^2}{y-\eta}\right) d\eta \tag{15}$$

în ipoteza că $|\varphi(y) - \varphi(\eta)| < |y-\eta|^\alpha$ cu $\alpha > 0$, avem, urmînd un raționament clasic și ținînd seama de rezultatele precedente

$$\lim_{(x,y)\to(X,Y)} \Phi(x, y; \varphi) = \pm 2^{\frac{m+1}{2}} \cdot (m-2)!! \sqrt{\pi}\, \varphi(Y) + \tag{16}$$

$$+ \int_0^Y \varphi(\eta) \frac{(\gamma(Y)-\gamma(\eta))^m}{(Y-\eta)^{\frac{m+2}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(\gamma(Y)-\gamma(\eta))^2}{Y-\eta}\right] d\eta$$

pentru m impar și

$$\lim_{(x,\,y)\to(X,\,Y)} \Phi(x, y; \varphi) = 2^m \cdot \left(\frac{m-2}{2}\right)! \; \varphi(Y) + \tag{17}$$

$$+\int_0^Y \varphi(\eta)\, \frac{(\gamma(Y)-\gamma(\eta))^m}{(Y-\eta)^{\frac{m+2}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{4}\,\frac{(\gamma(Y)-\gamma(\eta))^2}{Y-\eta}\right] d\eta$$

pentru m par. Aceste rezultate pot fi considerate generalizări ale formulei lui Holmgren.

Să revenim acum la problema propusă. Dacă (C) este curba dată de figura (2)

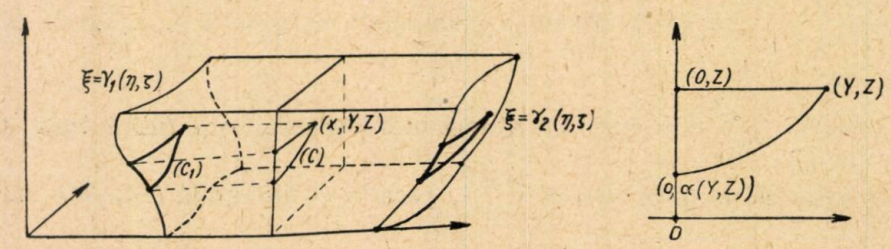


Fig. 2

atunci integrala (7) se scrie

$$H_{m,n}(x, y, z; \varphi, \gamma) = -$$

$$-\int_\alpha^z \frac{[x-\gamma(0,\zeta)]^m}{[G(y,z)-G(0,\zeta)]^n} \exp\left[-\frac{1}{4}\,\frac{[x-\gamma(0,\zeta)]^2}{G(y,z)-G(0,\zeta)}\right] \varphi(0,\zeta)\, P(0,\zeta)\, d\zeta +$$

$$+\int_0^y \frac{(x-\gamma(\eta,z))^m}{(y-\eta)^n} \exp\left[-\frac{1}{4}\,\frac{(x-\gamma(\eta,z))^2}{y-\eta}\right] \varphi(\eta, z)\, Q(\eta, z)\, d\eta \tag{18}$$

Funcția $G(y, z) - G(\eta, \zeta)$ fiind pozitivă, continuă și anulîndu-se pentru $y = \eta$, $z = \zeta$ iar intervalul (α, z) al axei $O\zeta$ aparținînd acestui domeniu, conform ipotezelor făcute, urmează că prima integrală a părții a doua nu are discontinuități în intervalul de integrare.

Integrala a doua din partea doua este de tipul celei studiate mai sus deci concluziile privind integrala $\Phi(x, y; \gamma)$ se transmit și asupra lui $H_{m,n}$ și anume dacă $n \geqslant \frac{m+2}{2}$ integrala (7) este discontinuă iar pentru

$n < \frac{m+2}{2}$, continuă. Pentru $n = \frac{m+2}{2}$ avem, dacă M_0 are coordonatele X, Y, Z,

$$\lim_{(x,y,z)\to(X,Y,Z)} H_{m,\frac{m+2}{2}}(x, y, z; \varphi, \gamma) =$$

$$= -\int_{\alpha(Y,Z)}^{Z} \frac{[\gamma(Y,Z)-\gamma(0,\zeta)]^m}{[G(Y,Z)-G(0,\zeta)]^{\frac{m+2}{2}}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{[\gamma(Y,Z)-\gamma(0,\zeta)]^2}{G(Y,Z)-G(0,\zeta)}\right]$$

$$\varphi(0,\zeta)\, P(0,\zeta)\, d\zeta +$$

$$+\int_0^Y \varphi(\eta, Z)\, Q(\eta, Z) \cdot \frac{(\gamma(Y,Z)-\gamma(\eta,Z))^m}{(Y-\eta)^{\frac{m+2}{2}}}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{4}\frac{(\gamma(Y,Z)-\gamma(\eta,Z))^2}{Y-\eta}\right] d\eta + \lambda Q(Y,Z)\cdot\varphi(Y,Z) \qquad (19)$$

unde, dacă m este impar $\lambda = \pm 2^{\frac{m+1}{2}} (m-2)!!\sqrt{\pi}$ și se ia + sau − după cum $x - X > 0$ sau $x - X < 0$, iar dacă m este impar $\lambda = 2^m \left(\frac{m-2}{2}\right)!$ în ambele situații.

Rezultatele obținute mai sus permit să rezolvăm pentru ecuația

$$E^p(u) = 0$$

următoarea

2.—*Problemă la limită.* Să se determine soluția $u(x, y, z)$ a ecuației

$$E^p(u) = 0$$

unde

$$E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(y,z)\frac{\partial u}{\partial y} - Q(y,z)\frac{\partial u}{\partial z}$$

în domeniul (D) mărginit de suprafețele

$$x = \gamma_1(y,z), \quad x = \gamma_2(y,z) \qquad (20)$$

$$\gamma_1(y,z) < \gamma_2(y,z)$$

și interior benzilor

$$(0, y), \quad (0, z) \qquad (21)$$

care verifică următoarele condiții la limită

$$\begin{aligned} & u(x, y, z) = \omega_0(y, z) \\ & \frac{\partial u}{\partial x} = \omega_1(y, z) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}} = \omega_{p-1}(y, z) \end{aligned} \tag{22}$$

pe suprafața $u = \gamma_1(y, z)$, și

$$\begin{aligned} & u(x, y, z) = \theta_0(y, z) \\ & \frac{\partial u}{\partial x} = \theta_1(y, z) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}} = \theta_{p-1}(y, z) \end{aligned} \tag{23}$$

pe suprafața $x = \gamma_2(y, z)$, cît și condițiile inițiale, omogene,

$$\begin{aligned} & \lim_{v \to 0} u(x, y, z) = 0 \\ & \lim_{v \to 0} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \lim_{v \to 0} \frac{\partial^{p-1} u}{\partial y^{p-1}} = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Soluția problemei o căutăm de forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & \sum_{k=0}^{p'} H_{p-2k, \frac{3-2k}{2}}(x, y, z; \varphi_k, \gamma_1) + \sum_{k=0}^{p'} H_{p-2k, \frac{3-2k}{2}}(x, y, z; \psi_k, \gamma_2) + \\ & + \sum_{k-0}^{p'} H_{p-2k+1, \frac{3-2k}{2}}(x, y, z; \varphi_k, \gamma_1) + \sum_{k=0}^{p'} H_{p-2k+1, \frac{3-2k}{2}}(x, y, z; \psi_k, \gamma_2) \end{aligned} \tag{25}$$

unde $p' = \text{întreg}\left(\frac{p-1}{2}\right)$ și

$$H_{p-2k, \frac{3-2k}{2}}(x, y, z; \varphi_k, \gamma_i) = \int_c \varphi_k(\eta, \zeta) \frac{[x - \gamma_i(\eta, \zeta)^{p-2k}}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^{\frac{3-2k}{2}}}$$

$$\exp\left[- \frac{1}{4} \frac{(x - \gamma_i(\eta, \zeta))^2}{G(y, z) - G(\eta, \zeta)} \right] \cdot (Q(\eta, \zeta)\, d\eta - P(\eta, \zeta)\, d\zeta) \tag{26}$$

cu φ_k și ψ_k funcții continue.

Din (6) se vede imediat că toate funcțiile componente ale lui $u(x, y, z)$ sînt soluții ale ecuației

$$E^p(u) = 0,$$

sînt continui în domeniul considerat și satisfac în același timp condițiile inițiale omogene impuse. În plus și derivatele pînă la ordinul $p-2$ în raport cu x sînt continue. Derivata de ordinul $p-1$ este însă discontinuă.

În adevăr, avem

$$\frac{\partial^{p-1} H_{m,n}}{\delta x^{p-1}} = a_0 H_{m-p+1,n} + a_1 H_{m-p+3,n+1} + \ldots + a_{p-1} H_{m+p-1,n+p-1} \quad (27)$$

cu $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ coeficienți numerici, ce pot fi efectiv calculați pentru orice p, ținînd seamă că în derivatele ce intervin apar polinoamele lui Cebîșev-Hermite.

În cazul nostru, dacă luăm $m = p$, $n = \frac{3}{2}$, dezvoltarea (27) va fi

$$a_0 H_{1,\frac{3}{2}} + a_1 H_{3,\frac{5}{2}} + \ldots + a_{p-1} H_{2p-1,\frac{2p+1}{2}}$$

și are toți termenii discontinui, cu discontinuități de prima speță, cărora li se pot aplica formulele generalizate ale lui Holmgren (16) și (17).

Dacă $m = p-1$, $n = \frac{1}{2}$, dezvoltarea (27) este

$$a_0 H_{0,\frac{1}{2}} + a_1 H_{2,\frac{3}{2}} + \ldots + a_{p-1} H_{2p-2,\frac{2p-1}{2}}$$

și toți termenii sînt continui.

În general, dacă $m = p - 2k$, $n = \frac{3-2k}{2}$, atunci derivata de ordinul $p-1$ este

$$a_0 H_{-2k+1,\frac{3-2k}{2}} + a_1 H_{-2k+3,\frac{1-2k}{2}} + \ldots + a_h H_{-2k+2h+1,\frac{3-2k+2h}{2}} + \ldots$$
$$+ \ldots a_{p-1} H_{2p-2k-1,\frac{2p-2k+1}{2}}$$

și deoarece termenii $H_{m,r}$ cu $m < 0$ trebuiesc considerați nuli, urmează că dezvoltarea de mai sus se reduce la

$$a_k H_{1,\frac{3}{2}} + a_{k+1} H_{3,\frac{5}{2}} + \ldots + a_{p-1} H_{2k-2k-1,\frac{2p-2k+3}{2}}$$

cu toți termenii discontinui, cu discontinuități de prima speță cărora se aplică formulele generalizate ale lui Holmgren (16) și (17).

Dacă $m = p - 2k + 1$, $n = \frac{3-2k}{2}$

atunci derivata de ordinul $n-1$ a termenului respectiv va fi

$$a_0 H_{-2k+2,\frac{3-2k}{2}} + a_1 H_{-2k+4,\frac{1-2k}{2}} + \ldots$$

și se vede că toți termenii sînt continui.

Punînd condiţiile la limită impuse funcţiei $u(x, y, z)$, date de (25), obţinem un sistem de $2p$ ecuaţii integrale cu $2p$ funcţii necunoscute, care rezolvate, determină soluţia unică a problemei.

К ИЗУЧЕНИЮ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

II. ИТЕРИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе использованы результаты и обозначения работы [2].

В I главе строится общее решение уравнения

$$L^{n+1}(u) = 0, \tag{1}$$

где L^{n+1} — оператор:

$$L = X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + X_P\frac{\partial}{\partial x_P}, \quad X_k = X_k(x_1, x_2 \ldots x_P),$$

итерированный $n + 1$ раз, которое имеет вид

$$u = \varphi_0 + \rho\varphi_1 + \ldots + \rho^n\varphi_n, \quad L(\rho) = 1, L(\varphi_k) = 0,$$

где φ_k суть функции, дифференцируемые в той же звездной области, в которой определено ρ.

Исследуется единственность разложения и определяются компоненты φ_k (формулы 14), когда ρ и u заданы.

Задача Коши для уравнения (1) решается путем ее сведения к последовательности задач Коши для уравнения $L(v) = \Phi$.

В главе II исследуется уравнение

$$E^{n+1}(u) = 0, \tag{2}$$

где E^{n+1} — итерируемый $n + 1$ раз оператор

$$E = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - Y_1\frac{\partial}{\partial y_1} - Y_2\frac{\partial}{\partial y_2} - \ldots$$

$$- \ldots - Y_m\frac{\partial}{\partial y_m}, \quad Y_k = Y_k(y_1, \ldots, y_m).$$

Решения уравнения (2) имеют вид

$$u = \psi_0 + \rho\psi_1 + \ldots + \rho^n\psi_n, \quad E(\psi_k) = 0,$$

где ρ — решение уравнения

$$Y_1 \frac{\partial \rho}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial \rho}{\partial y_2} + \ldots + Y_m \frac{\partial \rho}{\partial y_m} = 1. \tag{3}$$

Если u и ρ заданы, то ψ_k определены однозначно и имеют вид (17, гл. II).

При помощи результатов более ранней работы автора [2], а также и работы [1] профессора Мирона Николеску, решается задача Коши для $n+1$ раз итерированного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(y, z) \frac{\partial u}{\partial y} - Q(y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

при условии

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

Для уравнения $E^2(u) = 0$ решение дано (38, гл. II).

Далее решается следующая задача: если заданы функции

$$\gamma_0(x_1 z), \gamma_1(x_1 z), \ldots, \gamma_n(x_1 z),$$

непрерывные и удовлетворяющие по x неравенству

$$|\gamma_h(x, z)| < M \exp(k x^2)$$

в области (D), для которой

$$0 < G(y, z) - G(\eta, \zeta) < \frac{1}{4k},$$

то требуется найти решение уравнения

$$E^{n+1}(u) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - P(y, z) \frac{\partial}{\partial y} - Q(y, z) \frac{\partial}{\partial z}\right]^{n+1} u = 0, \tag{4}$$

где

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$\lim_{y \to 0} E^h(u) = \gamma_h(x, z), \quad h = 0,1, \ldots, n.$$

Решение определяется формулой

$$u(x, y, z) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\rho^{n-k}}{Q(y, z)} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha) v(x, y, z; \xi, 0, \alpha) \gamma_{n-k}(\xi, \alpha) \, d\xi,$$

где ρ — решение уравнения (3), обращающееся в нуль при $y = 0$.

В качестве следствия этого результата вводится понятие E-аналитичности.

В последней главе проводится подробное исследование интеграла

$$H_{m,n}(x, y, z; \varphi, \gamma) = \int_c \varphi(\eta, \zeta) \frac{[x - \gamma(\eta, \zeta)]^m}{[G(y, z) - G(\eta, \zeta)]^n} \exp\left[- \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \frac{[x - \gamma(\eta, \zeta)]^2}{G(y, z) - G(\eta, \zeta)} \right] [Q(\eta, \zeta)\, d\eta - P(\eta, \zeta), d\zeta],$$

которое позволяет обощить формулы Холмгрина и решает одновременно общую краевую задачу для уравнения (4), сведя ее к решению системы $2n + 2$ интегральных уравнений.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE

II. ÉQUATIONS ITÉRÉES

RÉSUMÉ

Dans le présent travail on emploie les mêmes résultats et notations que dans le travail [2].

Dans le chapitre I, l'auteur construit la solution générale de l'équation

$$L^{n+1}(u) = 0, \tag{1}$$

où L^{n+1} est l'opérateur

$$L = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + X_P \frac{\partial}{\partial x_p}, \; X_k = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

itéré de $n + 1$ fois. La solution prend la forme

$$u = \varphi_0 + \rho\, \varphi_1 + \ldots + \rho^n \varphi_n, \quad L(\rho) = 1, \quad L(\varphi_k) = 0,$$

avec φ_k fonctions dérivables dans le même domaine étoilé où l'on définit ρ.

Il étudie l'unicité du développement et détermine les composantes φ_k (formules 14) lorsque ρ et u sont donnés.

Il résout ensuite le problème de Cauchy dans le cas de l'équation (1), qu'il réduit à une succession de problèmes de Cauchy dans le cas de l'équation $L(v) = \Phi$.

Dans le chapitre II, il étudie l'équation

$$E^{n+1}(u) = 0 \tag{2}$$

où E^{n+1} est l'opérateur

$$E \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - Y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - \ldots - Y_m \frac{\partial}{\partial y_m}, \; Y_k = Y_k(y_1, \ldots, y_m)$$

itéré de $n + 1$ fois.

La forme développée des solutions de l'équation (2) est

$$u = \psi_0 + \rho \, \psi_1 + \ldots + \rho^n \, \psi_n, \quad E(\psi_k) = 0$$

où ρ est la solution de l'équation

$$Y_1 \frac{\partial \rho}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial \rho}{\partial y_2} + \ldots + Y_m \frac{\partial \rho}{\partial y_m} = 1. \tag{3}$$

Lorsque u et ρ sont données, les valeurs de ψ_k résultent de manière unique et sont données par ((17), chap. II).

En utilisant les résultats d'un de ses travaux antérieurs [2], ainsi que le mémoire du prof. Miron Nicolescu [1], l'auteur donne la solution du problème de Cauchy pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - P(y, x) \frac{\partial u}{\partial y} - Q(y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

avec la liaison

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

itérée de $n + 1$ fois. La solution de l'équation $E^2(u) = 0$ est fournie par ((38), chap. II).

En continuant, l'auteur résout le problème suivant. Etant données les fonctions continues

$$\gamma_0(x, z), \; \gamma_1(x, z), \; \ldots, \; \gamma_n(x, z),$$

qui satisfont, par rapport à x, les inégalités

$$|\gamma_h(x, z)| < M \exp(k, x^2)$$

dans un domaine (D), où

$$0 < G(y, z) - G(\eta, \zeta) < \frac{1}{4k},$$

il faut trouver la solution de l'équation

$$E^{n+1}(u) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - P(y, z) \frac{\partial}{\partial y} - Q(y, z) \frac{\partial}{\partial z} \right]^{n+1} u = 0 \tag{4}$$

où

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

qui satisfait aux conditions initiales

$$\lim_{y \to} E^h(u) = \gamma_h(x, z), \quad h = 0, \ 1, \ \ldots, \ n.$$

La solution est fournie par

$$u(x, y, z) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\rho^{n-k}}{Q(y, z)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} P(0, \alpha)\, v(x, y, z; \xi, 0, \alpha)\, \gamma_{n-k}(\xi, \alpha)\, d\xi$$

où ρ est une solution de l'équation (3), nulle pour $y = 0$.

Une conséquence de ce résultat est l'introduction de la notion d'analyticité «E».

Dans le dernier chapitre, l'auteur fait une étude approfondie de l'intégrale

$$H_{m,n}(x, y, z; \gamma, \varphi) = \int_C \varphi(\eta, \xi) \frac{[x - \gamma(\eta, \zeta)]^m}{[G(y,z) - G(\eta,\zeta)]^n}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{4} \frac{[x - \gamma(\eta, \zeta)]^2}{G(y, z) - G(\eta, \zeta)} \right] [Q(\eta, \zeta) d\eta - P(\eta, \zeta)\, d\zeta].$$

Cette étude permet de généraliser les formules de Holmgren tout en résolvant le problème général aux limites dans le cas de l'équation (4), en le réduisant à la résolution d'un système de $2n + 2$ équations intégrales.

BIBLIOGRAFIE

1. MIRON NICOLESCU, *Ecuația iterată a căldurii*. Studii și cercetări matematice, **V**, *3—4* (1954).
2. MARCEL N. ROȘCULEȚ, *Contribuții la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic. Studiul unei clase de ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi*. Studii și cercetări matematice, **XI**, *1—2 (1960)*.
3. V. I. SMIRNOV, *Curs de matematici superioare*. **IV**. Ed. tehnică, București, 1956.
4. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse. III*, Paris, 1923.
5. MARCEL N. ROȘCULEȚ, *Ecuații cu derivate parțiale, liniare, de ordin oarecare, iterate*. Bul. științific, Acad. R.P.R., **IX**, *1*, 1957.

ASUPRA GRUPURILOR DE MIȘCĂRI ALE ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL DOILEA, ÎN DOUĂ VARIABILE

DE

ANDREI DOBRESCU

1. Acad. G. Vrănceanu, ocupîndu-se de problema geometrizării ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea în două variabile

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

arată [1], utilizînd proprietăți ale sistemului Pfaff asociat

$$\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0, \\ dp - rdx - sdy &= 0, \\ dq - sdx - tdy &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

că grupul de mișcări (de transformări în ea însăși) al unei ecuații (1) cu caracteristice distincte și de al doilea ordin are cel mult 9 parametri, și că ecuațiile care admit grupuri cu 9 parametri pot fi aduse la una din formele

$$\frac{r}{t^3} - \frac{s^2}{t^4} - \frac{1}{12} = 0, \tag{3}$$

$$\left(\frac{r}{t^3} - \frac{2s}{\alpha t^2} + \frac{2}{3\alpha^2}\right)^2 + \frac{8}{9\alpha} \cdot \frac{(2-\alpha)^2}{1-\alpha}\left(\frac{s}{t^2} - \frac{1}{2\alpha}\right)^3 = 0, \tag{4}$$

α fiind o constantă nenulă.

În cele ce urmează, ne propunem problema determinării — pe o cale directă — a grupului de mișcări ale ecuației (1), adaptînd — în acest scop — o metodă pe care acad. Vrănceanu [2] o folosește pentru determinarea grupului de mișcări al sistemului Pfaff asociat unui sistem de două ecuații (1) în involuție. În adevăr, problema determinării grupului de

mişcări al ecuaţiei (1) este aceeaşi cu problema determinării grupului de mişcări al sistemului Pfaff (2) asociat. Vom vedea că transformările infinitezimale ale acestui grup depind de existenţa unei soluţii speciale pentru o anumită ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea. Metoda pe care o utilizăm ne conduce să considerăm de asemenea problema determinării grupului de mişcări al unui sistem de două ecuaţii de forma (1), pentru care ecuaţiile diferenţiale ale direcţiilor caracteristice nu au nici o rădăcină comună, precum şi problema determinării grupului unui sistem de trei ecuaţii de forma (1). Transformările infinitezimale ale fiecăruia din aceste grupuri depind de găsirea unei funcţii φ, soluţie specială a unui anumit sistem de două ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea.

Ca aplicaţie a metodei utilizate, vom determina efectiv grupul de mişcări al ecuaţiei (3).

2. Presupunînd că din (1) am obţinut pe r, s, t ca funcţii de x, y, z, p, q şi alte două variabile u, v:

$$\begin{aligned} r &= r(x, y, z, p, q, u, v), \\ s &= s(x, y, z, p, q, u, v), \\ t &= t(x, y, z, p, q, u, v), \end{aligned} \tag{5}$$

putem considera drept variabile ale sistemului Pfaff (2), asociat ecuaţiei (1), variabilele x, y, z, p, q, u, v.

Transformările infinitezimale ale grupului de mişcări al sistemului (2) fiind de forma

$$x' = x + \xi,\ y' = y + \eta,\ z' = z + \zeta,\ p' = p + \pi,\ q' = q + \varkappa,$$
$$u' = u + \theta,\ v' = v + \omega,$$

unde funcţiile ξ, η, ..., ω — de variabilele x, y, ..., v — sînt considerate (datorită prezenţei parametrilor grupului) drept cantităţi de primul ordin, deducem că trebuie să avem

$$\begin{aligned} &d\zeta - p\,d\xi - q\,d\eta - \pi dx - x\,dy = 0, \\ &d\pi - r\,d\xi - s\,d\eta - \sum \xi r_x\,dx - \sum \xi s_x\,dy = 0, \\ &d\varkappa - s\,d\xi - t\,d\eta - \sum \xi s_x\,dx - \sum \xi t_x\,dy = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

unde

$$\begin{aligned} \sum \xi r_x &= \xi r_x + \eta r_y + \ldots + \omega r_v, \\ \sum \xi s_x &= \xi s_x + \eta s_y + \ldots + \omega s_v, \\ \sum \xi t_x &= \xi t_x + \eta t_y + \ldots + \omega t_v, \end{aligned}$$

iar indicii $x, y, \ldots, v$ indică derivate parţiale în raport cu variabilele x, y, ..., v respectiv.

Ţinînd seama de (2), (6) se scriu

$$
\begin{aligned}
&(\zeta_x - p\xi_x - q\eta_x - \pi)\,dx + (\zeta_y - p\xi_y - q\eta_y - \varkappa)\,dy + \\
&(\zeta_z - p\xi_z - q\eta_z)(pdx + qdy) + (\zeta_p - p\xi_p - q\eta_p)(rdx + sdy) + \\
&(\zeta_q - p\xi_q - q\eta_q)(sdx + tdy) + (\zeta_u - p\xi_u - q\eta_u)\,du + (\zeta_v - p\xi_v - q\eta_v)\,dv = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\pi_x - r\xi_x - s\eta_x - \textstyle\sum \xi r_x)\,dx + (\pi_y - r\xi_y - s\eta_y - \sum \xi s_x)\,dy + \\
&(\pi_z - r\xi_z - s\eta_z)(pdx + qdy) + (\pi_p - r\xi_p - s\eta_p)(rdx + sdy) + \\
&(\pi_q - r\xi_q - s\eta_q)(sdx + tdy) + (\pi_u - r\xi_u - s\eta_u)\,du + (\pi_v - r\xi_v - s\eta_v)\,dv = 0,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\varkappa_x - s\xi_x - t\eta_x - \textstyle\sum \xi s_x)\,dx + (\varkappa_y - s\xi_y - t\eta_y - \sum \xi t_x)\,dy + \\
&(\varkappa_z - s\xi_z - t\eta_z)(pdx + qdy) + (\varkappa_p - s\xi_p - t\eta_p)(rdx + sdy) + \\
&(\varkappa_q - s\xi_q - t\eta_q)(sdx + tdy) + (\varkappa_u - s\xi_u - t\eta_u)\,du + (\varkappa_v - s\xi_v - t\eta_v)\,dv = 0.
\end{aligned}
$$

Dacă introducem operatorii*)

$$D_x f = f_x + pf_z + rf_p + sf_q, \quad D_y f = f_y + qf_z + sf_p + tf_q,$$

şi ţinem seamă că (7) sînt identităţi în dx, dy, du, dv, obţinem relaţiile

$$
\begin{aligned}
&D_x\zeta - pD_x\xi - qD_x\eta - \pi = 0, && \zeta_u - p\xi_u - q\eta_u = 0,\\
&D_y\zeta - pD_y\xi - qD_y\eta - \varkappa = 0, && \zeta_v - p\xi_v - q\eta_v = 0,\\
&D_x\pi - rD_x\xi - sD_x\eta - \textstyle\sum \xi r_x = 0, && \pi_u - r\xi_u - s\eta_u = 0,\\
&D_y\pi - rD_y\xi - sD_y\eta - \textstyle\sum \xi s_x = 0, && \pi_v - r\xi_v - s\eta_v = 0,\\
&D_x\varkappa - sD_x\xi - tD_x\eta - \textstyle\sum \xi s_x = 0, && \varkappa_u - s\xi_u - t\eta_u = 0,\\
&D_x\varkappa - sD_y\xi - tD_y\eta - \textstyle\sum \xi t_x = 0, && \varkappa_v - s\xi_v - t\eta_v = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Să punem

$$\zeta - p\xi - q\eta = \varphi. \tag{9}$$

Deducem

$$\zeta_u - p\xi_u - q\eta_u = \varphi_u, \quad \zeta_v - p\xi_v - q\eta_v = \varphi_v,$$

de unde, ţinînd seama de primele două relaţii (8) din dreapta, rezultă

$$\varphi_u = \varphi_v = 0.$$

Prin urmare *funcţia φ nu depinde de u şi v.*

Aplicînd relaţiei (9) operatorul D_x şi ţinînd seamă că

$$D_x p = r, \quad D_x q = s,$$

---

*) Unii autori indică aceşti operatori respectiv prin notaţiile $\left(\frac{df}{dx}\right)$, $\left(\frac{df}{dy}\right)$ sau $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ sau încă $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$.

deducem

$$D_x\zeta - pD_x\xi - qD_x\eta - r\xi - s\eta = D_x\varphi,$$

de unde, în virtutea primei relații (8) din stînga, rezultă

$$\pi = r\xi + s\eta + D_x\varphi. \tag{10}$$

Aplicînd de asemenea operatorul D_y relației (9) și ținînd seamă de relațiile

$$D_y p = s, \quad D_y q = s$$

și de a doua relație (8) din stînga, obținem

$$\varkappa = s\xi + t\eta + D_y\varphi. \tag{11}$$

Dacă procedăm cu (10) și cu (11) ca și cu (9) și ținem seamă de ultimele patru relații (8) din stînga, rezultă relațiile

$$\begin{aligned}
\sum \xi r_x &= \xi D_x r + \eta D_x s + D_x^2\varphi,\\
\sum \xi s_x &= \xi D_y r + \eta D_y s + D_y D_x\varphi,\\
\sum \xi s_x &= \xi D_x s + \eta D_x t + D_x D_y\varphi,\\
\sum \xi t_x &= \xi D_y s + \eta D_y t + D_y^2\varphi,
\end{aligned} \tag{12}$$

unde

$$D_x^2\varphi = D_x(D_x\varphi),\ D_y D_x\varphi = D_y(D_x\varphi),\ D_x D_y\varphi = D_x(D_y\varphi),\ D_y^2\varphi = D_y(D_y\varphi).$$

Din (10) și (11), derivînd în raport cu u și v și ținînd seamă de ultimele patru relații (8) din dreapta și de relațiile

$$\begin{aligned}
(D_x\varphi)_u &= r_u\varphi_p + s_u\varphi_q, & (D_x\varphi)_v &= r_v\varphi_p + s_v\varphi_q,\\
(D_y\varphi)_u &= s_u\varphi_p + t_u\varphi_q, & (D_y\varphi)_v &= s_v\varphi_p + t_v\varphi_q,
\end{aligned}$$

deducem

$$\begin{aligned}
(\xi + \varphi_p)\, r_u + (\eta + \varphi_q)\, s_u &= 0,\\
(\xi + \varphi_p)\, r_v + (\eta + \varphi_q)\, s_v &= 0,\\
(\xi + \varphi_p)\, s_u + (\eta + \varphi_q)\, t_u &= 0,\\
(\xi + \varphi_p)\, s_v + (\eta + \varphi_q)\, t_v &= 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Relațiile (12) putînd fi scrise sub forma

$$\begin{aligned}
\theta r_u + \omega r_v &= \xi D_x r + \eta D_x s + D_x^2\varphi - \xi r_x - \eta r_y - \zeta r_z - \pi r_p - \varkappa r_q,\\
\theta s_u + \omega s_v &= \xi D_y r + \eta D_y s + D_y D_x\varphi - \xi s_x - \eta s_y - \zeta s_z - \pi s_p - \varkappa s_q,\\
\theta s_u + \omega s_v &= \xi D_x s + \eta D_x t + D_x D_y\varphi - \xi s_x - \eta s_y - \zeta s_z - \pi s_p - \varkappa s_q,\\
\theta t_u + \omega t_v &= \xi D_y s + \eta D_y t + D_y^2\varphi - \xi t_x - \eta t_y - \zeta t_z - \pi t_p - \varkappa t_q,
\end{aligned} \tag{14}$$

sîntem conduşi să distingem trei cazuri, după cum rangul matricii

$$M = \left\| \begin{matrix} r_u & s_u & t_u \\ r_v & s_v & t_v \end{matrix} \right\|$$

este 2, 1 sau zero.

În cazul cînd rangul matricii M este 2, din (13) deducem

$$\begin{aligned} \xi &= -\varphi_p, \\ \eta &= -\varphi_q, \end{aligned} \tag{15}$$

încît din (9), (10) şi (11) rezultă

$$\begin{aligned} \zeta &= \varphi - p\varphi_p - q\varphi_q, \\ \pi &= D_x\varphi - r\varphi_p - s\varphi_q \equiv \varphi_x + p\varphi_z, \\ \varkappa &= D_y\varphi - s\varphi_p - t\varphi_q \equiv \varphi_y + q\varphi_z. \end{aligned} \tag{16}$$

În ce priveşte a doua şi a treia relaţie (14), se constată că membrii din dreapta sînt identici, încît (14) constituie un sistem de trei ecuaţii liniare în θ şi ω. Condiţia de compatibilitate a acestui sistem este

$$\begin{vmatrix} r_u & r_v & D_x^2\varphi + \varphi_p(r_x - D_x r) + \varphi_q(r_y - D_x s) - \zeta r_z - \pi r_p - \varkappa r_q \\ s_u & s_v & D_y D_x\varphi + \varphi_p(s_x - D_y r) + \varphi_q(s_y - D_y s) - \zeta s_z - \pi s_p - \varkappa s_q \\ t_u & t_v & D_y^2\varphi + \varphi_p(t_x - D_y s) + \varphi_q(t_y - D_y t) - \zeta t_z - \pi t_p - \varkappa t_q \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

unde ζ, π, $\varkappa$ sînt date de (16).

Relaţia (17) este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea în funcţia necunoscută φ, şi problema ce urmează să fie rezolvată — în continuare — este de a vedea dacă această ecuaţie admite soluţii φ ce depind numai de x, y, z, p, q, deci soluţii ce nu depind de u şi v.

Odată obţinută soluţia cea mai generală φ a ecuaţiei (17), funcţie numai de variabilele x, y, z, p, q, relaţiile (15), (16) şi (14) permit exprimarea — cu ajutorul acestor variabile şi variabilelor u, v — a funcţiilor $\xi, \eta, \ldots, \omega$, care determină grupul căutat.

Avem deci teorema :

Grupul de mişcări al unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea (1) *depinde de soluţia cea mai generală* φ *— funcţie numai de variabilele* x, y, z, p, q *— a ecuaţiei* (17).

3. Dacă rangul matricii M este 1, atunci r, s, t — date de (5) — verifică, pe lîngă ecuaţia (1), încă o ecuaţie

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{18}$$

În acest caz, r, s, t depind de fapt de 6 variabile : x, y, z, p, q şi o altă variabilă u.

Funcțiile ξ, η, ζ, π, $\varkappa$, θ, ale grupului sistemului Pfaff (2) asociat sistemului (1), (18), verifică relațiile (8) din stînga și relațiile

$$\begin{aligned} \zeta_u - p\xi_u - q\eta_u &= 0, \\ \pi_u - r\xi_u - s\eta_u &= 0, \\ \varkappa_u - s\xi_u - t\eta_u &= 0. \end{aligned} \tag{8'}$$

Funcția φ, introdusă prin relația (9), nu depinde de u.

Relațiile (10), (11), (12) subsistă, pe cînd (13) se reduc la relațiile

$$\begin{aligned} (\xi + \varphi_p)\, r_u + (\eta + \varphi_q)\, s_u &= 0, \\ (\xi + \varphi_p)\, s_u + (\eta + \varphi_q)\, t_u &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Presupunînd că avem

$$\begin{vmatrix} r_u & s_u \\ s_u & t_u \end{vmatrix} \neq 0, \tag{20}$$

din (19) rezultă relațiile (15).

Primii membri ai relațiilor (14) (care se reduc la trei distincte) sînt θr_u, θs_u, θt_u. Rezultă că funcția φ este determinată prin condițiile

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} r_u & D_x^2\varphi + \varphi_p (r_x - D_x r) + \varphi_q (r_y - D_x s) - \zeta r_z - \pi r_p - \varkappa r_q \\ s_u & D_y D_x \varphi + \varphi_p (s_x - D_y r) + \varphi_q (s_y - D_y s) - \zeta s_z - \pi s_p - \varkappa s_q \end{vmatrix} = 0, \\ &\begin{vmatrix} s_u & D_y D_x \varphi + \varphi_p (s_x - D_y r) + \varphi_q (s_y - D_y s) - \zeta s_z - \pi s_p - \varkappa s_q \\ t_u & D_y^2 \varphi + \varphi_p (t_x - D_y s) + \varphi_q (t_y - D_y t) - \zeta t_z - \pi t_p - \varkappa t_q \end{vmatrix} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

unde ζ, π, $\varkappa$ sînt date de (16).

Putem interpreta condiția (20), observînd că, din (1) și (18), unde presupunem că am înlocuit pe r, s, t prin expresiile lor în funcție de x, y, z, p, q, u, obținem prin derivare relațiile

$$\begin{aligned} Rr_u + Ss_u + Tt_u &= 0, \\ R_1 r_u + S_1 s_u + T_1 t_u &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

unde am pus ca de obicei

$$\begin{aligned} R = F_r,\ S = F_s,\ T = F_t, \\ R_1 = F_{1r},\ S_1 = F_{1s},\ T_1 = F_{1t}. \end{aligned}$$

Excluzînd din considerație cazul cînd determinanții

$$\begin{vmatrix} R & S \\ R_1 & S_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S & T \\ S_1 & T_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} T & R \\ T_1 & R_1 \end{vmatrix}$$

sînt toți nuli, ceea ce caracterizează integralele singulare ale sistemului (1), (18), din (22) rezultă

$$\frac{r_u}{\begin{vmatrix} S & T \\ S_1 & T_1 \end{vmatrix}} = \frac{s_u}{\begin{vmatrix} T & R \\ T_1 & R_1 \end{vmatrix}} = \frac{t_u}{\begin{vmatrix} R & S \\ R_1 & S_1 \end{vmatrix}}. \tag{23}$$

Indicînd prin λ valoarea — finită și diferită de zero — a rapoartelor din relațiile (23), deducem

$$\begin{vmatrix} r_u & s_u \\ s_u & t_u \end{vmatrix} = \lambda^2 \left(\begin{vmatrix} R & S \\ R_1 & S_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} S & T \\ S_1 & T_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} R & T \\ R_1 & T_1 \end{vmatrix}^2 \right) = \lambda^2 \begin{vmatrix} R & S & T & 0 \\ 0 & R & S & T \\ R_1 & S_1 & T_1 & 0 \\ 0 & R_1 & S_1 & T_1 \end{vmatrix}.$$

Înseamnă că (20) exprimă că ecuațiile

$$\begin{aligned} R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 &= 0, \\ R_1 dy^2 - S_1 dx\,dy + T_1 dx^2 &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

care dau direcțiile tangentelor caracteristicelor celor două ecuații (1) și (18), nu au nici o rădăcină comună.

Prin urmare putem enunța teorema :

Grupul de mișcări al unui sistem (1), (18), *pentru care ecuațiile* (24) *nu au nici o rădăcină comună, depinde de soluția cea mai generală* φ — *funcție numai de variabilele* x, y, z, p, q — *a sistemului* (21).

4. Să presupunem însfîrșit că rangul matricii M este zero, ceea ce înseamnă că r, s, t, date de (5), nu depind de fapt de alte variabile în afară de x, y, z, p, q.

De astă-dată, sistemul Pfaff (2) este asociat unui sistem format din ecuația (1) și alte două ecuații

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0, \\ F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Presupunînd că avem

$$\begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t \\ F_{1r} & F_{1s} & F_{1t} \\ F_{2r} & F_{2s} & F_{2t} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{26}$$

din (1), (25) putem deduce pe r, s, t în funcție de x, y, z, p, q :

$$r = r(x, y, z, p, q), \quad s = s(x, y, z, p, q), \quad t = t(x, y, z, p, q),$$

încît sistemul (1), (25), căruia-i este asociat sistemul Pfaff (2), este un sistem cu diferențiale totale.

Relațiile (8) din stînga, verificate de funcțiile $\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa$ ale grupului sistemului Pfaff (2), subsistă.

Introducînd ca mai sus funcția φ prin relația (9), relațiile (10) și (11) subsistă de asemenea. În ce privește relațiile (12), acestea se reduc, ținînd seamă de (9), (10) și (11), la relațiile

$$\begin{aligned}
&(D_y r - D_x s)\,\eta = D_x^2\varphi - r_p D_x\varphi - r_q D_y\varphi - r_z\varphi,\\
&(D_x s - D_y r)\,\xi = D_y D_x\varphi - s_p D_x\varphi - s_q D_y\varphi - s_z\varphi,\\
&(D_y s - D_x t)\,\eta = D_x D_y\varphi - s_p D_x\varphi - s_q D_y\varphi - s_z\varphi,\\
&(D_x t - D_y s)\,\xi = D_y^2\varphi - t_p D_x\varphi - t_q D_y\varphi - t_z\varphi.
\end{aligned} \tag{27}$$

Dacă

$$(D_y r - D_x s)^2 + (D_y s - D_x t)^2 \neq 0, \tag{28}$$

funcția φ este determinată prin condițiile

$$\begin{vmatrix} D_y r - D_x s & D_x^2\varphi - r_p D_x\varphi - r_q D_y\varphi - r_z\varphi \\ D_y s - D_x t & D_x D_y\varphi - s_p D_x\varphi - s_q D_y\varphi - s_z\varphi \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} D_y r - D_x s & D_y D_x\varphi - s_p D_x\varphi - s_q D_y\varphi - s_z\varphi \\ D_y s - D_x t & D_y^2\varphi - t_p D_x\varphi - t_q D_y\varphi - t_z\varphi \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Dacă însă avem

$$D_y r - D_x s = D_y s - D_x t = 0, \tag{30}$$

funcția φ trebuie determinată prin condițiile

$$\begin{aligned}
&D_x^2\varphi - r_p D_x\varphi - r_q D_y\varphi - r_z\varphi = 0,\\
&D_y D_x\varphi - s_p D_x\varphi - s_q D_y\varphi - s_z\varphi = 0,\\
&D_x D_y\varphi - s_p D_x\varphi - s_q D_y\varphi - s_z\varphi = 0,\\
&D_y^2\varphi - t_p D_x\varphi - t_q D_y\varphi - t_z\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Prin urmare avem teorema:

Grupul de mișcări al unui sistem (1), (25), *pentru care sînt îndeplinite condițiile* (26) *și* (28), *depinde de soluția cea mai generală* φ *a sistemului* (29). *Dacă — în locul condiției* (28) *— sînt îndeplinite condițiile* (30), *grupul de mișcări depinde de soluția cea mai generală* φ *a sistemului* (31).

5. Ne propunem acum să aplicăm considerațiile precedente la determinarea efectivă a grupului de mișcări al ecuației (3).

Dacă schimbăm pe r și t — deci variabilele x și y — între ele, ecuația (3) se scrie

$$t = \frac{r^3}{12} + \frac{s^2}{r}. \tag{32}$$

Considerînd ca variabile u și v pe r și s respectiv, avem

$$D_x r = D_y r = D_x s = D_y s = 0,$$

şi ecuaţia (17) devine

$$t_r D_x^2 \varphi + t_s D_y D_x \varphi = D_y^2 \varphi. \tag{33}$$

Avem

$$D_x^2 \varphi = \varphi_{xx} + p\varphi_{xz} + r\varphi_{xp} + s\varphi_{xq} + p(\varphi_{zx} + p\varphi_{zz} + r\varphi_{zp} + s\varphi_{zq}) +$$
$$+ r(\varphi_{px} + p\varphi_{pz} + r\varphi_{pp} + s\varphi_{pq}) + s(\varphi_{qx} + p\varphi_{qz} + r\varphi_{qp} + s\varphi_{qq}) + s\varphi_z,$$
$$D_y D_x \varphi = \varphi_{xy} + q\varphi_{xz} + s\varphi_{xp} + t\varphi_{xq} + p(\varphi_{zy} + q\varphi_{zz} + s\varphi_{zp} + t\varphi_{zq}) +$$
$$+ r(\varphi_{py} + q\varphi_{pz} + s\varphi_{pp} + t\varphi_{pq}) + s(\varphi_{qy} + q\varphi_{qz} + s\varphi_{qp} + t\varphi_{qq}) + s\varphi_z,$$
$$D_y^2 \varphi = \varphi_{yy} + q\varphi_{yz} + s\varphi_{yp} + t\varphi_{yq} + q(\varphi_{zy} + q\varphi_{zz} + s\varphi_{zp} + t\varphi_{zq}) +$$
$$+ s(\varphi_{py} + q\varphi_{pz} + s\varphi_{pp} + t\varphi_{pq}) + t(\varphi_{qy} + q\varphi_{qz} + s\varphi_{qp} + t\varphi_{qq}) + s\varphi_z,$$

încît, punînd pentru prescurtare

$$f_x + pf_z = \Delta_x f, \quad f_y + qf_z = \Delta_y f \tag{34}$$

şi ţinînd seamă de (32) şi de expresiile derivatelor parţiale t_r şi t_s :

$$t_r = \frac{r^2}{4} - \frac{s^2}{r^2} = \frac{r^4 - 4s^2}{4r^2},$$

$$t_s = \frac{2s}{r},$$

(33) se scrie

$$36(r^4 - 4s^2)(\Delta_x \varphi_x + p\Delta_x \varphi_z + 2r\Delta_x \varphi_p + 2s\Delta_x \varphi_q + r^2 \varphi_{pp} +$$
$$+ 2rs\varphi_{pq} + s^2 \varphi_{qq} + r\varphi_z) + 288rs[\Delta_x \varphi_y + q\Delta_x \varphi_z + r\Delta_y \varphi_p +$$
$$+ s(\Delta_x \varphi_p + \Delta_y \varphi_q) + rs\varphi_{pp} + s^2 \varphi_{pq} + s\varphi_z] +$$
$$+ 24s(r^4 + 12s^2)(r\varphi_{pq} + s\varphi_{qq} + \Delta_x \varphi_q) =$$
$$= 144r^2(\Delta_y \varphi_y + q\Delta_y \varphi_z + 2s\Delta_y \varphi_q + s^2 \varphi_{qq}) +$$
$$+ 12r(r^4 + 12s^2)(2\Delta_y \varphi_q + 2p\varphi_{pq} + \varphi_z) + (r^4 + 12s^2)^2 \varphi_{qq}.$$

Cum — în raport cu r şi s — aceasta este o identitate (deoarece φ nu depinde de r şi s), egalînd termenii de acelaşi grad în r şi s, din ambii membri, obţinem relaţiile

$$\varphi_{pp} = 0, \quad \varphi_{pq} = 0, \quad \varphi_{qq} = 0, \tag{35}$$
$$3\Delta_x \varphi_p + \varphi_z = \Delta_y \varphi_q, \tag{36}$$
$$\Delta_x \varphi_q = 0, \tag{37}$$
$$\Delta_x \varphi_x + p\Delta_x \varphi_z = 0, \tag{38}$$
$$\Delta_x \varphi_y + q\Delta_x \varphi_z = 0, \tag{39}$$
$$\Delta_y \varphi_y + q\Delta_y \varphi_z = 0, \tag{40}$$

care constituie un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea în raport cu funcția necunoscută φ.

Din (35) se vede că funcția φ este liniară în p și q :

$$\varphi = \alpha(x, y, z)\, p + \beta(x, y, z)\, q + \gamma(x, y, z).$$

Deoarece $\varphi_q = \beta$, și deci

$$\varphi_{qx} = \beta_x, \quad \varphi_{qz} = \beta_z,$$

(37) se scrie, în virtutea primei relații (34) :

$$\beta_x + p\beta_z = 0,$$

de unde rezultă

$$\beta_x = \beta_z = 0.$$

Înseamnă că β *nu depinde de* x *și* z.

Ținînd seamă de prima relație (34), (38) se scrie

$$\alpha_{xx} p + \gamma_{xx} + 2p(\alpha_{xz} p + \gamma_{xz}) + p^2(\alpha_{zz} p + \gamma_{zz}) = 0,$$

prin urmare avem

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= 0, \\ \alpha_{xx} + 2\gamma_{xz} &= 0, \\ 2\alpha_{xz} + \gamma_{zz} &= 0, \\ \alpha_{zz} &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Din prima și ultima ecuație (41), rezultă că α și γ sînt liniare în z și x respectiv :

$$\alpha = \lambda(x, y)\, z + \mu(x, y), \quad \gamma = \rho(y, z)\, x + \sigma(y, z).$$

Avem astfel

$$\Delta_y \varphi_y \equiv \varphi_{yy} + q\varphi_{yz} = (\lambda_{yy} z + \mu_{yy})\, p + \beta_{yy} q + \rho_{yy} x + \sigma_{yy} + q(\lambda_y p + \rho_{yz} x + \sigma_{yz}),$$

$$\Delta_y \varphi_z \equiv \varphi_{zy} + q\varphi_{zz} = \lambda_y p + \rho_{yz} x + \sigma_{yz} + q(\rho_{zz} x + \sigma_{zz}),$$

încît (40) devine

$$(\lambda_{yy} z + \mu_{yy})\, p + \beta_{yy} q + \rho_{yy} x + \sigma_{yy} + q(\lambda_y p + \rho_{yz} x + \sigma_{yz}) + q[\lambda_y p + \rho_{yz} x + \sigma_{yz} + q(\rho_{zz} x + \sigma_{zz})] = 0,$$

iar de aici obținem

$$\lambda_y = 0, \quad \lambda_{yy} = 0, \quad \mu_{yy} = 0, \tag{42}$$

$$\rho_{yy} = 0, \quad \rho_{yz} = 0, \quad \rho_{zz} = 0, \tag{43}$$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \tag{44}$$

$$\beta_{yy} + 2\sigma_{yz} = 0. \tag{45}$$

În virtutea primei ecuații (42), λ *nu depinde de* y, pe cînd, în virtutea celei de-a treia ecuații (42), μ este de forma

$$\mu = \mu'(x)\, y + \mu''(x).$$

În ce privește funcțiile ρ și σ, ecuațiile (43) și (44) ne arată că avem

$$\rho = cy + c'z + c'',$$
$$\sigma = dyz + d'y + d''z + d''',$$

$c, c', c'', d, d', d'', d'''$ fiind constante, astfel încît din (45) rezultă

$$\beta = -dy^2 + ey + f,$$

e și f fiind alte constante.

Deducem

$$\Delta_x \varphi_y \equiv \varphi_{yx} + p\varphi_{yz} = \mu_x' p + c + dz,$$
$$\Delta_x \varphi_z \equiv \varphi_{zx} + p\varphi_{zz} = \lambda_x p + c',$$

încît (39) devine

$$\mu_x' p + c + dp + q(\lambda_x p + c') = 0,$$

iar de aici rezultă

$$c = c' = 0, \tag{46}$$

precum și

$$\mu_x' + d = 0, \quad \lambda_x = 0,$$

deci

$$\mu' = -dx + h, \quad \lambda = a, \tag{47}$$

a și h fiind constante.

Mai avem de utilizat ecuația (36), ceea ce ne va permite determinarea funcției $\mu''(x)$.

Avem, ținînd seamă de (46) și (47):

$$\varphi_z = ap + dy + d'',$$
$$\varphi_p = az + (h - dx)\, y + \mu'',$$
$$\varphi_q = -dy^2 + ey + f,$$
$$\varphi_{px} = -dy + \mu_x'', \quad \varphi_{pz} = a,$$
$$\varphi_{qy} = -2dy + e, \quad \varphi_{qz} = 0,$$

astfel încît (36) se scrie

$$4ap^4 + 3\mu_x'' + d'' = e,$$

de unde

$$a = 0,$$
$$3\mu_x'' + d'' = e,$$

deci

$$\mu'' = \frac{1}{3}(e - d'')\, x + b,$$

b fiind o constantă.

Se constată că a doua şi a treia ecuaţie (41) sînt verificate de funcţiile α şi γ ale căror expresii rezultă din cele de mai sus.

În definitiv, punînd a, b, c, d, e, h, k, l în loc de d''', c'', d', d'', b, d, e, h respectiv, φ este polinomul

$$\varphi = a + b\,x + cy + dz + ep + fq +$$
$$+ hyz + \frac{1}{3}(k - d)\,xp + lyp + kyq - hxyp - hy^2 q \qquad (48)$$

Ţinînd seamă de (15) şi (16), precum şi, în virtutea faptului că am considerat ca variabile u şi v pe r şi s respectiv, primele două relaţii (14) relative la ecuaţia (32) devin

$$\theta = D_x^2 \varphi, \quad \omega = D_y D_x \varphi,$$

găsim că funcţiile ξ, η, ..., ω, care determină grupul G_9 al ecuaţiei (32), sînt date de formulele

$$\xi = -e + \frac{1}{3}(d - k)\,x - ly + hxy,$$
$$\eta = -f - ky + hy^2,$$
$$\zeta = a + bx + cy + dz + hyz,$$
$$\pi = b + \frac{1}{3}(2d + k)\,p, \qquad (49)$$
$$\varkappa = c + hz + lp + (d + k)\,q - h\,(xp + yq),$$
$$\theta = \frac{1}{3}(d + 2k)\,r - hyr,$$
$$\omega = lr + \frac{2}{3}(d + 2k)\,s - h\,(xr + 2ys).$$

În consecință, operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului G_9 sînt

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_2 = x\frac{df}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}, \quad X_3 = y\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q},$$

$$X_4 = \frac{1}{3}x\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{2}{3}p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial s}{\partial q} + \frac{1}{3}r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2}{3}e\frac{\partial f}{\partial s},$$

$$X_5 = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_6 = -\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{50}$$

$$X_7 = -\frac{1}{3}x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{3}p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{2}{3}r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{4}{3}s\frac{\partial f}{\partial s},$$

$$X_8 = xy\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + yz\frac{\partial f}{\partial z} + (z - xp - yq)\frac{\partial f}{\partial q} - yr\frac{\partial f}{\partial r} - (xr + 2ys)\frac{\partial f}{\partial s},$$

$$X_9 = -y\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial q} + r\frac{\partial f}{\partial s},$$

astfel încît grupul are structura

$$(X_1 X_2) = 0, \quad (X_1 X_3) = 0, \quad (X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = 0,$$
$$(X_1 X_6) = 0, \quad (X_1 X_7) = 0, \quad (X_1 X_8) = X_3, \quad (X_1 X_9) = 0,$$
$$(X_2 X_3) = 0, \quad (X_2 X_4) = \frac{2}{3}X_2, \quad (X_2 X_5) = X_1,$$
$$(X_2 X_6) = 0, \quad (X_2 X_7) = \frac{1}{3}X_2, \quad (X_2 X_8) = 0, \quad (X_2 X_9) = X_3,$$
$$(X_3 X_4) = X_3, \quad (X_3 X_5) = 0,$$
$$(X_3 X_6) = X_1, \quad (X_4 X_7) = X_3, \quad (X_3 X_8) = 0, \quad (X_3 X_9) = 0, \tag{51}$$
$$(X_4 X_5) = -\frac{1}{3}X_5,$$
$$(X_4 X_6) = 0, \quad (X_4 X_7) = 0, \quad (X_4 X_8) = 0, \quad (X_4 X_9) = -\frac{1}{3}X_9,$$
$$(X_5 X_6) = 0, \quad (X_5 X_7) = -\frac{1}{3}X_5, \quad (X_5 X_8) = X_9, \quad (X_5 X_9) = 0,$$
$$(X_6 X_7) = X_6, \quad (X_6 X_8) = -X_4 + 2X_7, \quad (X_6 X_9) = X_5,$$
$$(X_7 X_8) = -X_8, \quad (X_7 X_9) = -\frac{2}{3}X_9,$$
$$(X_8 X_9) = 0.$$

Grupul G_9 este *neintegrabil perfect*, deoarece admite subgrupuri invariante (de exemplu grupul abelian al operatorilor X_1, X_2, X_3), iar rangul matricii $\| c_{kl}^1 \dots c_{kl}^9 \| \, (k, l = 1, \dots, 9)$ este 9.

О ГРУППАХ ДВИЖЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор рассматривает задачу определения прямым способом группы движений уравнения (1).

Использованный метод приводит также к рассмотрению задачи определения группы движений системы (1), (18) и группы системы (1), (25).

Предполагается, что r, s, t, получены из (1) как функции переменных x, y, z, p, q и других двух переменных u, v.

Бесконечно малые преобразования группы движений уравнения (1), совпадающей с группой движений присоединенной системы Пфаффа, (2) представляются в виде

$$x' = x + \xi,\ y' = y + \eta,\ z' = z + \zeta,\ p' = p + \pi,\ q' = q + \varkappa,\ u' = u + \theta,$$
$$v' = v + \omega,$$

затем вводятся операторы

$$D_x f = f_x + p f_z + r f_p + s f_q, \quad D_y = f_y + q f_z + s f_p + t f_q,$$

где $f_x, \dots, f_q$ — частные производные функции f по $x, \dots, q$ и устанавливается, что функции $\xi, \dots, \omega$ определяются системой (8).

Далее рассматривается функция φ, определяемая (9) и доказывается, что φ не зависит от u, v, и что имеют место соотношения (10), (11), (13) и (14).

Получены теоремы:

Группа движений уравнения в частных производных второго порядка (1) *зависит от наиболее общего решения* φ, *уравнения* (17), *являющегося функцией только от переменных* x, y, z, p, q.

Группа движений системы (1), (18), *для которой уравнения* (24) *не имеют общих корней, зависит от наиболее общего решения* φ *системы* (21), *являющегося функцией только от переменных* x, y, z, p, q.

Группа движений системы (1), (25), для *которой удовлетворяются условия* (26) и (28), *зависит от наиболее общего решения* φ *системы* (29). *Если вместо условий* (28) *выполняются условия* (30), *то группа зависит от наиболее общего решения* φ *системы* (31).

В заключение, определяется эффективно группа движений уравнения (32), являющегося одним из двух видов, к которым приводимы

уравнения (1), допускающие 9-параметрические группы движений [1]. Устанавливается, что φ—многочлен, выражаемый формулой (48), коэффициенты которого зависят от девяти постоянных, а функции $\xi, \eta, \ldots, \omega$ определяются формулами (49). Оказывается, что операторы группы G_9 уравнения (32) определяются (50), а структурные уравнения этой—*не вполне интегрируемой*—группы суть (51).

SUR LES GROUPES DE MOUVEMENTS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE, EN DEUX VARIABLES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur considère le problème de la détermination, par une voie directe, du groupe de mouvements de l'équation aux dérivées partielles (1), identique avec le groupe de mouvements du système Pfaff associé (2).

La méthode utilisée conduit également à considérer le problème de la détermination du groupe de mouvements d'un système (1), (18) et du groupe d'un système (1), (25).

On suppose que, de (1), on ait obtenu r, s, t comme fonctions de x, y, z, p, q et de deux nouvelles variables u, v.

Les transformations infinitésimales du groupe de mouvements du système (2) étant de la forme

$$x' = x + \xi,\ y' = y + \eta,\ z' = z + \zeta,\ p' = p + \pi,\ q' = q + \varkappa,$$
$$u' = u + \theta,\ v' = v + \omega,$$

et en introduisant les opérateurs

$$D_x f = f_x + pf_z + rf_p + sf_q,\ D_y = f_y + qf_z + sf_p + tf_q,$$

où $f_x, \ldots, f_q$ sont les dérivées partielles de la fonction f par rapport à $x, \ldots, q$, on trouve que les fonctions $\xi, \ldots, \omega$ sont déterminées par le système (8).

On considère ensuite la fonction φ, donnée par (9), et on montre que φ est indépendante de u, v, et qu'on a les relations (10), (11), (13) et (14).

On arrive aux théorèmes :

Le groupe de mouvements d'une équation aux dérivées partielles du second ordre (1) *dépend de la solution la plus générale* φ *— fonction des variables* x, y, z, p, q *seulement — de l'équation* (17),

Le groupe de mouvements d'un système (1), (18), *tel que les équations* (24) *n'aient aucune racine commune, dépend de la solution la plus générale* φ *— fonction des variables* x, y, z, p, q *seulement — du système* (21).

Le groupe de mouvements d'un système (1), (25), *tel que les conditions* (26) *et* (28) *soient satisfaites, dépend de la solution la plus générale* φ *du système* (29). *Si — au lieu de* (28) *— sont satisfaites les conditions* (30), *le groupe dépend de la solution la plus générale* φ *du système* (31).

On détermine effectivement le groupe de mouvements de l'équation (32), l'une des deux formes auxquelles sont réductibles les équations (1) qui admettent des groupes de mouvements à 9 paramètres [1]. On trouve que φ est un polynôme, dont les coefficients dépendent de 9 constantes, donné par la formule (48), et que les fonctions $\xi, \ldots, \omega$ sont données par les formules (49). Il s'ensuit que les opérateurs du groupe G_9 de l'équation (32) sont donnés par (50), de sorte que les équations de structure de ce groupe — *non intégrable parfait* — sont les équations (51).

BIB LIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle.* **II.** Editions de l'Académie de la République Populaire Roumaine, 1957.
2. — *Asupra sistemelor Pfaff de 3 ecuații în 5 variabile.*

* * * *Opera matematică a lui Alexandru Pantazi.* Novîie knighi za rubejom, Ser. A, *4*, 1959.

Şcoala romînească de geometrie diferenţială este cunoscută cu mult dincolo de hotarele Romîniei. Generaţia ei mai în vîrstă este reprezentată de decedatul academician Ţ i ţ e i c a, a cărui elegantă carte „Geometria diferenţială proiectivă a reţelelor" este un model de expunere simplă şi atrăgătoare a celor mai dificile chestiuni, şi de academicianul V r ă n c e a n u, cunoscut prin lucrările sale asupra grupurilor de mişcări în varietăţile riemanniene. De ei sînt legaţi numeroşi savanţi mai tineri, printre care locul de frunte l-a ocupat A. P a n t a z i (1896—1940) şi a cărui operă matematică a fost publicată într-un volum special de Academia de Ştiinţă Romînă.

După absolvirea universităţii din Bucureşti, Pantazi a fost trimis de profesorul său Ţiţeica la Paris, la E. Cartan care aplica pe atunci metoda sa a formelor exterioare la unele probleme de geometrie. Pantazi a fost atras de această nouă metodă. El a consacrat prima sa mare lucrare deformării proiective a suprafeţelor desfăşurabile. Un capitol întreg tratează teoria proiectivă şi deformarea curbelor în spaţiu. Apoi cercetează proprietăţile proiective ale unei familii de suprafeţe ; găseşte o pereche de drepte — „transversale proiective" — legate invariant de familie ; una dintre ele trece printr-un punct al suprafeţei, cealaltă este conţinută în planul tangent.

Toate aceste lucrări sînt foarte interesante, însă contribuţia cea mai de seamă a autorului o constituie, desgiur, lucrările sale de teoria perechilor stratificabile. El a fost primul care a aplicat acestei probleme metoda formelor exterioare a lui Cartan. Această aplicaţie nu era de loc banală. O pereche stratificabilă este formată de două congruenţe de raze (familii de drepte depinzînd de doi parametri) ; acestora li se asociază două familii de suprafeţe, depinzînd de un parametru, astfel încît planul tangent la o suprafaţă dintr-o familie în punctul de intersecţie cu o rază a uneia dintre congruenţe să treacă prin raza corespunzătoare a celeilalte congruenţe şi reciproc (pentru cealaltă familie de suprafeţe). Toţi autorii asociază reperul perechii de raze corespondente din cele două congruenţe. Pantazi l-a asociat suprafeţelor stratificate ale familiilor. Aceasta i-a permis să studieze perechile stratificabile cu ajutorul proprietăţilor date ale suprafeţelor stratificate.

Încununarea numeroaselor sale lucrări asupra perechilor stratificabile este determinarea tuturor cuadruplelor sau perechilor stratificabile, care admit o transformare. Fiecare rază a unei congruenţe conţine două focare, în care ea este tangentă la două suprafeţe locale ; la o pereche stratificabilă, patrulaterul cu vîrfurile în focarele perechii de raze corespunzătoare are toate laturile tangente la patru suprafeţe locale ; la un cuadruplu stratificabil, fiecare pereche de laturi opuse descrie o pereche stratificabilă ; la un cuadruplu conjugat, diagonalele patrulaterului descriu de asemenea o pereche stratificabilă, care poate fi completată la un cuadruplu, unind prin drepte focarele razelor corespunzătoare ale perechii.

Problema determinării cuadruplelor conjugate a interesat și pe alți geometri, dar numai Pantazi a reușit s-o rezolve. Metoda lui Cartan a sistemelor în involuție i-a fost de mare folos, însă nici datorită acestei metode problema nu a devenit banală. Efortul a fost răsplătit, autorul a găsit trei clase remarcabile de cuadruple stratificabile. În această mică recenzie nu putem insista asupra proprietăților geometrice interesante ale acestor congruențe.

Vom caracteriza pe scurt încă două probleme, care l-au preocupat pe Pantazi în ultimul deceniu al vieții sale. Prima era problema lui Blaschke a „țesutului" în plan. Aplicînd diferențiala exterioară, Pantazi a obținut anumiți invarianți care rezolvă problema lui Blaschke. A doua problemă era cea a deformării proiective a suprafețelor. Din păcate, el nu a reușit să rezolve această problemă dificilă.

Trebuie menționată de asemenea monografia reprodusă la sfîrșitul volumului „Elemente de geometrie diferențială proiectivă a curbelor și suprafețelor", care conține în 100 pagini noțiuni fundamentale de teoria curbelor plane și în spațiu și de teoria suprafețelor.

S. P. Finikov

SU BUCHIN, *The general projective theory of curves* (Teoria generală proiectivă a curbelor). Science Press, Peking, 1958, 242 pag.

Această lucrare este o monografie în care sînt prezentate proprietățile geometrice, diferențial proiective ale curbelor în spațiul cu trei dimensiuni și mai general într-un spațiu proiectiv S_n $(n < 3)$.

Primul capitol cuprinde teoria proiectivă a curbelor plane expuse după metoda clasică. Unui punct regulat P care nu este un punct de inflexiune al unei curbe plane analitice C care nu este nici dreaptă, nici conică i se asociază triunghiul canonic format de tangenta în T la curbă, normala proiectivă a lui S a n n i a și tangenta la conica osculatoare în punctul P_2 comun acestei conice și normalei proiective. Această normală proiectivă PP_2 admite alte două proprietăți caracteristice datorite autorilor T. C. F o x și S. C. C h a n g, proprietăți care pot deci să o definească. Remarcabilă prin simplicitate este semnificația geometrică a invariantului finit numit curbură proiectivă care apare în ecuația redusă a curbei în coordonate proiective neomogene. S. C. C h a n g a arătat că printre cubicele avînd un contact de al șaptelea ordin cu curba în P, există două cubice care sînt tangente normalei proiective PP_2. Una din ele este cubica lui Wilczynski care are un nod în punctul P, cealaltă atinge PP_2 într-un punct Q. La fel printre cubicele avînd un contact de al șaselea ordin cu curba C în P, există o singură cubică care are un nod pe normala proiectivă PP_2. Dacă Q_1 este acest punct curbura proiectivă este dată, în afara unui factor numeric neesențial, de biraportul (P, P_2, Q, Q_1).

Capitolul se termină cu teoria contactului a două curbe plane așa cum a fost elaborată de Bompiani și căreia i se adaugă numeroase rezultate noi datorite lui C. C. H s i u n g.

Al II-lea capitol conține importantele cercetări ale autorului asupra singularităților curbelor plane, în special asupra punctelor singulare de ordinul m $(m \geqslant 3)$, în care tangenta are un contact de ordinul $m-1$ cu curba și a punctelor de întoarcere sau a punctelor cuspidale. În ceea ce privește punctele singulare de ordinul m autorul stabilește o teoremă care este fundamentală pentru teorie. Dacă M este un punct arbitrar exterior tangentei PP_1 la curbă și dacă C_m este o curbă algebrică de ordinul m care are în M un punct multiplu de ordinul $m-1$ astfel încît cele $m-1$ ramuri ale lui C_m să fie tangente aceleiași drepte t și dacă, în plus, C_m are împreună cu curba C un contact de ordinul $m+1$ în P, atunci punctul O_{m+1}, comun tangentei PP_1 la C și tangentei t, este același oricare ar fi punctul M. Un punct singular de ordinul m se zice re-

prezentabil (sau de prima speță) dacă se poate alege punctul M astfel ca C_m să aibă cu C un contact de ordinul $m' \geqslant 2m-1$ în P. Pentru ca aceasta să aibă loc este necesar și suficient ca să fie verificate $m-3$ condiții numite condițiile lui Su. Dacă aceste condiții nu sînt verificate punctul singular este un punct de a doua speță.

În primul caz, dacă se consideră punctele M pentru care curbele C_m au un contact de ordinul $2m-1$ cu C, aceste puncte M sînt situate pe o dreaptă l_{2m-1} care conține punctul P. Și pe această dreaptă există un punct O_{2m}, punct multiplu al unei curbe C_m avînd un contact de ordinul $2m$ cu C. Astfel, unui punct singular de ordinul m și de prima speță i se poate asocia un triunghi de referință $PO_{m+1}\ O_{2m}$. Pentru $m = 3$ nu există nici o condiție a lui Su de verificat și se regăsesc osculanții O_4, O_5 și O_6 ai lui Bompiani. Aceste rezultate fundamentale sînt utilizate pentru interpretarea geometrică a condițiilor lui Su. Pentru punctele cuspidale autorul se mărginește să reproducă teoria stabilită de profesorul I. P o p a din Iași.

Autorul studiază apoi cu ajutorul acestor osculanți secțiunile plane ale suprafeței desfășurabile formate de tangentele unei curbe a spațiului, introducînd un con patratic și o cubică strîmbă care vor juca un rol important în teoria curbelor din S_3 care face obiectul celui de-al III-lea capitol. Se asociază unui punct P al unei curbe a spațiului o mulțime de tetraedre de referință $\{P, P_1, P_2, P_3\}$ ale căror elemente satisfac următoarele condiții :

1) muchiile PP_1, P_1P_2 sînt tangente în punctele P, P_2 la conica osculatoare în P la curba C;

2) osculanții lui Bompiani O_4 și O_6 ai secțiunii plane a suprafeței tangentelor prin planul (P, P_1, P_3) sînt respectiv P_1, PP_3 și P_3.

Punctul P_1 rămîne arbitrar. Anumiți invarianți sînt asociați familiei formate de aceste tetraedre. Prin considerații analitice referitor la reducerea ecuației diferențiale verificate de coordonatele omogene ale punctului P, la forma normală a lui Laguerre-Forsyth, autorul stabilește invarianța a două forme diferențiale la fel ca și invarianța unei ecuații care caracterizează curbele ale cărei tangente aparțin unui complex liniar (curbele complexului). Elementele osculante ale lui Bompiani O_6 și l_5 relative la secțiunile plane prin planele (P, P_1, P_3) sînt situate respectiv pe o cubică strîmbă avînd cu C un contact de al patrulea ordin în P și conul osculator la C în P.

Autorul alege în sfîrșit pentru curbele care nu sînt curbe ale complexului un singur tetraedru numit tetraedru normal, luînd punctul P_1 astfel încît să fie conjugatul armonic al lui P în raport cu punctul R, care este osculantul O_4 corespunzător planului principal al lui Halphen și punctului R care este punctul principal al lui Sannia. Dacă C este o curbă a complexului, autorul consideră cuadrica Q care are un contact de al șaptelea ordin în P și C și alege ca punctul P_1, osculantul O_4 relativ la un plan tangent în P la Q.

În al IV-lea capitol se găsesc expuse teoria invarianților intersecției a două curbe ale spațiului cu aplicații la teoria suprafețelor și la varietățile neolonome.

Considerînd ca fundamental faptul că toate sistemele tetraedrale de referință asociate în modul indicat mai sus punctelor unei curbe a unui S_3 se sprijină pe considerația osculanților lui Bompiani atașați punctelor de inflexiune ai secțiunilor plane ale tangentelor, autorul schițează într-un mod analog teoria proiectivă a curbelor dintr-un S_n $(n \geqslant 3)$. Astfel, dacă P este un punct ordinar al unei curbe C și hipersuprafața desfășurabilă formată de tangentele la C, prin tangenta t_0 la C în P trec ∞^{m-2} plane care sînt conținute în spațiul osculator S_m la C și care nu aparțin spațiului osculator S_{m-1} $(3 \leqslant m \leqslant n)$. Fiecare din aceste plane taie hipersuprafața Σ după o curbă C care are în P un contact de ordinul $m-1$ cu t_0. În consecință, se poate determina în familia formată de aceste plane, o familie ∞^1 de plane astfel ca secțiunea C relativă la fiecare din planele acestei familii să aibă punctul P ca punct singular de prima speță. Considerînd pe tangenta t_0 în P un punct P_k diferit de P, există un singur plan al

acestei familii, astfel încît osculantul O_{m+1} să coincidă cu P_1 obținînd astfel pentru fiecare valoare a lui m planul corespunzător, se construiește punctul O_{2m} pe care-l notăm P_m ($m = 3, 4, \ldots, n$). Planul osculator S_2 taie $\sum$ după o curbă K. Luînd P_2 ca punct de contact al celei de-a doua tangente duse prin P_1 la conica osculatoare lui K în P, sistemul de referință $PP_1 \ldots P_n$ este determinat. Problema invarianților se reduce la determinarea omografiilor care transformă între ele sistemele de referință ale familiei asociate punctului P.

Această teorie generală este aplicată în capitolul V curbelor din S_4 stabilind sistemele canonice, desvoltările asociate respective, locul osculanților care intervin în determinarea sistemelor de referință, invarianții finiți și formele diferențiale invariante, cele trei specii de curbe normale ale lui S_4 și studiind invarianții de contact ai anumitor secțiuni plane ale lui $\sum$.

În sfîrșit în al VI-lea și ultimul capitol sînt generalizate pentru cazul curbelor unui S_n proiectiv ($n > 4$) cîteva rezultate valabile pentru $n = 4$ și privind anumite figuri asociate punctelor unei curbe și situate în diferitele S_m osculatoare ($m < n$), corespondențele care generalizează pe cele ale lui Bompiani pentru $n = 3$, cîțiva invarianți aritmetici ai unei curbe și $k - 1$ invarianții de contact ai lui Segre pentru două curbe avînd în comun un punct P și toate spațiile osculatoare S_2, $S_3 \ldots S_k$ în acest punct pînă la un ordin $k \leqslant n - 1$.

Problema invarianților atît a celor finiți, cît și a celor infinitesimali ai unei curbe dintr-un S_n : curburi, elemente de arc și forme de curbură n-a fost considerată și sistemul de formule ale lui Frenet n-a fost stabilit. Reamintim că această problemă a fost complet rezolvată de Al. P a n t a z i în teza sa : „Sur l'applicabilité projective des hypersurfaces développables" (vezi Al. Pantazi, Opera matematică) utilizînd metoda reperului mobil.

Tiberiu Mihăilescu

BENIAMINO SEGRE, *Some properties of differentiable varieties and transformations with special reference to the analytic and algebraic case* (Cîteva proprietăți ale varietăților diferențiabile și ale transformărilor cu o tratare particulară a cazului analitic și algebric). Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1957, 183 pag.

În această monografie binecunoscutul matematician italian expune pe larg conferințele ținute în 1955 la Pavia la „Centro Internazionale Matematico Estivo".

Conținutul este împărțit în nouă capitole.

În primul capitol autorul consideră corespondențele punctuale sau corelative biregulate și de clasă C^1 între două domenii euclidiene și determină un sistem complet de invarianți diferențiali metrici de primul ordin (coeficienții de contracție) ai acestor corespondențe, din care se deduc anumiți invarianți topologici relativ la punctele unite în cazul în care domeniile considerate coincid. Acestor ultimi invarianți li se pot asocia birapoarte avînd o semnificație geometrică. Rezultatele stabilite sînt generalizate pentru o varietate diferențiabilă sau complexă oarecare.

În capitolul II considerînd varietățile complexe V_n, cu dimensiunea n complexă și transformările T analitice uniforme avînd un punct unic care este simplu pentru V_n, autorul introduce noțiunea de *rezidu* al unui punct simplu izolat O a lui T, noțiune care joacă un rol important în cele ce urmează. Asociind lui V_n o varietate riemanniană reală V_{2n}^x (cu dimensiunea $2n$ reală), imaginea lui T este o transformare T^x al cărei rezidu în punctul unit O^x care corespunde punctului unit O al lui T, este real și egal cu de două ori partea reală a rezidului lui T în punctul O.

Capitolul III tratează în mod sistematic despre invarianții de contact și de osculație a două curbe sau a două varietăți tangente într-un punct, invarianți care generalizează invariantul clasic al lui Mehmke-Segre. O teoremă generală asupra anumitor varietăți situate pe o hipercuadrică a unui spațiu proiectiv cu n dimensiuni S_n permite autorului să introducă noțiunea globală de biraport a patru elemente situate pe anumite varietăți. Utilizînd în acest capitol curbele principale ale unei suprafețe dintr-un S_3 proiectiv, autorul rezolvă complet problema biraportului a patru puncte a unei suprafețe care nu este o cuadrică sau o suprafață desfășurabilă.

Aceste prime patru capitole expun chestiuni pur diferențiale. Cele trei capitole care urmează conțin un bogat material de geometrie algebrică.

În capitolul al cincilea autorul studiază proprietățile diferențiale ale curbelor analitice și algebrice utilizînd noțiunea de reziduu al unei transformări T care a fost definit în capitolul II și căruia i se dă o semnificație geometrică în cazul în care T este un automorfism al unei curbe analitice. Cea mai mare parte din rezultatele stabilite sînt adoptate și generalizate în al VI-lea capitol pentru varietățile algebrice V_r $(r > 1)$.

În capitolul VII sînt studiate proprietățile diferențiale și topologice ale varietăților diferențiabile V_p $(p \geqslant 1)$ de clasă C^n $(n \geqslant 2)$. Aceste proprietăți sînt de natură algebro-diferențială globală și sînt obținute cu ajutorul proprietăților de natură locală. Într-un mod special sînt studiate varietățile lui Veronesse.

Al VIII-lea capitol conține teoreme asupra sistemelor de ecuații diferențiale liniare și a sistemelor liniare de ecuații cu derivate parțiale relativ la reducerea lor la forme canonice și la construirea condițiilor de integrabilitate și de compatibilitate precum și natura și gradul de generalitate a soluției.

Aceste teoreme se bazează pe rezultatele de geometrie algebrică stabilite în capitolul precedent și pe relațiile de izomorfism care există între mulțimea operatorilor diferențiali și inelul polinoamelor care le corespund. Existența acestui izomorfism ca și importanța sa în teoria sistemelor liniare de ecuații cu derivate parțiale a fost subliniată și întrebuințată în același scop de acad. Gr. C. Moisil.

Al IX-lea și ultimul capitol conține rezultate privind corespondențele între varietăți topologice în care sînt puși în evidență invarianții topologici de natură aritmetică și algebrică.

Observăm că bogatul și variatul material prezentat în această interesantă monografie se axează pe cercetările autorului și din această cauză aproape toate rezultatele care se găsesc îi aparțin.

T. Mihăilescu

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

MATEMATICĂ

S. STOILOW, **Teoria funcţiilor de o variabilă complexă**, vol. II, 379 p., 25,70 lei
G. VRĂNCEANU, **Lecţii de geometrie diferenţială**, 3 volume
vol. I 407 p., 26,50 lei
vol. II 428 p., 27,50 lei } în limba franceză
vol. III 455 p., 15 lei în limba romînă
D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)** 380 p., 7 lei
O. ONICESCU, G. MIHOC şi colaboratori, **Calculul probabilităţilor şi aplicaţii**, 781 p., 15 lei
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale normate**, 495 p., 6 lei
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice**, 219 p., 8,80 lei
AL. FRODA, **Algebra superioară**, 455 p., 24,50 lei
SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulţimilor şi a structurilor algebrice**, 235 p., 11,65 lei
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă**, 495 p., 25,90 lei
ROMULUS CRISTESCU, **Spaţii liniare ordonate**, 332 p., 11,10 lei
N. N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 144 p., 4,30 lei
IÁNOS BOLYAI, **Appendix**, 216 p. + 6 pl., 8 lei
GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometrie diferenţială proiectivă a reţelelor**, 287 p., 8 lei
DIMITRIE POMPEIU, **Opera matematică**, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei
ALEX. MYLLER, **Serieri matematice**, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei
CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la Mécanique des fluides**, Coeditare cu Editura Gauthier-Villars, Paris, 1288 p., 66,50 lei

FIZICĂ

EUGEN BĂDĂRĂU, **Fizica descărcărilor în gaze**, 303 p., 17 lei
VALER NOVACU, **Introducere în electrodinamică**, 2 volume
vol. I. 600 p., 18,50 lei
vol. II 297 p., 9,60 lei
AL. SANIELEVICI, DRAGOŞ BOGDAN **Structura nucleului atomic şi tranziţiile radioactive**, 472 p. + 1 pl., 30,50 lei
IOAN URSU, **Efecte magnetomecanice la oxigen**, 136 p. + 1 pl., 6,20 lei
MIRCEA C. ONCESCU, **Fizica protecţiei contra radiaţiilor**, 172 p., 16,80 lei
ZOLTÁN GÁBOS, **Bazele fizicii moderne. Termodinamica fenomenologică**, 319 p., 13,10 lei
FRÉDÉRIC JOLIOT-CURIE, **Opere alese**, 320 p. + 8 pl., 27,40 lei

Pentru a vă asigura o colecție completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pentru anul 1961.

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POȘTALE, AGENȚIILE POȘTALE, FACTORII POȘTALI ȘI DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII.

I.P.2, c. 2358

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:	din vina:
293	16	definite și continue ...	definite ...	autorului
293	(2)	$q_1\psi_1 = q_2\psi_2$	$q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2$	autorului
297	(21)	$\psi_1 = \psi_2$	$\varphi_1 = \varphi_2$	autorului
444	16	$(c_i, Q_{\alpha-1} + 1, \ldots$	$(c_i, Q_{\alpha-1} + 1, \ldots$	editurii
446	(19)	$\overline{x}$	$\overline{x}^0$	autorului
457	(10.7)	$\gamma\delta$	$\gamma\overline{\delta}$	editurii

C. 4402. Studii și cercetări matematice 2/1960.